Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 4, 2015, стр. 51-67.

РАСХОДЯЩИЕСЯ ТРЕУГОЛЬНЫЕ СУММЫ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Г. А. КАРАГУЛЯН, К. Р. МУРАДЯН

Институт математики НАН Армении
E-mails: *g.karagulyan@yahoo.com*; *karenmuradyan1988@mail.ru*

Аннотация. Рассматриваются некоторые вопросы расходимости треугольных и секторных сумм двойных тригонометрических рядов Фурье. Строится пример функции из $\cap_{1\le p<\infty} L^p$, треугольные частичные суммы двойного ряда Фурье которой расходятся почти всюду.

MSC2010 numbers: 42B08.

Ключевые слова: расходящиеся треугольные суммы; двойные тригонометрические ряды; секторные суммы.

1. Введение

Карлесон в [3] доказал, что частичные суммы тригонометрического ряда Фурье любой функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ сходятся почти всюду (п. в.). Усовершенствовав метод Карлесона, Хант [6], Шелин [10] и Антонов [1] установили, что свойство сходимости п. в. рядов Фурье сохраняется и для более широких классов функций. Антонов [1] доказал сходимость п. в. рядов Фурье функций из класса $L\log(L)\log\log\log(L)$, который в настоящее время является самым широким известным классом Орлича, функции которого обладают этим свойством. Аналогичные задачи исследованы также для кратных рядов Фурье. Если функция $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ имеет двойной ряд Фурье

$$f(x,y) \sim \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \quad c_{nm} = c_{nm}(f),$$

а $G \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторая область, то обозначим

$$S_G(x,y,f) = \sum_{(n,m)\in G} c_{nm} e^{i(nx+my)}. \tag{1.1}$$

Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ есть произвольная открытая многоугольная область, содержащая начало координат, и пусть $\lambda P = \{(\lambda x, \lambda y) : (x,y) \in P\}$, $\lambda > 0$. Ч. Феффермана [4] доказал, что частичные суммы $S_{\lambda P}(x,y,f)$ любой функции $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$ сходятся п. в. при $\lambda \to \infty$. В случае когда P прямоугольник, Шелин [10] доказал аналогичное для более широкого класса функций $L(\log L)^3 \log\log L$, а если P-квадрат, то свойство сходимости п. в. сохраняется также в $L(\log L)^2 \log\log L$. Уточнив второй результат Шелина, в работе [1] Антонов установил сходимость п. в. квадратных сумм рядов Фурье в классе $L(\log L)^2 \log\log\log L$. Тевзадзе [11] показал, что для любой последовательности прямоугольников $R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots$ в $\mathbb{R}^2$, стороны которых параллельны осям координат, частичные суммы $S_{R_k}(x, y, f)$ любой функции $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ сходятся п. в..

Заметим, что во всех упомянутых результатах последовательности частичных сумм зависят от одного параметра, и в их доказательствах используется теорема Карлесона и другие одномерные результаты. Иным свойством обладают частичные суммы

$$S_{NM}(x, y, f) = \sum_{|n| \le N, |m| \le M} c_{nm} e^{i(nx+my)}, \tag{1.2}$$

где областями суммирования являются всевозможные прямоугольники, стороны которых параллельны осям координат. Ч. Феферман [5] построил пример непрерывной функции $f \in C(\mathbb{T}^2)$, для которой суммы (1.2) расходятся всюду при $N, M \to \infty$.

Отметим также, что в выше приведенных теоремах сходимости двойных рядов Фурье рассматриваются многоугольники стороны которых параллельны фиксированным направлениям. Оказывается, что это тоже является важным обстоятельством в этих теоремах. В настоящей работе устанавливается, что незначительная свобода направлений сторон суммирущей многоугольной области ухудшает ситуацию. Будем рассматривать области следующих видов:

$$\Delta(a, b) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a|x| + b|y| \le 1\right\}, \quad a, b > 0, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} W(\alpha, \beta) = &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\cos\theta, |y| = r\sin\theta, r \ge 0, \alpha \le \theta \le \beta\}, \\ &0 \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

Области вида (1.3) представляют ромбы. Если $\Delta = \Delta(a, b)$, то обозначим

$$\rho(\Delta) = \frac{\max\{a, b\}}{\min\{a, b\}}.$$

Ясно, что Δ будет квадратом, если $a = b$ или то же самое, что $\rho(\Delta) = 1$. Отметим также, что каждую область (1.4) можно представить в виде объединения четырех секторов вида

$$V(\alpha,\beta)=\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2:\ x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r\geq 0,\ \alpha\leq\theta\leq\beta\},\quad 0\leq\alpha<\beta\leq 2\pi, \tag{1.5}$$

где $\mathbb{R}_+$ есть множество вещественных неотрицательных чисел. Последовательность областей G_k назовем полным, если $\cup_{k=1}^{\infty}G_k=\mathbb{R}^2$. Следующая теорема является следствием вышеупомянутого общего результата Фефферманa [4], и как отмечается в [4] она эквивалентна общей теореме.

