

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ИЗ L_2 ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Ж. ДУМАНЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: duman@ysu.am

Аннотация. Рассматриваются задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$ для общего эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_2 . В предыдущих работах автора при естественных ограничениях на коэффициенты уравнения получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$ -мерно непрерывного решения исследуемой задачи. Эти условия сформулированы в терминах вспомогательного операторного уравнения в специальном гильбертовом пространстве и трудно проверяемые. В настоящей работе для несколько более узкого класса правых частей получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в терминах исходной задачи. При этом установлено, что если дополнительно потребовать принадлежность граничной функции пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$, то полученные условия переходят в условия разрешимости в $W_2^1(Q)$.

MSC2010 numbers: 35J25.

Ключевые слова: задача Дирихле; эллиптическое уравнение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе исследуется разрешимость задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

(1.1)

$$\mathcal{L}u \equiv -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - \operatorname{div}F(x), \quad x \in Q,$$

(1.2)

$$u|_{\partial Q} = u_0,$$

с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$.

Предполагается, что функции f и $F = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат $L_{2,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{ij}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$(1.3) \quad \gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = (\xi, A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2$$

для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R_n$ и почти всех $x \in Q$ с положительной постоянной γ , а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными функциями в каждой строго внутренней подобласти области Q .

В предыдущих работах автора получены условия разрешимости задачи (1.1), (1.2), которые сформулированы в терминах вспомогательного операторного уравнения в специальном гильбертовом пространстве и трудно проверяемые. В настоящей работе для несколько более узкого класса правых частей получены условия разрешимости исследуемой задачи в терминах исходной задачи. Результаты настоящей работы анонсированы в [1].

Под решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию u из $W_{2,loc}^1(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в смысле обобщенных функций, т.е. для всех финитных и бесконечно дифференцируемых функций $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q (A(x) \nabla u + \bar{c}(x) u, \nabla \eta) dx + \int_Q ((\bar{b}(x), \nabla u) + d(x) u) \eta dx = \int_Q (f \eta + (F, \nabla \eta)) dx,$$

и удовлетворяющую условию (1.2) в следующем смысле:

для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$(1.4) \quad \int_{V_{x^0}} (u(x + \delta \bar{\nu}(x^0)) - u_0(x))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0,$$

где $\bar{\nu}(x^0)$ - единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x^0 .

Понятие решения из $W_{2,loc}^1(Q)$ было введено в случае области с дважды гладкой границей В. П. Михайловым в работах [2], [3] (см. также [4] - [6]), где принятие решением своего граничного значения понималось в следующем смысле

$$\int_{\partial Q} (u(x + \delta \bar{\nu}(x)) - u_0(x))^2 ds \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow +0.$$

Случай области с Ляпуновской границей был изучен в работах [7] и [8].

Свойство $(n-1)$ -мерной непрерывности решения и однозначная разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$ для уравнения без младших членов ($b_i = 0, c_i = 0, d = 0$) с $f \in W_2^{-1}(F = 0)$ были установлены в работе [9]. При этом предполагалось, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к ∂Q удовлетворяет условию Дини:

$$(1.5) \quad |\bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех $x, y \in \partial Q$, где ω — такая монотонная функция, что $\int_0^{\omega(t)} \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty$, а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дири на границе:

$$(1.6) \quad |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x - y|)$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i, j = 1, \dots, n$. Не ограничивая общности можно считать, что функция ω в условиях (1.5) и (1.6) одна и та же.

В работе [10] было показано, что приведенный выше результат остается справедливым для правых частей из более широкого класса, а именно, если

$$(1.7) \quad r^{\frac{3}{2}}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} f(x) \in L_2(Q),$$

$$(1.8) \quad r^{\frac{1}{2}}(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}} F(x) \in (L_2(Q))^n,$$

где $r(x)$ расстояние от точки $x \in Q$ до ∂Q .

Далее мы также будем предполагать условия (1.5) - (1.8) выполненными. Случай задачи Дирихле с граничной функцией из $L_p(\partial Q)$ для уравнения без младших членов исследован в работах [11] - [13]. Понятие $(n-1)$ -мерной непрерывности было предложено А. К. Гуциным в работе [9] и заключается в следующем.

Пусть μ — неотрицательная, борелевская мера в R_n с носителем в $\bar{Q}$, удовлетворяющая следующему условию. Существует такая постоянная $C = C(\mu)$, что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $B_r(x^0)$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа $C r^{n-1}$:

$$(1.9) \quad \mu(B_r(x^0)) \leq C r^{n-1} \quad \text{для всех } r > 0 \text{ и } x^0 \in \bar{Q}.$$

Наименьшую из таких постоянных C будем называть нормой μ и обозначать через $\|\mu\|$. Пространство Гуцина $(n-1)$ -мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\bar{Q})$ является пополнением пространства непрерывных в $\bar{Q}$ функций по норме

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} = \sup \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int_{\bar{Q}} u^2(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где точная верхняя грань берется по всем удовлетворяющим условию (1.9) мерам μ . Очевидно, что $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$. Функции из $C_{n-1}(\bar{Q})$ имеют следы на множествах положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, а множество следов на

гладкой $(n-1)$ -мерной поверхности $\Gamma \subset \bar{Q}$ всех функций из $C_{n-1}(\bar{Q})$ совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Определение $(n-1)$ -мерной непрерывности можно дать и в терминах близости значений функции на близких мерах (подробнее см. [9]).

