Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 47-63.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А. А. ТАЛАЛЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *sart@ysu.am*

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются некоторые вопросы единственности для тригонометрических рядов и рядов по системе Хаара. С помощью полученных результатов изучается одна задача, поставленная П. Л. Ульяновым в 1964 году.

MSC2010 numbers: 42B25.

Ключевые слова: тригонометрические ряды; ряды Хаара, единственность рядов Фурье.

1. Введение

В настоящей работе изучается следующая задача, поставленная П. Л. Ульяновым [2] в 1964 году.

Гипотеза. *Пусть $c_n \to 0$ и некоторая последовательность частичных сумм $S_{\nu_q}(x) = \sum_{|n|\le\nu_q} c_n e^{2\pi inx}$ тригонометрического ряда $\sum_n c_n e^{2\pi inx}$ сходится при $\nu_q \uparrow +\infty$ к конечной интегрируемой функции $f(x)$ всюду кроме счетного числа точек. Тогда ряд $\sum_n c_n e^{2\pi inx}$ является рядом Фурье функции $f(x)$.*

Справедливость гипотезы остается неизвестной даже в случае, когда $f(x) \equiv 0$ и требуется сходимость к нулю сумм $S_{\nu_q}(x)$ во всех точках x. В работе доказывается следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть $\varepsilon_q \searrow 0$ и $\nu_q \nearrow +\infty$ $(\nu_1 = 0)$ – некоторые последовательности натуральных чисел. Тогда существует последовательность $N_j \nearrow +\infty$ $(N_1 = 0)$, $N_j \in \{\nu_q\}$, такая, что если тригонометрический ряд*

$$(1.1) \qquad \sum_n c_n e^{2\pi inx}, \quad |c_n| \le \varepsilon_{|n|},$$

удовлетворяет одному из условий

a) $c_n = 0$ при $|n| \in \gamma = \cup_{j\ge1}[N_{2j-1}, N_{2j})$,

b) $c_n = 0$ при $|n| \in \gamma^c = \cup_{j\ge1}[N_{2j}, N_{2j+1})$, *а последовательность $\sum_{|n|\le N_j} c_n e^{2\pi inx}$ сходится к конечной интегрируемой функции $f(x)$ всюду на $[0,1)$ кроме счетного числа точек, то (1.1) является рядом Фурье функции $f(x)$.*

Из этой теоремы немедленно следует утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть ν_q есть некоторая последовательность натуральных чисел, такая что $\nu_q \nearrow +\infty$ при $q \to +\infty$. Тогда любой тригонометрический ряд*

$$\sum_n c_n e^{2\pi inx}, \tag{1.2}$$

с условием $c_n \to 0$ при $|n| \to +\infty$, можно разбить на два ряда

$$\sum_n c'_n e^{2\pi inx}, \quad \sum_n c''_n e^{2\pi inx}, \tag{1.3}$$

где $c'_n + c''_n = c_n$, $c'_n = c_n$ или $c'_n = 0$, $c''_n = c_n$ или $c''_n = 0$ так, что если последовательности $\sum_{|n|\le\nu_q} c'_n e^{2\pi inx}$, $\sum_{|n|\le\nu_q} c''_n e^{2\pi inx}$ при $q \to +\infty$ сходятся к конечным интегрируемым функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ всюду на $[0,1)$ кроме счетного числа точек, то они являются, соответственно, рядами Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, и следовательно, ряд (1.2) является рядом Фурье функции $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

В параграфах 1–3 излагаются некоторые теоремы единственности для тригонометрических рядов и рядов по системе Хаара, которые используются в доказательстве теоремы 1.1 и имеют самостоятельный интерес.

2. О единственности рядов по системе Хаара.

Напомним определение системы Хаара $\{\chi_n(x), n = 1, 2, \ldots\}$ на отрезке $T = [0,1)$.

Определение 2.1. Двоичными интервалами назовем интервалы вида

$$\Delta_n = \Delta_k^i = \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, 2^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где

$$n = 2^k + i, \quad 1 \le i \le 2^k, \quad k = 0, 1, 2 \ldots. \tag{2.1}$$

Первая функция Хаара определяется $\chi_1(x) \equiv 1$. При $n \geq 2$ имеем

$$\chi_n(x) = \begin{cases} 2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_{k+1}^{2i-1}, \\ -2^{k/2} & \text{при} \quad x \in \Delta_{k+1}^{2i}, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \Delta_k^i. \end{cases}$$

Если $\Delta = \Delta_k^i$ есть некоторый двоичный интервал и имеем (2.1), то иногда функцию Хаара $\chi_n(x)$ будем обозначить через $\chi_\Delta(x)$.