Теорема A (Фефферман). *Если Δ_k, $k=1,2,\ldots$, есть полная возрастающая последовательность квадратов вида (1.3) ($\rho(\Delta_k)=1$), то для любой функции $f\in L^p(\mathbb{T}^2)$, $p>1$, имеет место соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}S_{\Delta_k}(x,y,f)=f(x,y)\ \text{п. в. на}\ \mathbb{T}^2. \tag{1.6}$$

Следующая теорема показывает, что для произвольных областей вида (1.3) теорема A не верна. Более того, доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Существуют функция $f\in\cap_{1\leq p<\infty}L^p(\mathbb{T}^2)$ и полная возрастающая последовательность Δ_k, $k=1,2,\ldots$, областей вида (1.3), такие, что $\rho(\Delta_k)\to 1$ и имеет место соотношение*

$$\limsup_{k\to\infty}|S_{\Delta_k}(x,y,f)|=\infty\ \text{п. в. на}\ \mathbb{T}^2.$$

Условие $\rho(\Delta_k)\to 1$ означает, что в бесконечности ромбы Δ_k превращаются в квадраты. Теорема 1.1 показывает, что все равно этого не достаточно для сохранения свойства сходимости (1.6). Аналогичная теорема доказывается также для секторных сумм. Отметим, что хотя при неограниченной области G сумма (1.1) не является конечной, но она определена п.в. в случае $f\in L^2(\mathbb{T}^2)$.

Теорема 1.2. *Для любой возрастающей последовательности W_k, $k=1,2,\ldots$, областей вида (1.3) существует функция $f\in\cap_{1\leq p<\infty}L^p(\mathbb{T}^2)$ такая, что*

$$\limsup_{k\to\infty}|S_{W_k}(x,y,f)|=\infty\ \text{п. в. на}\ \mathbb{T}^2.$$

Ясно, что области

$$\Delta(a,b)\cap\mathbb{R}_+^2, \tag{1.7}$$

$$W(\alpha,\beta)\cap\mathbb{R}_+^2, \tag{1.8}$$

будут, соответственно, треугольниками и секторами с вершинами в начале координат. Хорошо известно, что двойной ряд Фурье (1.1) вещественной функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$ имеет запись в вещественной форме (по синусам и косинусам), а сумма (1.1), соответствующая некоторой ромбовой области (1.3), совпадает с суммой членов двойного вещественного ряда Фурье с номерами из треугольника (1.7). Аналогично, сумма ряда (1.1) по областям (1.4) превращается в суммы по секторам (1.8) в вещественном случае.

2. Вспомогательные леммы

Пусть $f_n(x,y)$, $n = 1, 2, \cdots, 2^m - 1$ ($f_n \not\equiv 0$) есть система функций на торе $\mathbb{T}^2$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi$. Иногда будем пользоваться двойной индексацией системы $f_n(x,y)$ определенной равенствами

$$f_j^{(k)}(x,y) = f_n(x,y),\ n = 2^k + j - 1,\ 1 \le j \le 2^k,\ k = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{2.1}$$

Будем говорить, что система $f_n(x,y) = f_j^{(k)}(x,y)$ образует дерево, если

$$\operatorname{supp} f_{2j-1}^{(k+1)} \subset \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : f_j^{(k)}(x,y) > 0\},$$
$$\operatorname{supp} f_{2j}^{(k+1)} \subset \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : f_j^{(k)}(x,y) < 0\}.$$

Если n имеет запись (2.1), то обозначим

$$\bar{n} = 2^{k-1} + \left[\frac{j-1}{2}\right],$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа. Очевидно следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Для того, чтобы функции $f_n(x,y)$ $n = 1, 2, \ldots, 2^m - 1$, определенные на квадрате $(0,1)^2$, образовывали дерево, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\operatorname{supp} f_n \subset \{(-1)^{j+1} \cdot f_{\bar{n}} > 0\}.$$

Следующая лемма доказывается в работе [8].

Лемма 2.2. *Существует перестановка σ чисел $\{1, 2, \cdots, 2^m - 1\}$ такая, что любая система $f_n(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{T}^2$, $n = 1, 2, \cdots, 2^m - 1$, которая образует дерево, удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{1 \le l < 2^m} \left| \sum_{n=1}^{l} f_{\sigma(n)}(x,y) \right| \ge \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{2^m-1} |f_n(x,y)|.$$

Обозначим через $\mathbb{I}_F(x,y)$ характеристическую функцию множества $F \subset \mathbb{T}^2$. Если $n \in \mathbb{N}$, а $E \subset \mathbb{T}^2$ есть некоторое измеримое множество, то обозначим $E(n) = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : (nx, ny) \in E\}$. Очевидно имеем $|E(n)| = |E|$.

Следующая лемма является вариантом известной леммы Фейера (см. [2] § 2.20 или [12] § 2.4). Ее доказательство основано на аналогичных рассуждениях и поэтому мы изложим его кратко.

Лемма 2.3. *Если $f(x,y) \in L^1(\mathbb{T}^2)$ и $g(x,y) \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, то имеет место равенство*

$$\lim_{|p|,|q|\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} f(x,y)g(px,qy)dxdy = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} f(x,y)dxdy \cdot \int_{\mathbb{T}^2} g(x,y)dxdy \tag{2.2}$$

Доказательство. Легко проверить, что равенство (2.2) выполняется, если f есть характеристическая функция некоторого квадрата. Отсюда, оно будет иметь место также когда f есть ступенчатая функция (линейная комбинация характеристических функций квадратов). Далее, функцию f можно представить в виде $f = f_1 + f_2$, где $\|f_1\|_1 < \varepsilon$, а f_2 есть ступенчатая функция, и в заключение надо рассматривать (2.2) для функций f_1 и f_2 отдельно. □