В работе [14] (см. также [15], [16]) было установлено, что решение задачи (1.1), (1.2) (если оно существует) обладает свойством $(n-1)$ -мерной непрерывности, т.е. принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$. При этом предполагалось, что коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$ и $d(x)$ локально ограничены и для них справедливы следующие оценки: существует постоянная $K > 0$, такая что

$$(1.10) \quad |\bar{b}(x)| \leq \frac{K}{r(x)(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q,$$

$$(1.11) \quad \int_0^t (1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} C^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } C(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |\bar{c}(x)|,$$

$$(1.12) \quad \int_0^t (1 + |\ln t|)^{\frac{3}{2}} D^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } D(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|.$$

Однако разрешимость изучаемой задачи с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$ была известна только при жестких условиях на гладкость коэффициентов.

Далее, при тех же условиях (1.10) - (1.12), в терминах скалярного произведения в специальном гильбертовом пространстве в работе [17] (см. также [18]) получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$ -мерно непрерывного решения задачи (1.1), (1.2) и установлено, что условия разрешимости исследуемой задачи имеют вид, аналогичный условиям разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W_2^1(Q)$).

2. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для формулировки и доказательства основного результата настоящей работы нам потребуется описать схему исследования и привести некоторые результаты работы [17].

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим задачи Дирихле:

$$(2.1) \quad \mathcal{L}_0 v \equiv -\operatorname{div}(A \nabla v) = 0$$

$$(2.2) \quad v|_{\partial Q} = u_0$$

$$(2.3) \quad \mathcal{L}_0 w = -(\bar{b}, \nabla w) + \operatorname{div}(\bar{c}w) - dw - (\bar{b}, \nabla v) + \operatorname{div}(\bar{c}v) - dv + f - \operatorname{div} F$$

$$(2.4) \quad w|_{\partial Q} = 0,$$

где функция v в правой части уравнения (2.3) есть решение задачи (2.1), (2.2). Очевидна справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.1. Пусть функция v является решением задачи (2.1), (2.2). Тогда для того чтобы функция u являлась решением задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась бы решением задачи (2.3), (2.4).

Задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [9]), решение принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для нее справедлива следующая оценка

$$\|v\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla v|^2 dx \leq \operatorname{const} \|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2$$

с независимой от u_0 постоянной. Следовательно, в силу утверждения 2.1, задача (1.1), (1.2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (2.3), (2.4) с v , являющейся решением задачи (2.1), (2.2). Введем следующие пространства:

$$\mathcal{U}(Q) \equiv \left\{ u \in W_{2,loc}^1(Q) \cap C_{n-1}(\bar{Q}) : \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

$$\|u\|_{\mathcal{U}(Q)}^2 = \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx, \quad \mathring{\mathcal{U}}(Q) \equiv \left\{ u \in \mathcal{U}(Q), u|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

Следуя [10], обозначим через $\mathring{H}_1(Q)$ пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathring{H}_1(Q)} = \int_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r(1 + |\ln r|)^{3/2}} dx,$$

а через $\mathring{H}(Q)$ – пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением $(u, v)_{\mathring{H}(Q)} = \int_Q \left(r(1 + |\ln r|)^{1/2} (\nabla u, \nabla v) + \frac{u \cdot v}{r(1 + |\ln r|)^{1/2}} \right) dx$.

Напомним, что $r = r(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q . Имеют место следующие вложения $\mathring{H}_1(Q) \subset \mathring{W}_2^1(Q) \subset \mathring{H}(Q) \subset \mathring{\mathcal{U}}(Q)$, см. [17].

Так как решение задачи (1.1), (1.2) и решение задачи (2.1), (2.2) принадлежат пространству $\mathcal{U}(Q)$, см. [9], [14], то из утверждения 2.1 вытекает, что решение w задачи (2.3), (2.4) принадлежит пространству $\mathring{\mathcal{U}}(Q)$.

Рассмотрим оператор $Tu = -(\bar{b}, \nabla u) + \operatorname{div}(\bar{c}u) - du$ из правой части уравнения (2.3). Имеет место следующее утверждение, см. [17].

Лемма 2.1. Пусть $\partial Q \in C^1$ и пусть выполнены условия (1.10) - (1.12). Тогда оператор T является линейным и ограниченным оператором из $\mathcal{U}(Q)$ в $[\dot{H}_1(Q)]^*$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$.

В [10] установлено, что для любой правой части $g' \in [\dot{H}_1(Q)]^*$ существует и единственно решение из $W_{2,loc}^1(Q)$ задачи

$$(2.5) \quad -\operatorname{div}(A\nabla u) = g', \quad u|_{\partial Q} = 0;$$

это решение принадлежит пространству $\dot{H}(Q)$ и имеет место оценка $\|u\|_{\dot{H}(Q)} \leq C\|g'\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*}$ с независимой от g' постоянной. Следовательно, если через $\mathcal{L}_0^{-1}$ обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части g' решение u задачи (2.5), то $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $[\dot{H}_1(Q)]^*$ в $\dot{H}(Q)$. Кроме того, как хорошо известно (см. например [19]), оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\dot{W}_2^{-1}(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$. Таким образом, из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.2. $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором из $\mathcal{U}(Q)$ в $\dot{H}(Q)$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$.

Пусть w является решением задачи (2.3), (2.4). Так как $f, \operatorname{div}F \in [\dot{H}_1(Q)]^*$, см. [9], то нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения $w = \mathcal{L}_0^{-1}Tw + \mathcal{L}_0^{-1}Tv + \mathcal{L}_0^{-1}(f - \operatorname{div}F)$ в пространстве $\dot{\mathcal{U}}(Q)$, где $v \in \mathcal{U}(Q)$ — решение задачи (2.1), (2.2). С другой стороны, если функция w из пространства $\dot{\mathcal{U}}(Q)$ является решением операторного уравнения $w = \mathcal{L}_0^{-1}(Tw + Tv + f - \operatorname{div}F)$, то w является также решением задачи (2.3), (2.4). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.2. w является решением задачи (2.3), (2.4) тогда и только тогда, когда w является решением операторного уравнения:

$$(2.6) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = \mathcal{L}_0^{-1}g, \quad w \in \dot{\mathcal{U}}(Q),$$

с $g = Tv + f - \operatorname{div}F$, где $v \in \mathcal{U}(Q)$ — решение задачи (2.1), (2.2).

Далее, наряду с уравнением (2.6) рассмотрим соответствующее операторное уравнение в пространстве $\dot{H}(Q)$:

$$(2.7) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1} T w = h, \quad w \in \dot{H}(Q)$$

с $h \in \dot{H}(Q)$. Из леммы 2.2 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.3. Пусть w является решением операторного уравнения (2.6) в $\dot{U}(Q)$ с $g \in [\dot{H}_1(Q)]^*$. Тогда w является решением операторного уравнения (2.7) в $\dot{H}(Q)$ с $h = \mathcal{L}_0^{-1} g$.

Объединяя утверждения 2.2 и 2.3, получаем нижеследующий результат.

Утверждение 2.4. Для того чтобы функция w являлась решением задачи (2.3), (2.4), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (2.7) в пространстве $\dot{H}(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)$, где v – решение задачи (2.1), (2.2).

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0^{-1} T$ в гильбертовых пространствах $\dot{H}(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$. Нижеследующий результат был доказан в [17].

Теорема 2.1. $\mathcal{L}_0^{-1} T$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $\dot{H}(Q)$ в $\dot{H}(Q)$ и из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^1(Q)$. При этом, отвечающие характеристическому числу 1 собственные подпространства оператора $\mathcal{L}_0^{-1} T$ в пространствах $\dot{H}(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$ совпадают: $\operatorname{Ker}_{\dot{W}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1} T) = \operatorname{Ker}_{\dot{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1} T)$, здесь I – тождественный оператор.

Из теоремы 2.1 следует, что спектры оператора $\mathcal{L}_0^{-1} T$ в пространствах $\dot{H}(Q)$ и $\dot{W}_2^1(Q)$ совпадают и что его собственные функции из $\dot{H}(Q)$ принадлежат пространству $\dot{W}_2^1(Q)$. Таким образом, изучение разрешимости задачи (1.1), (1.2) сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (2.7) в гильбертовом пространстве $\dot{H}(Q)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1} T$. В силу теоремы Фредгольма, пространство решений однородной задачи

$$(2.8) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1} T w = 0, \quad w \in \dot{H}(Q)$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи

$$(2.9) \quad w^* - (\mathcal{L}_0^{-1} T)^* w^* = 0, \quad w^* \in \dot{H}(Q)$$

и для разрешимости операторного уравнения (2.7) в пространстве $\dot{H}(Q)$ необходимо и достаточно условие ортогональности правой части h подпространству решений сопряженной однородной задачи (2.9). В частности, операторное уравнение (2.7) в пространстве $\dot{H}(Q)$ имеет решение при любой h из $\dot{H}(Q)$, если однородная задача (2.8) имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Таким образом, из леммы 2.1 и утверждения 2.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.5. *Пространство решений однородной задачи (2.8) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи (2.9). Любое решение однородной задачи (2.8) принадлежит $W_2^1(Q)$. Для того чтобы задача (2.3), (2.4) имела бы решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной задачи (2.9) выполнялось условие*

$$(2.10) \quad (\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F), w^*)_{\dot{H}(Q)} = 0$$

где v — решение задачи (2.1), (2.2).