Лемма 2.4. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $E_k \subset \mathbb{T}^2$ есть последовательность измеримых множеств таких, что $|E_k| > 4\alpha\pi^2$, $k = 1, 2, \ldots, l$. Тогда существуют натуральные числа n_k, удовлетворяющие условию*

$$\left|\cup_{k=1}^{l} E_k(n_k)\right| > 4\pi^2(1 - (1-\alpha)^l). \tag{2.3}$$

Доказательство. Из леммы 2.3 следует, что если $A, B \subset \mathbb{T}^2$ есть измеримые множества, то имеем

$$\lim_{n\to\infty} |A \cap B(n)| = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \mathbb{I}_A(x,y)\mathbb{I}_B(nx,ny)dxdy = \frac{|A||B|}{4\pi^2}.$$

Отсюда вытекает

$$\lim_{n\to\infty} |(A \cup B(n))^c| = \lim_{n\to\infty} \left(4\pi^2 - |A| - |B(n)| + |A \cap B(n)|\right)$$
$$= 4\pi^2 - |A| - |B| + \frac{|A||B|}{4\pi^2} = \frac{(4\pi^2 - |A|)(4\pi^2 - |B|)}{4\pi^2} = \frac{|A^c| \cdot |B^c|}{4\pi^2}.$$

Применив это соотношение по очереди $l-1$ раз, при достаточно малом $\delta > 0$ можно найти натуральные числа n_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, такие, что

$$|(E_1 \cup E_2(n_2) \cup \ldots \cup E_l(n_l))^c| < \frac{|E_1^c| \cdot |E_2^c| \cdot \ldots \cdot |E_l^c|}{(4\pi^2)^{l-1}} + \delta$$
$$< \frac{(4\pi^2 - 4\alpha\pi^2)^l}{(4\pi^2)^{l-1}} = 4\pi^2(1-\alpha)^l.$$

Отсюда вытекает (2.3). □

Лемма 2.5. *Пусть $E_k \subset \mathbb{T}^2$ есть последовательность измеримых множеств таких, что $|E_k| > 4\alpha\pi^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда существуют натуральные числа n_k такие, что*

$$|\cap_{l\geq 1} \cup_{k\geq l} E_k(n_k)| = 4\pi^2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Применив лемму 2.4 к каждому семейству множеств $\{E_j : k^2 < j \leq (k+1)^2\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, мы получим последовательность натуральных чисел n_j таких, что

$$\left|\bigcup_{j=k^2+1}^{(k+1)^2} E_j(n_j)\right| > 4\pi^2(1-(1-\alpha)^{2k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{2.5}$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha)^{2k+1}$ сходится, из (2.5) вытекает (2.4). □

Для данных натуральных чисел n и p обозначим

$$A(n,p) = \{(l_1, l_2, \ldots, l_n) : l_k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq l_k \leq p,\ k = 1, 2, \ldots, n\},$$
$$A_1(n,p) = \{(l_1, l_2, \ldots, l_n) \in A(n,p) : l_k = 2l'_k,\ l'_k \in \mathbb{Z},\ k = 1, 2, \ldots, n\}$$
$$A_2(n,p) = A(n,p) \setminus A_1(n,p).$$

Определение 2.1. *Пусть $p \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ есть некоторые числа. Будем говорить, что система функций $g_k(x,y) \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, является (p,ε)-системой, если*

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2} \prod_{k=1}^{n} (g_k(x,y))^{l_k} dxdy\right|^{1/p} < \varepsilon,$$

для любой совокупности $(l_1, \ldots, l_n) \in A_1(n,p)$.

Следующая лемма является обобщением неравенства Хинчина для системы Радемахера (см. [7] Теорема 4.5.6 или [9]) и доказывается аналогичной техникой.

Лемма 2.6. *Если $p > 2$ есть четное число, а система функций $g_k(x,y) \in L^\infty(\mathbb{T}^2)$ такова, что $\|g_k\|_\infty \leq M$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и она является (p,ε)-системой, то для любых коэффициентов a_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, имеет место неравенство*

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k g_k\right\|_p \leq M\sqrt{p/2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Доказательство. Предположим, что $p = 2q$ и $q \in \mathbb{N}$. Тогда получим

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k g_k \right\|_p^p = \int_{\mathbb{T}^2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k g_k \right)^{2q} \tag{2.6}$$
$$= \sum_{i_1+\ldots+i_n=2q} \frac{(2q)!}{(i_1)!\ldots(i_n)!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} \int_{\mathbb{T}^2} g_1^{i_1} g_2^{i_2} \ldots g_n^{i_n} = S_1 + S_2,$$

где в сумме S_1 входят члены у которых $i_k = 2j_k$ четные, а в S_2-остальные. Имеем

$$\frac{(2q)!}{(2j_1)!\ldots(2j_n)!} = \frac{(2q)!(j_1)!\ldots(j_n)!}{q!(2j_1)!\ldots(2j_n)!} \cdot \frac{q!}{(j_1)!\ldots(j_n)!}$$
$$\leq \frac{(2q)!}{q!2^q} \cdot \frac{q!}{(j_1)!\ldots(j_n)!} \leq \frac{q^q \cdot q!}{(j_1)!\ldots(j_n)!}.$$