При этом существует единственное решение $w(x)$ задачи (2.3), (2.4), ортогональное (в $\dot{H}(Q)$) всем решениям однородной задачи (2.8) и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{\dot{H}(Q)} \leq C \left(\|v\|_{u(Q)} + \|f\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} + \|\operatorname{div} F\|_{[\dot{H}_1(Q)]^*} \right)$$

с независимой от v, f и F постоянной.

И наконец, исходя из вышеизложенного, сформулируем основной результат работы [17].

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия (1.3), (1.5) - (1.8), (1.10) - (1.12) и $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Тогда для того чтобы задача (1.1), (1.2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной задачи (2.9) выполнялось условие (2.10), где v — решение задачи (2.1), (2.2) с той же функцией u_0 .*

Решение задачи (1.1), (1.2) принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$. При этом существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) вида $u = v + w$, где w — решение задачи (2.3), (2.4) ортогональное в $\dot{H}(Q)$ всем решениям однородной задачи (2.8). Для этого решения справедлива оценка

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \operatorname{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \right.$$

$$(2.11) \quad + \int_Q r^3(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} f^2(x) dx + \int_Q r(x) (1 + |\ln r(x)|)^{3/2} |F(x)|^2 dx),$$

с независимой от u_0 , f и F постоянной.

Если однородная задача $\mathcal{L}u = 0$, $u|_{\partial Q} = 0$, в $W_2^1(Q)$ -постановке имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной задачи (1.1), (1.2) в $W_{2,loc}^1(Q)$ -постановке существует при всех u_0 , f , F . Решение единственно и удовлетворяет неравенству (2.11).

3. ФОРМУЛИРОВКИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Покажем далее, что при естественных дополнительных ограничениях на коэффициенты при младших членах уравнения, для правых частей из $W_2^{-1}(Q)$ условие (2.10) можно записать в более простом виде — в терминах исходной задачи и, при этом, если граничная функция допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q , то решение из $C_{n-1}(\bar{Q})$ является решением из $W_2^1(Q)$. Итак, пусть коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$, $d(x)$ локально ограничены и удовлетворяют условиям:

$$(3.1) \quad \int_0^\infty B^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } B(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |\bar{b}(x)|,$$

$$(3.2) \quad \int_0^\infty C^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } C(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |\bar{c}(x)|,$$

$$(3.3) \quad \int_0^\infty t^2 D^2(t) dt < \infty, \quad \text{где } D(t) \equiv \sup_{r(x) \geq t} |d(x)|,$$

а функции f и F в правой части уравнения (1.1) удовлетворяют условию

$$(3.4) \quad f \in L_2(Q), \quad F \in (L_2(Q))^n,$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $\partial Q \in C^1$ и пусть выполнены условия (3.1) – (3.4). Тогда оператор T является линейным и ограниченным оператором из $\mathcal{U}(Q)$ в $W_2^{0,-1}(Q)$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in \partial Q$ произвольная точка границы ∂Q области Q . Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0 , а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0 . Поскольку граница

области гладкая ($\partial Q \in C^1$), то существует $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1(R_{n-1})$, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \nabla \varphi_{x^0}(0) = 0 \text{ и } |\nabla \varphi_{x^0}(x')| \leq \frac{1}{2} \text{ для всех } x' \in R_{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром $U_{x^0}^{(r_{x^0})} = \{x : |x - x^0| < r_{x^0}\}$ радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n > \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Тогда получаем

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \{(x', x_n) : x_n = \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Положим $\ell_{x^0} = \frac{r_{x^0}}{\sqrt{2}}$ и из покрытия $\{U_{x^0}^{(\ell_{x^0})}, x^0 \in \partial Q\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие $U_{x^m}^{(\ell_{x^m})}, m = 1, \dots, p$. Обозначим $U_m = U_{x^m}^{(r_{x^m})}$, $r_m = r_{x^m}$, $\ell_m = \ell_{x^m}$, $\varphi_m = \varphi_{x^m}$, где $m = 1, \dots, p$. Пусть $h = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \min(r_1, \dots, r_p)$. Тогда каждый из криволинейных "цилиндров"

$$P_m^{\ell_m, h} = \{(x', x_n) : |x'| < \ell_m, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\}, m = 1, \dots, p,$$

лежит в соответствующем шаре U_m , также как и в $U_m \cap Q$.

Пусть $\ell_0 < h$ такое положительное число, что дополнение в Q области

$$Q_{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) > \ell_0\}$$

содержится в объединении "цилиндров" $P_m^{\ell_m, h}, m = 1, \dots, p$:

$$Q^{\ell_0} = \{x \in Q : r(x) = \text{dist}(x, \partial Q) \leq \ell_0\} \subset \bigcup_{m=1}^p P_m^{\ell_m, h}.$$

Легко видеть, что для всех $x = (x', x_n) \in P_m^{\ell_m, h}, m = 1, \dots, p$, имеем

$$r(x) \leq x_n - \varphi_m(x') \leq \frac{\sqrt{5}}{2} r(x).$$

Зафиксируем некоторый номер $m, 1 \leq m \leq p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m . В дальнейшем зависимость функции φ_m от номера m отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$.

Определим отображение $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}$ пространства R_n на себя соотношениями

$$\mathcal{L}(x) = (x', x_n - \varphi(x')), x = (x', x_n) \text{ и } \mathcal{L}_{-1}(y) = (y', y_n + \varphi(y')), y = (y', y_n).$$

Обозначим

$$\mathcal{L}(P_m^{\ell_m, h}) = \tilde{P}_m^{\ell_m, h}, w(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{w}(y), \eta(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{\eta}(y).$$

Возьмем произвольные $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$. Рассмотрим

$$\langle Tu, \eta \rangle \equiv - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla \eta(x)) dx - \int_Q d(x) u(x) \eta(x) dx.$$

Из (3.1) имеем $B(t) \leq \frac{\text{const}}{t^{1/2}}$ и

$$\begin{aligned} \left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| &\leq \int_Q |\bar{b}(x)| |\nabla u(x)| |\eta(x)| dx \leq \left(\int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \times \\ &\times \left(\int_Q \frac{B^2(r(x))}{r(x)} \eta^2(x) dx \right)^{1/2} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство Харди, получаем

$$\begin{aligned} \int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx &\leq \int_{Q_0} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \leq \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} \frac{\tilde{\eta}^2(y)}{y_n^2} dy = \frac{1}{\ell_0^3} \int_Q \eta^2(x) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_0^h dy_n \int_{|y'| < \ell_m} \frac{\left(\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau \right)^2}{y_n^2} dy' \leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \\ &+ \sum_{m=1}^p \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \left(\frac{\int_0^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y', \tau) d\tau}{y_n} \right)^2 dy_n \leq \\ &\leq \text{const} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{|y'| < \ell_m} dy' \int_0^h \tilde{\eta}_{y_n}^2(y', y_n) dy_n \right) \leq \\ (3.5) \quad &\leq \left(\int_Q |\nabla \eta|^2 dx + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} |\nabla \tilde{\eta}(y)|^2 dy \right) \leq \text{const} \int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(3.6) \quad \left| \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) \eta(x) dx \right| \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η . В силу (3.2) получаем

$$\begin{aligned}
 \left| \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| &\leq \int_Q C(r(x))|u(x)||\nabla \eta(x)| dx \leq \left(\int_Q C^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \times \\
 &\times \left(\int_Q |\nabla \eta(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \text{const} \left(\int_Q C^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(C^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} C^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h}} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right) dy_n \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \times \\
 &\times \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},
 \end{aligned}$$

Далее, в силу вложения $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$, имеем

$$(3.7) \quad \left| \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla \eta(x)) dx \right| \leq \text{const} \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{u(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η .

В силу (3.3) и (3.5), аналогично предыдущим оценкам, получаем

$$\begin{aligned}
 \left| \int_Q d(x)u(x)\eta(x) dx \right| &\leq \int_Q D(r(x))|u(x)||\eta(x)| dx \leq \\
 &\leq \left(\int_Q r^2(x)D^2(r(x))u^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)} dx \right)^{1/2} \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \text{const} \left(\int_Q r^2(x) D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(D^2(\ell_0) \int_{Q_{\ell_0}} r^2(x) u^2(x) dx + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} r^2(x) D^2(r(x)) u^2(x) dx \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \left(D^2(\ell_0) \max_{x \in Q_{\ell_0}} r^2(x) \int_{Q_{\ell_0}} u^2(x) dx + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{m=1}^p \int_{\Pi_m^{\ell_m, h}} y_n^2 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) \tilde{u}^2(y', y_n) dy' dy_n \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
 &\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \int_0^h y_n^2 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}} y_n\right) dy_n \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \times \\
 &\quad \times \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \sum_{m=1}^p \max_{0 \leq y_n \leq h} \int_{|y'| < \ell_m} \tilde{u}^2(y', y_n) dy' \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \\
 (3.8) \quad &\leq \text{const} \left(\|u\|_{L_2(Q)}^2 + \|u\|_{C_{n-1}(Q)}^2 \right)^{1/2} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)} \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)},
 \end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u и η .

Таким образом, из (3.6) - (3.8) получаем, что для произвольных $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$ имеет место оценка $|\langle Tu, \eta \rangle| \leq \text{const} \|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \|\eta\|_{\dot{W}_2^1(Q)}$ с независимой от u и η постоянной. Так как функции η из $C_0^\infty(Q)$ всюду плотны в $\dot{W}_2^1(Q)$, то из полученной оценки немедленно вытекает ограниченность оператора $T: \mathcal{U}(Q) \rightarrow \dot{W}_2^{-1}(Q)$. Лемма 3.1 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Очевидно, что в формулировке леммы 3.1 условие (3.1) можно заменить условием

$$|\bar{b}(x)| \leq \frac{\text{const}}{r^{1/2}(x)}, \quad x \in Q.$$

Так как при выполнении условий (3.1) - (3.3) оператор T является вполне непрерывным оператором из $\dot{W}_2^1(Q)$ в $\dot{W}_2^{-1}(Q)$, см. [20], то из леммы 3.1 получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. $\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ и является вполне непрерывным оператором, действующим из пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ в $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$.