Отсюда получаем

$$S_1 = \sum_{j_1+\ldots+j_n=q} \frac{(2q)!}{(2j_1)!\ldots(2j_n)!} a_1^{2j_1} a_2^{2j_2} \ldots a_n^{2j_n} \int_{\mathbb{T}^2} g_1^{2j_1} g_2^{2j_2} \ldots g_n^{2j_n} dxdy \tag{2.7}$$
$$\leq M^{2q} \sum_{j_1+\ldots+j_n=q} \frac{(2q)!}{(2j_1)!\ldots(2j_n)!} a_1^{2j_1} a_2^{2j_2} \ldots a_n^{2j_n}$$
$$\leq M^{2q} q^q \sum_{j_1+\ldots+j_n=q} \frac{q!}{(j_1)!\ldots(j_n)!} a_1^{2j_1} a_2^{2j_2} \ldots a_n^{2j_n} = M^p \left(\frac{p}{2}\right)^{p/2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{p/2}.$$

Так как g_k является (p, ε)-системой, имеем

$$|S_2| \leq \varepsilon^p \sum_{i_1+\ldots+i_n=p} \frac{p!}{i_1!\ldots i_n!} |a_1|^{i_1} |a_2|^{i_2} \ldots |a_n|^{i_n} = \varepsilon^p \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k| \right)^p. \tag{2.8}$$

Из (2.6) — (2.8) получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k g_k \right\|_p \leq (|S_1| + |S_2|)^{1/p} \leq |S_1|^{1/p} + |S_2|^{1/p}$$
$$\leq M\sqrt{p/2} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

и лемма будет доказана. □

Лемма 2.7. *Если $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, $\|f\|_\infty = 1$ и $\|f\|_1 \geq 4\pi^2\alpha$ при некотором $0 < \alpha < 1$, то имеем*

$$|\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : |f(x,y)| > \alpha/2\}| \geq \frac{4\pi^2\alpha}{2-\alpha}.$$

Доказательство. Пусть

$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : |f(x,y)| > \alpha/2\}, \quad E_2 = \mathbb{T}^2 \setminus E_1.$$

Имеем

$$4\pi^2\alpha < \|f\|_1 \le \frac{\alpha|E_2|}{2} + |E_1| = \frac{\alpha(4\pi^2 - |E_1|)}{2} + |E_1| = 2\pi^2\alpha + (1-\alpha/2)|E_1|.$$

Отсюда получаем $|E_1| \ge \frac{4\pi^2\alpha}{2-\alpha}$. □

Двойным тригонометрическим полиномом назовем любую сумму вида

$$T(x,y) = \sum_{(n,m)\in G} c_{nm}e^{i(nx+my)},$$

где $G \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторое ограниченное множество. Спектр этого полинома обозначим через

$$\operatorname{spec}(T) = \left\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : c_{nm} \ne 0\right\}.$$

В доказательстве следующей леммы мы пользуемся техникой из работы [8].

Лемма 2.8. *Пусть $p \ge 2$ есть четное число, а S_n, $n = 1, 2, \cdots, \nu = 2^m - 1$,-произвольная последовательность секторов вида (1.5). Тогда существуют двойные тригонометрические полиномы T_n, $n = 1, 2, \cdots, \nu$, такие, что*

$$\operatorname{spec} T_n \subset S_n, \quad n = 1, 2, \cdots, \nu, \tag{2.9}$$

$$\left\|\sum_{j=1}^{\nu} T_j\right\|_p \le c_1, \tag{2.10}$$

$$\left|\left\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{1\le n\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{n} T_j(x,y)\right| > c_3\sqrt{\frac{\log\nu}{p}}\right\}\right| > c_2, \tag{2.11}$$

где $c_i > 0$ суть абсолютные постоянные.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, а σ есть перестановка чисел $\{1, 2, \cdots, \nu = 2^m - 1\}$ из леммы 2.2. Определим полиномы $f_n(x,y)$ и функции

$$g_n(x,y) = \mathbb{I}_{E_n}(x,y)e^{i(p_nx+q_ny)} \tag{2.12}$$

так, чтобы они вместе с множествами $E_n \subset \mathbb{T}^2$ и натуральными числами p_n, q_n удовлетворяли условиям

$$E_n = \left\{(x,y) \in E_{\bar{n}} : (-1)^{j+1}\cos(p_{\bar{n}}x + q_{\bar{n}}y) > 0\right\}, \quad n = 2, 3, \cdots, \nu, \tag{2.13}$$

$$\int_{E_n} |\cos(p_nx + q_ny)|dxdy > \frac{|E_n|}{3}, \quad n = 1, 2, \cdots, \nu, \tag{2.14}$$

$$\operatorname{spec} f_n \subset S_{\sigma^{-1}(n)}, \quad n = 1, 2, \cdots, \nu, \tag{2.15}$$

$$\|f_n - g_n\|_{L^p} < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \cdots, \nu. \tag{2.16}$$

Сделаем это по индукции. Из леммы 2.3 следует

$$\int_E |\cos(px+qy)|dxdy \geq \int_E \cos^2(px+qy)dxdy \to \frac{|E|}{2} \text{ при } |p|,|q| \to \infty. \tag{2.17}$$

Пусть $E_1 = \mathbb{T}^2$. Из (2.17) следует существование чисел p_1 и q_1, такие, что $(p_1, q_1) \in S_{\sigma^{-1}(1)}$ и выполняется (2.14). Отсюда вытекает, что полином $f_1(x,y) = e^{i(p_1x+q_1y)}$ удовлетворяет соотношению (2.15). Условие (2.16) очевидно, так как $f_1(x,y) = g_1(x,y)$. Теперь предположим, что условия (2.13)-(2.16) выполняются при всех $k < n$, и в частности при $\bar{n}$. Определим E_n по равенстве (2.13), а полином u_n таким, чтобы имело место неравенство

$$\|u_n - \mathbb{I}_{E_n}\|_{L^p} < \varepsilon. \tag{2.18}$$

Вновь применив (2.17), можно выбрать числа p_n, q_n, удовлетворяющие условиям (2.14) и (2.15), если определим $f_n(x,y) = u_n(x,y)e^{i(p_nx+q_ny)}$. Из (2.18) следует

$$\|f_n - g_n\|_p = \left\|u_n(x,y)e^{i(p_nx+q_ny)} - \mathbb{I}_{E_n}(x,y)e^{i(p_nx+q_ny)}\right\|_p = \|u_n - \mathbb{I}_{E_n}\|_{L^p} < \varepsilon,$$

что и устанавливает (2.16). Этим заканчивается процесс индукции.