Из (3.4) очевидно, что $f - \operatorname{div} F \in \overset{\circ}{W}_2^{-1}(Q)$. Так как $v \in \mathcal{U}(Q)$ то, в силу леммы 3.1, $Tv \in \overset{\circ}{W}_2^{-1}(Q)$. Таким образом, $g = Tv + f - \operatorname{div} F \in \overset{\circ}{W}_2^{-1}(Q)$. Далее, наряду с уравнением (2.6) рассмотрим соответствующее уравнение в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$:

$$(3.9) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \quad w \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q).$$

Из леммы 3.1 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.1. Пусть w является решением операторного уравнения (2.6) в $\overset{\circ}{U}(Q)$ с $g \in \overset{\circ}{W}_2^{-1}(Q)$. Тогда w является решением операторного уравнения (3.9) в $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ с $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.

Объединяя утверждения 2.2 и 3.1, получаем следующий результат.

Утверждение 3.2. Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) - (3.3). Для того, чтобы функция w являлась решением задачи (2.3), (2.4), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась бы решением операторного уравнения (3.9) в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div} F)$, где v - решение задачи (2.1), (2.2).

Таким образом, изучение разрешимости задачи Дирихле (1.1), (1.2) в $C_{n-1}(\bar{Q})$ -постановке сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (3.9) в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма, пространство решений соответствующего (3.9) однородного уравнения

$$(3.10) \quad w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \quad w \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q),$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородного сопряженного уравнения

$$(3.11) \quad w^* - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*w^* = 0, \quad w^* \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q),$$

где $(\mathcal{L}_0^{-1}T)^*$ - сопряженный (в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$) к $\mathcal{L}_0^{-1}T$ оператор, и для разрешимости операторного уравнения (3.9) в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ необходимо

и достаточно условие ортогональности правой части h подпространству решений однородного сопряженного уравнения (3.11).

В частности, операторное уравнение (3.9) в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ имеет решение при любой h из $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, если однородное уравнение (3.10) в $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Таким образом, условия разрешимости в $C_{n-1}(\bar{Q})$ исследуемой задачи можно записать в терминах скалярного произведения в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, что позволяет сформулировать эти условия в терминах исходной задачи.

Определим в $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ скалярное произведение

$$(3.12) \quad (u, v)'_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} = \int_Q (A(x) \nabla u(x), \nabla v) dx \equiv \langle \mathcal{L}_0 u, v \rangle,$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(u, v)_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} = \int_Q (uv + (\nabla u(x), \nabla v)) dx.$$

При таком скалярном произведении в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ сопряженный к $\mathcal{L}_0^{-1}T$ оператор $(\mathcal{L}_0^{-1}T)^*$ имеет следующий вид

$$(3.13) \quad (\mathcal{L}_0^{-1}T)^* = \mathcal{L}_0^{-1}T_{L_2}^*,$$

где через $T_{L_2}^*$ обозначен оператор ("сопряженный к оператору T в L_2 "):

$$T_{L_2}^* u = -(\bar{c}, \nabla u) + \operatorname{div}(\bar{b}u) - du, \quad u \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q).$$

Действительно, в силу (3.12) имеем

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0^{-1}T u, v)'_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} &= \langle \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0^{-1}T u), v \rangle = \langle T u, v \rangle = \\ &= - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x)) v(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x) u(x), \nabla v(x)) dx - \int_Q d(x) u(x) v(x) dx = \\ &= - \int_Q (\bar{c}(x), \nabla v(x)) u(x) dx - \int_Q (\bar{b}(x) v(x), \nabla u(x)) dx - \int_Q d(x) v(x) u(x) dx = \\ &= \langle T_{L_2}^* v, u \rangle = (\mathcal{L}_0^{-1}T_{L_2}^* v, u)'_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)}. \end{aligned}$$

Заметим, что оператор $T_{L_2}^*$ обладает теми же свойствами, что и оператор T .

С учетом (3.13), сопряженное к (3.10) однородное уравнение (3.11) запишется в следующем виде

$$(3.14) \quad w^* - \mathcal{L}_0^{-1}T_{L_2}^* w^* = 0, \quad w^* \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q),$$

а это означает, что w^* является решением из $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ соответствующей (2.3), (2.4) однородной сопряженной задачи Дирихле

$$(3.15) \quad -\operatorname{div}(A(x)\nabla w^*) + (\bar{c}(x), \nabla w^*) - \operatorname{div}(\bar{b}(x)w^*) + d(x)w^* = 0, \quad x \in Q,$$

$$(3.16) \quad w^*|_{\partial Q} = 0,$$

Из вышеизложенного и утверждения 3.2 вытекает следующий результат.