Отметим, что в процессе индукции, на каждом шагу мы имели возможность взять числа $|p_n|, |q_n|$ сколь угодно большими. Используя это, покажем, что системы

$$\phi_k(x,y) = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \cos(p_nx+q_ny)\mathbb{I}_{E_n}(x,y), \quad k = 1,2,\dots,m, \tag{2.19}$$

$$\psi_k(x,y) = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \sin(p_nx+q_ny)\mathbb{I}_{E_n}(x,y), \quad k = 1,2,\dots,m, \tag{2.20}$$

являлись бы (p,ε)-системами. На первом шаге индукции при выборе p_1, q_1 можно было бы требовать, чтобы при любом нечетном натуральном $l \leq p$ имело место неравенство

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2} (\phi_1(x,y))^l dxdy\right|^{1/p} = \left|\int_{\mathbb{T}^2} \cos^l(p_1x+q_1y)\mathbb{I}_{E_1}(x,y)dxdy\right|^{1/p} < \varepsilon,$$

так как при таких l из леммы 2.3 следует

$$\lim_{p,q\to\infty} \int_{\mathbb{T}^2} \cos^l(px+qy)\mathbb{I}_{E_1}(x,y)dxdy = \frac{|E_1|}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2} \cos^l(x+y)dxdy = 0.$$

На (2^k-1)-ом шаге индукции завершается построение функций $\phi_j(x,y)$, $j = 1,2,\dots,k$. Предположим, что полученная система является (p,ε)-системой, т.е.

имеем

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2}\prod_{j=1}^{k}(\phi_j(x,y))^{l_j}\,dxdy\right|^{1/p}<\varepsilon,\quad (l_1,\ldots,l_k)\in A_1(k,p). \tag{2.21}$$

Следующая функция этой системы будет полностью определена на $(2^{k+1}-1)$-ом шаге индукции. Покажем, что в соответствующих шагах числа p_s, q_s, $s = 2^k, 2^k+1,\ldots,2^{k+1}-1$, можно выбрать такими, чтобы кроме условий (2.13)-(2.16) выполнялись также неравенства

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2}\prod_{j=1}^{k+1}(\phi_j(x,y))^{l_j}\,dxdy\right|^{1/p}<\varepsilon$$

при любых

$$(l_1,\ldots,l_k,l_{k+1})\in A_1(k+1,p). \tag{2.22}$$

Действительно, в силу леммы 2.3, имеем

$$\begin{aligned}
&\lim_{p,q\to\infty}\int_{E_s}\cos^{l_{k+1}}(px+qy)\prod_{j=1}^{k}(\phi_j(x,y))^{l_j}\,dxdy\\
&=\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\cos^{l_{k+1}}(x+y)dxdy\cdot\int_{E_s}\prod_{j=1}^{k}(\phi_j(x,y))^{l_j}\,dxdy,\\
&s=2^k,2^k+1,\ldots,2^{k+1}-1.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Из (2.22) следует, что хотя бы одно из чисел $l_1,\ldots,l_k,l_{k+1}$ нечетно. Если это l_{k+1}, то правая часть (2.23) равняется нулю. Если же нечетно одно из чисел $l_1,\ldots,l_k$, то в силу (2.21) получим

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{s=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\cos^{l_{k+1}}(x+y)dxdy\cdot\int_{E_s}\prod_{j=1}^{k}(\phi_j(x,y))^{l_j}\,dxdy\right|\\
&\qquad=\left|\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\cos^{l_{k+1}}(x+y)dxdy\cdot\int_{\mathbb{T}^2}\prod_{j=1}^{k}(\phi_j(x,y))^{l_j}\,dxdy\right|\\
&\qquad\le\left|\int_{\mathbb{T}^2}\prod_{j=1}^{k}(\phi_j(x,y))^{l_j}\,dxdy\right|<\varepsilon^p.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

С учетом (2.23) и (2.24), для достаточно больших p_s, q_s, $s = 2^k, 2^k+1, \dots, 2^{k+1}-1$, будем иметь оценку

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} \prod_{j=1}^{k+1} (\phi_j(x,y))^{l_j} dxdy \right|^{1/p} = \left(\sum_{s=2^k}^{2^{k+1}-1} \int_{E_s} \cos^{l_{k+1}}(p_s x + q_s y) \prod_{j=1}^{k} (\phi_j(x,y))^{l_j} dxdy \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

которая устанавливает, что функции $\phi_j(x,y)$, $j = 1, 2, \dots, k+1$, образуют (p,ε)-систему. Аналогичное можно обеспечить также для системы $\{\psi_j(x,y),\ j = 1, 2, \dots, m\}$. Теперь покажем, что полиномы

$$T_n(x,y) = \frac{f_{\sigma(n)}(x,y)}{\sqrt{mp}}, \quad n = 1, 2, \cdots, \nu = 2^m - 1, \tag{2.25}$$

удовлетворяют условиям леммы. Соотношение (2.9) сразу же следует из (2.15). Легко проверить, что

$$\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \mathbb{I}_{E_n}(x,y) = 1, \text{ п. в. на } \mathbb{T}^2, \quad k = 1, 2, \dots m. \tag{2.26}$$

Отсюда и из (2.19) и (2.20) следует, что $\|\phi_k\|_\infty \le 1$, $\|\psi_k\|_\infty \le 1$. Так как ϕ_k и ψ_k являются $(p,\varepsilon)-$ системами, то в силу леммы 2.6, при достаточно малом ε имеем

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \phi_k(x,y) \right\|_p \le \sqrt{mp/2} + \varepsilon m < \sqrt{pm}, \tag{2.27}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \psi_k(x,y) \right\|_p \le \sqrt{mp/2} + \varepsilon m < \sqrt{pm}. \tag{2.28}$$

Из равенств (2.12), (2.19) и (2.20) вытекает

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\nu} g_n(x,y) \right) = \sum_{k=1}^{m} \phi_n(x,y),$$
$$\mathrm{Im}\left(\sum_{n=1}^{\nu} g_n(x,y) \right) = \sum_{k=1}^{m} \psi_n(x,y).$$

Далее, с учетом (2.16),(2.26) — (2.28), при достаточно малом $\varepsilon > 0$ получаем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\nu} T_n(x,y) \right\|_p = \frac{1}{\sqrt{mp}} \left\| \sum_{n=1}^{\nu} f_n(x,y) \right\|_p < \frac{1}{\sqrt{mp}} \left(\nu\varepsilon + \left\| \sum_{n=1}^{\nu} g_n(x,y) \right\|_p \right)$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{mp}} \left(\nu\varepsilon + \left\| \sum_{k=1}^{m} \phi_n(x,y) \right\|_p + \left\| \sum_{k=1}^{m} \psi_n(x,y) \right\|_p \right) \le \frac{1}{\sqrt{mp}} (\nu\varepsilon + 2\sqrt{pm}) \le c_1,$$

откуда вытекает (2.10). Обозначим

$$v_n(x,y) = \mathrm{Re}(g_n(x,y)) = \cos(p_n x + q_n y)\mathbb{I}_{E_n}(x,y), \quad n = 1, 2, \cdots, \nu = 2^m - 1. \tag{2.29}$$

Из соотношения

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(v_n(x,y)) \subset E_n &= \{(x,y) \in E_{\bar n} : (-1)^{j+1}\cos(p_{\bar n}x + q_{\bar n}y) > 0\} \\ &= \{(x,y) \in E_{\bar n} : (-1)^{j+1} v_{\bar n}(x,y) > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : (-1)^{j+1} v_{\bar n}(x,y) > 0\},\end{aligned}$$

согласно лемме 2.1, следует, что система (2.29) является деревом. Тогда, согласно лемме 2.2, имеем

$$\sup_{1\le l<\nu}\left|\sum_{n=1}^{l} v_{\sigma(n)}(x,y)\right| \ge \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{2^m-1}|v_n(x,y)|.$$

Отсюда и из соотношений (2.26), (2.29) получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^2}\sup_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{n=1}^{l} v_{\sigma(n)}(x,y)\right| dxdy &\ge \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\nu}\int_{E_n}|\cos(p_n x + q_n y)|dxdy \\ &> \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\nu}|E_n| = \frac{4\pi^2 m}{9}.\end{aligned} \tag{2.30}$$

С другой стороны, имеем

$$\sup_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{n=1}^{l} v_{\sigma(n)}(x,y)\right| \le \sum_{n=1}^{\nu}|v_n(x,y)| \le \sum_{n=1}^{\nu}\mathbb{I}_{E_n}(x,y) = m. \tag{2.31}$$

Применив лемму 2.7, из (2.30) и (2.31) легко вытекает, что

$$\left|\left\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{l} v_{\sigma(n)}(x,y)\right| > c_4 m\right\}\right| > c_5 \tag{2.32}$$

для некоторых абсолютных постоянных c_4 и c_5. Из (2.16) следует

$$\left\|\sum_{n=1}^{\nu}|\mathrm{Re}(f_n) - v_n|\right\|_p \le \sum_{n=1}^{\nu}\|\mathrm{Re}(f_n) - \mathrm{Re}(g_n)\|_p \le \sum_{n=1}^{\nu}\|f_n - g_n\|_p < \nu\varepsilon$$

и при достаточно малом $\varepsilon > 0$, мы можем обеспечить

$$\left|\left\{(x,y) \in \mathbb{T}^2 : \sum_{j=1}^{\nu}|\mathrm{Re} f_j - v_j| \ge 1\right\}\right| \le \delta, \tag{2.33}$$

для произвольного $\delta > 0$. Далее имеем

$$\max_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{l} f_{\sigma(j)}\right| \ge \max_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Re}(f_{\sigma(j)})\right| \ge \max_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{l} v_{\sigma(j)}\right| - \sum_{j=1}^{\nu}|\mathrm{Re}(f_j) - v_j|. \tag{2.34}$$

Из (2.32)–(2.34) вытекает

$$\left|\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\max_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{l}f_{\sigma(n)}(x,y)\right|>c_4m-1\right\}\right|$$
$$>\left|\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\max_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{l}v_{\sigma(n)}(x,y)\right|>c_4m\right\}\right|-\delta>c_5-\delta.$$