Утверждение 3.3. Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) - (3.3). Тогда пространство решений (из $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$) однородной сопряженной задачи (3.15), (3.16) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной задачи

$$(3.17) \quad -\operatorname{div}(A(x)\nabla w) + (\bar{b}(x), \nabla w) - \operatorname{div}(\bar{c}(x)w) + d(x)w = 0, \quad x \in Q,$$

$$(3.18) \quad w|_{\partial Q} = 0.$$

Для того чтобы задача (2.3), (2.4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной сопряженной задачи (3.15), (3.16), выполнялось условие

$$(3.19) \quad (\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div}F), w^*)'_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} = 0,$$

где v - решение задачи (2.1), (2.2).

При этом существует единственное решение $w(x)$ задачи (2.3), (2.4), ортогональное (в скалярном произведении $(\cdot, \cdot)'_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)}$) всем решениям однородной задачи (3.17), (3.18), и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} \leq C (\|v\|_{U(Q)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \|F\|_{L_2(Q)}),$$

с независимой от v, f и F постоянной.

Учитывая (3.12), условие (3.19) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \operatorname{div}F), w^*)'_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} = \langle (Tv + f - \operatorname{div}F), w^* \rangle = \\ & = - \int_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w^*(x) dx - \int_Q (\bar{c}(x)v(x), \nabla w^*(x)) dx - \int_Q d(x)v(x)w^*(x) dx + \\ & \quad + \int_Q f(x)w^*(x) dx + \int_Q (F(x), \nabla w^*(x)) dx = 0, \text{ т. е.} \\ & \int_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w^*(x) dx + \int_Q (\bar{c}(x)v(x), \nabla w^*(x)) dx + \int_Q d(x)v(x)w^*(x) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_Q f(x) w^*(x) dx + \int_Q (F(x), \nabla w^*(x)) dx.$$

Таким образом, объединяя вышеизложенные утверждения, для рассматриваемого случая теорему о разрешимости в $C_{n-1}(\bar{Q})$ задачи (1.1), (1.2) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.2. Пусть $\partial Q \in C^1$, выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) - (3.3) и пусть $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Тогда для того, чтобы при $f \in L_2(Q)$, $F \in (L_2(Q))^n$ задача (1.1), (1.2) в $C_{n-1}(\bar{Q})$ -постановке имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функции f , F удовлетворяли условию

$$(3.20) \quad \int_Q f(x) w_k^*(x) dx + \int_Q (F(x), \nabla w_k^*(x)) dx =$$

$$\int_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w_k^*(x) dx + \int_Q (\bar{c}(x) v(x), \nabla w_k^*(x)) dx + \int_Q d(x) v(x) w_k^*(x) dx, \quad k = 1, \dots, p,$$

где v - решение задачи (2.1), (2.2), а $w_k^*(x)$, $k = 1, 2, \dots, p$, - функции из $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$, образующие базис в пространстве решений однородной сопряженной задачи (3.15), (3.16). При этом, существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) вида

$$(3.21) \quad u = v + w,$$

где w - решение задачи (2.3), (2.4), ортогональное в $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ (в скалярном произведении $(\cdot, \cdot)'_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)}$) всем решениям однородной задачи (3.17), (3.18). Для этого решения справедлива оценка

$$(3.22) \quad \|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}^2 + \int_Q r(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)}^2 + \int_Q f^2(x) dx + \int_Q |F(x)|^2 dx \right),$$

с независимой от u_0 , f и F постоянной. Любое другое решение задачи (1.1), (1.2) получается добавлением к функции u и некоторого решения однородной задачи (3.17), (3.18).

Доказательство. Учитывая вышеизложенное, для доказательства теоремы достаточно установить справедливость оценки (3.22). Пусть u - решение (единственное) задачи (1.1), (1.2) вида $u = v + w$, где v - решение задачи (2.1), (2.2),

а w – решение задачи (2.3), (2.4) ортогональное в $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$ всем решениям однородной задачи (3.17), (3.18), т. е. однородного уравнения (3.10). Тогда

$$\begin{aligned} \|u\|_{u(Q)} &\leq \|v\|_{u(Q)} + \|w\|_{u(Q)} \leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|w\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} \right) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - \text{div} F)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} \right) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|f\|_{\overset{\circ}{W}_2^{-1}(Q)} + \|\text{div} F\|_{\overset{\circ}{W}_2^{-1}(Q)} \right) \leq \\ &\leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \left(\int_Q f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_Q |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right), \end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u_0, f, F . $\square$

Рассмотрим случай когда граничная функция u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q . Тогда решение v задачи (2.1), (2.2) принадлежит пространству $W_2^1(Q)$. Так как любое решение задачи (1.1), (1.2) представляется в виде суммы решения задачи (2.1), (2.2) (принадлежащее $W_2^1(Q)$) и решения задачи (2.3), (2.4) (принадлежащее $\overset{\circ}{W}_2^1(Q)$), то решение задачи (1.1), (1.2) также принадлежит пространству $W_2^1(Q)$ и для единственного решения u вида (3.21) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^1(Q)} &\leq \|v\|_{W_2^1(Q)} + \|w\|_{W_2^1(Q)} \leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|w\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(Q)} \right) \leq \\ (3.23) \quad &\leq \text{const} \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \left(\int_Q f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_Q |F(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right), \end{aligned}$$

где постоянная не зависит от u_0, f, F . Таким образом, если u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q , то условие (3.20) является необходимым и достаточным условием для разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространстве $W_2^1(Q)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3. Пусть $\partial Q \in C^1$, выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) – (3.3) и пусть u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q . Тогда для того чтобы при $f \in L_2(Q)$, $F \in (L_2(Q))^n$ задача (1.1), (1.2) имела решение в $W_2^1(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы функции f, F удовлетворяли условию (3.20). При этом, для решения задачи (1.1), (1.2) вида (3.21) справедлива оценка (3.23).