При достаточно малом $\delta>0$, будем иметь

$$\left|\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\max_{1\le l\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{l}f_{\sigma(n)}(x,y)\right|>c_1m\right\}\right|>c_2.$$

Отсюда и из обозначения (2.25) получаем (2.11). □

Лемма 2.9. *Если $\delta>0$, $m,s\in\mathbb{N}$, а $p\ge 2$ есть некоторое четное число, то существуют последовательность областей Δ_n, $n=0,1,\cdots,\nu=2^m-1$, вида (1.3), и двойные тригонометрические полиномы Q_n, $n=1,2,\cdots,\nu$, такие, что*

(2.35) $$\rho(\Delta_n)<\delta,\quad n=1,2,\cdots,\nu,$$

(2.36) $$\Delta_0=\Delta(s,s),\Delta_{n-1}\subset\Delta_n,\quad n=1,2,\cdots,\nu,$$

(2.37) $$\operatorname{spec}Q_n\subset(\Delta_n\setminus\Delta_{n-1})\cap\mathbb{R}^2_+,\quad n=1,2,\cdots,\nu,$$

(2.38) $$\left\|\sum_{j=1}^{\nu}Q_j\right\|_p\le c_1,$$

(2.39) $$\left|\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2:\max_{1\le n\le\nu}\left|\sum_{j=1}^{n}Q_j(x,y)\right|>c_3\sqrt{\frac{\log\nu}{p}}\right\}\right|>c_2.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность секторов

$$V_n=V\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\varepsilon}{n};\pi\right),\quad n=1,2,\cdots,\nu,$$

вида (1.5) и пусть $S_n=V_n\setminus V_{n-1}$. Применив лемму 2.8, найдем полиномы $T_n(x,y)$ со свойствами (2.9)-(2.11). Имеем

$$\operatorname{spec}(T_n)\subset[-l,0]^2,\quad n=1,2,\cdots,\nu,$$

для некоторого числа $l>s$. Обозначим

$$Q_n(x,y)=T_n(x,y)e^{ilx},\quad \Theta_n=((l,0)+V_n)\cap\mathbb{R}^2_+,\quad n=1,2,\cdots,\nu.$$

Легко усмотреть, что Θ_n есть треугольники вида (1.7), а области

$$\Delta_n = \Theta_n \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (-x,y)\in\Theta_n\}$$
$$\cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (-x,-y)\in\Theta_n\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,-y)\in\Theta_n\}$$

имеют вид (1.3). Очевидно, что при достаточно малом ε выполняется (2.35). Условия (2.36), (2.37) очевидны. Соотношение (2.38) следует из (2.10), а (2.39) из (2.11), если учесть, что

$$\left|\sum_{j=1}^{n} Q_j(x,y)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} T_j(x,y)\right|.$$

Лемма доказана. □

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.1. Последовательно применяя лемму 2.9, можно определить последовательность полиномов $Q_n(x,y)$ и области Δ_n, $n=1,2,\ldots$, вида (1.3), которые удовлетворяют условиям

$$\rho(\Delta_n) < 1/n, \quad n = 1,2,\cdots, \tag{3.1}$$

$$\Delta_{n-1}\subset\Delta_n, \quad n=1,2,\cdots, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{spec} Q_n \subset (\Delta_n\setminus\Delta_{n-1})\cap\mathbb{R}^2_+, \quad n=1,2,\cdots, \tag{3.3}$$

$$\left\|\sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} Q_j\right\|_{2k} < c_1, \quad k=1,2,\ldots, \tag{3.4}$$

$$\left|\left\{(x,y)\in\mathbb{T}^2 : \max_{\nu_k<n\le\nu_{k+1}}\left|\sum_{j=\nu_k+1}^{n} Q_j(x,y)\right| > c_3\sqrt{\frac{\log(\nu_{k+1}-\nu_k)}{2k}}\right\}\right| > c_2, \tag{3.5}$$

где

$$\nu_k = 2^{k^7}. \tag{3.6}$$

Легко усмотреть, что хотя бы одна из следующих последовательностей вещественных полиномов $\mathrm{Re}(Q_n)$ или $\mathrm{Im}(Q_n)$, $n=1,2,\ldots$, удовлетворяет условию (3.5) с постоянными $c_3/2$ и $c_2/2$ в место c_3 и c_2. Обозначим эту последовательность полиномов через $g_n(x,y)$. Каждый из $g_n(x,y)$ можно рассматривать как комплексный полином и более того, из (3.3) следует, что

$$\operatorname{spec} g_n \subset \Delta_n\setminus\Delta_{n-1}, \quad n=1,2,\ldots.$$

Рассмотрим вещественную функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} g_j(n_k x, n_k y). \tag{3.7}$$

Возьмем произвольное целое число $p \geq 2$. Имеем, что

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} g_j(n_k x, n_k y) \in L^\infty(\mathbb{T}^2) \tag{3.8}$$

а также

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\| \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} g_j(n_k x, n_k y) \right\|_p \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\| \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} g_j(n_k x, n_k y) \right\|_{2k} \tag{3.9}$$

$$= \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\| \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} g_j \right\|_{2k} \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left\| \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} Q_j \right\|_{2k} \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{c_1}{k^2} < \infty.$$