Замечание 3.2. Задача Дирихле (1.1), (1.2) в $W_2^1(Q)$ -постановке подробно изучена и хорошо известны соответствующие условия разрешимости, см. например [21], [4]. При этом, как обычно для задачи в $W_2^1(Q)$ -постановке для коэффициентов при младших членах уравнения (1.1) предполагается выполнение дополнительного условия (см. например [21])

$$(3.24) \quad \left\| \sum_{i=1}^n b_i^2, \sum_{i=1}^n c_i^2, d \right\|_{L_{q/2}} < \infty, \quad q > n.$$

Заметим только, что из условий (3.1) - (3.3) не следует условие (3.24).

Abstract. We consider Dirichlet problems in a bounded domain $Q \subset R_n$ for a general second-order elliptic equation with the boundary function in L_2 . In the author's previous papers necessary and sufficient conditions for the existence of an $(n-1)$ -dimensionally continuous solution were obtained under some natural assumptions on the equation coefficients. Those assumptions are formulated in terms of an auxiliary operator equation in a special Hilbert space and are difficult to verify. In the present paper we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a solution in terms of the original problem for a more narrow class of the right-hand sides. It is shown that if, in addition, the boundary function is assumed to be in the space $W_2^{1/2}(\partial Q)$, then obtained conditions transform into solvability conditions in the space $W_2^1(Q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ж. Думанян, "О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", ДНАН Армении, **114**, по. 4, 295 - 308 (2014).
- [2] В. П. Михайлов, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", Дифференц. уравнения, **12**:10, 1877 - 1891 (1976).
- [3] В. П. Михайлов, "О граничных свойствах решений эллиптических уравнений", Матем. заметки, **27**:1, 137 - 145 (1980).
- [4] В. П. Михайлов, "Дифференциальные Уравнения в Частных Производных, М., Наука (1983).
- [5] А. К. Гуцин, В. П. Михайлов, "О граничных значениях решений эллиптических уравнений", Обобщенные функции и их применения в математической физике (Труды Международной конференции), М., ВЦ АН СССР, 189 - 205 (1981).
- [6] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гуцин, Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, "Краевые задачи математической физики", Тр. МИАН, **175**, М., Наука, 63 - 102 (1986).
- [7] И. М. Петрушко, "О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей", Матем. сб., **119(161)**, 48 - 77 (1982).
- [8] И. М. Петрушко, "О граничных значениях в $L_p, p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей", Матем. сб., **120(162)**, 569 - 588 (1983).

- [9] А. К. Гушин, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", Матем. сб., **137(179)**:1(9), 19 – 64 (1988).
- [10] А. К. Гушин, В. П. Михайлов, "О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения", Матем. сб., **182**:6, 787 – 810 (1991).
- [11] А. К. Гушин, " L_p -оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", ТМФ, **174**:2, 243 – 255 (2013).
- [12] А. К. Гушин, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p ", Матем. сб., **203**:1, 3 – 30 (2012).
- [13] А. К. Гушин, "Оценки некасательной максимальной функции решений эллиптического уравнения второго порядка", Докл РАН., **446**:5, 487 – 489 (2012).
- [14] В. Ж. Думанян, "О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", Изв. НАН Армении, Математика, **45**:1, 31 – 52 (2010).
- [15] В. Ж. Думанян, "О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", ДАН РАН, **386**:6, 735 – 737 (2002).
- [16] V. Zh. Dumanian, "On the behaviour near the boundary of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations", Note Di Matematica, **21**:2, 99 – 118 (2002/2003).
- [17] В. Ж. Думанян, "О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка", Математический сборник **202**(7), 75 – 94 (2011).
- [18] В. Ж. Думанян, "О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка", Доклады РАН, **436**, no. 2. 159 – 162 (2011).
- [19] В. П. Михайлов, А. К. Гушин, Дополнительные Главы Курса "Уравнения Математической Физики", Лекционные курсы НОЦ, Вып.7, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН (МИАН), М., МИАН (2007).
- [20] V. Zh. Dumanyan, "On compactness of a class of first order linear differential operators", Proceedings of the Yerevan State University, no. 2, 17 – 21 (2011).
- [21] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Линейные и Квазилинейные Уравнения Эллиптического Типа, М., "Наука", 540 с. (1964).

Поступила 29 июня 2014