Так как в (3.8) и (3.9) число p является произвольным, получим, что $f \in \cap_{p\geq 1} L^p(\mathbb{T}^2)$. Обозначим

$$E_k = \left\{ (x,y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{\nu_k < n \leq \nu_{k+1}} \left| \sum_{j=\nu_k+1}^{n} g_j(x,y) \right| > \frac{c_3}{2} \sqrt{\frac{\log(\nu_{k+1} - \nu_k)}{2k}} \right\},$$

$$\tilde{\Delta}_j = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (u/n_k, v/n_k) \in \Delta_j\}, \quad \nu_k < j \leq \nu_{k+1}.$$

Ясно, что каждая из $\tilde{\Delta}_j$ тоже является областью вида (1.3), из (3.1)-(3.3) следует

$$\rho(\tilde{\Delta}_n) < 1/n, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{3.10}$$

$$\tilde{\Delta}_{n-1} \subset \tilde{\Delta}_n, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{3.11}$$

$$\operatorname{spec}\left(g_n(n_k x, n_k y)\right) \subset \tilde{\Delta}_n \setminus \tilde{\Delta}_{n-1}, \quad \nu_k < n \leq \nu_{k+1}. \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{3.12}$$

а из (3.5) следует, что $|E_k| > c_2/2$. Тогда согласно лемме 2.5, можно определить числа n_k из (3.7) такими, что

$$|\cap_{l\geq 1} \cup_{k\geq l} E_k(n_k)| = 4\pi^2. \tag{3.13}$$

Очевидно, что если $(x,y) \in E_k(n_k)$, то имеем

$$\max_{\nu_k < n \leq \nu_{k+1}} \left| \sum_{j=\nu_k+1}^{n} g_j(n_k x, n_k y) \right| > c_3 \sqrt{\frac{\log(\nu_{k+1} - \nu_k)}{2k}} \geq c_3 \sqrt{\frac{k^7}{2k}} \geq c_4 k^3. \tag{3.14}$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$\left| S_{\tilde{\Delta}_n}(x,y,f) - S_{\tilde{\Delta}_{\nu_k}}(x,y,f) \right| = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{j=\nu_k+1}^{n} g_j(n_k x, n_k y) \right|$$

при $\nu_k < n \le \nu_{k+1}$. Комбинируя последнее с (3.14), мы получим

$$\max_{\nu_k < n \le \nu_{k+1}} \left| S_{\tilde{\Delta}_n}(x,y,f) - S_{\tilde{\Delta}_{\nu_k}}(x,y,f) \right| > c_4 k, \quad (x,y) \in E_k(n_k).$$

С учетом равенства (3.13), мы находим, что суммы $S_{\tilde{\Delta}_n}(x,y,f)$ расходятся почти всюду. □

Доказательство теоремы 1.2. Пусть W_n есть последовательность областей из условия теоремы. Применив лемму 2.8, определим последовательность полиномов $Q_n(x,y)$, которые удовлетворяют условиям

$$\operatorname{spec} Q_n \subset S_n = (W_n \setminus W_{n-1}) \cap \mathbb{R}^2_+, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\left\| \sum_{j=\nu_k+1}^{\nu_{k+1}} Q_j \right\|_{2k} < c_1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\left| \left\{ (x,y) \in \mathbb{T}^2 : \max_{\nu_k < n \le \nu_{k+1}} \left| \sum_{j=\nu_k+1}^{n} Q_j(x,y) \right| > c_3 \sqrt{\frac{\log(\nu_{k+1} - \nu_k)}{2k}} \right\} \right| > c_2,$$

где ν_k есть последовательность (3.7). Продолжение доказательства есть дословное повторение рассуждений доказательства теоремы 1.1. Только вместо Δ_n надо рассматривать W_n и имеем $\tilde{W}_n = W_n$. □

Abstract. In this paper we consider some problems on divergence of triangular and sectoral sums for double trigonometric Fourier series. An example of a function from $\cap_{1 \le p < \infty} L^p$ with almost everywhere divergence triangular partial sums of double trigonometric Fourier series is constructed.

Список литературы

[1] N. Yu. Antonov, "Convergence of Fourier series", East Journal on Approximation, **2**, no. 2, 187 – 196 (1996).

[2] Н. К. Бари, Тригонометрические Ряды, Москва, Физматгиз (1961).

[3] L. Carleson, "On the convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math., **116**, 135 – 137 (1966).

[4] Ch. Fefferman, "On the convergence of multiple Fourier series", Bull. Amer. Math. Soc., **77**, no. 5, 744 – 745 (1971).

[5] Ch. Fefferman, "On the divergence of multiple Fourier series", Bull. Amer. Math. Soc., **77**, no. 2, 191 – 195 (1971).

[6] A. Hunt, "On the convergence of Fourier series, Orthogonal expansions and continuous analogous", Proc. Conf. Southern Inninois Univ. Edvardsville, 235 – 255 (1968).

[7] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория Ортогональных Рядов, Москва, Физматгиз (1958).

[8] G. A. Karagulyan, "On unboundedness of maximal operators for directional Hilbert transforms", Proc. Amer. Math. Soc., **135**, no. 10, 3133 – 3141 (2007).

[9] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные Ряды, Москва, Наука (1984).

[10] P. Sjölin, "Convergence almost everywhere certain singular integrals and multiple Fourier series", Arkiv för Mat., **9**, 65 – 90 (1971).

[11] Н. Р. Тевзадзе, "О сходимости двойного ряда Фурье функции интегрируемой с квадратом", Сообщения АН Груз. ССР, **58**, no. 2, 277 – 279 (1970).

[12] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, т. 1, Москва, Мир (1965).

Поступила 11 апреля 2014