Определение 2.2. Будем говорить, что ряд по системе Хаара

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \chi_\mu(x) \tag{2.2}$$

обладает свойством A1), если существует последовательность $k(q) \nearrow +\infty$, такая, что для любой последовательности двоичных интервалов $\Delta_{\mu_1} \supset \Delta_{\mu_2} \supset \ldots$ с условием $2^{k(q)} < \mu_q \leq 2^{k(q)+1}$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{\mu_q}|}{\|\chi_{\mu_q}\|_\infty} = 0.$$

Теорема 2.1. *Если ряд (2.2) обладает свойством A1) и некоторая последовательность*

$$A_{l(q)}(x) = \sum_{\mu=1}^{l(q)} a_\mu \chi_\mu(x), \qquad l(q) \nearrow +\infty, \tag{2.3}$$

удовлетворяет условиям

а) $A_{l(q)}(x)$ *при* $q \to \infty$ *сходится по мере к функции* $f \in L^1[0,1)$,

б) $\sup\limits_q |A_{l(q)}(x)| < +\infty$ *для всех* x, *не принадлежащих счетному множеству* $\{x_k\} \subset [0,1)$,

то ряд (2.2) является рядом Фурье функции $f(x)$.

Эта теорема является обобщением следующего результата из работы [1].

Теорема (Талалян-Арутюнян, 1964). *Если ряд (2.2) сходится к некоторой суммируемой функции* $f(x)$ *всюду на* T *кроме, быть может, счетного множества точек и для любой последовательности двоичных интервалов* $\Delta_{\mu_1} \supset \Delta_{\mu_2} \supset \ldots$ *имеем*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|a_{\mu_k}|}{\|\chi_{\mu_k}\|_\infty} = 0,$$

то ряд (2.2) является рядом Фурье функции $f(x)$ *по системе Хаара.*

Доказательство теоремы 2.1 опирается на следующие две леммы.

Лемма 2.1. *Пусть ряд (2.2) удовлетворяет условию A1) и $x_0 \in [0,1)$. Если некоторая частичная сумма $A_l(x)$ этого ряда отлична от нуля на двоичном интервале Δ_1 его постоянства, т.е. $A_l(x) = d \neq 0$ при $x \in \Delta_1$, то существуют частичная сумма $A_{l_1}(x)$, $l_1 > l$, и двоичный интервал Δ' постоянства этой суммы, такие, что*

$$\Delta' \subset \Delta_1, \quad x_0 \notin \Delta' \quad \text{и} \quad A_{l_1}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta'. \tag{2.4}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $d > 0$. Рассмотрим функцию $\chi_{l_1}(x)$ с носителем Δ_1. Очевидно $l_1 > l$. Обозначим через Δ_1^+ и Δ_1^- те половины Δ_1, где, соответственно, $a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \geq 0$ и $a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \leq 0$. Тогда $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \geq d$ при $x \in \Delta_1^+$ и $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \leq d$ при $x \in \Delta_1^-$. Если $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) > d$, $x \in \Delta_1^+$ и $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) \neq 0$, $x \in \Delta_1^-$, то легко видеть, что требование леммы выполняется. Если же $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) = 0$ при $x \in \Delta_1^-$, то $d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) = 2d$ при $x \in \Delta_1^+$. Продолжая этот процесс, нетрудно заметить, что возможны два случая

1) существуют $l_1 < l_2 < ... < l_m$, такие, что

$$d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) + ... + a_{l_m}\chi_{l_m}(x) > d \text{ при } x \in \Delta_{l_m}^+,$$
$$d + a_{l_1}\chi_{l_1}(x) + ... + a_{l_m}\chi_{l_m}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta_{l_m}^-,$$

где Δ_{l_m} — носитель функции $\chi_{l_m}(x)$,

2) существует последовательность вложенных интервалов $\Delta_{l_1} \supset \Delta_{l_2} \supset ... \supset \Delta_{l_m} \supset ...$, такие, что $|\Delta_{l_m}| = \frac{1}{2}\left|\Delta_{l_{m-1}}\right|$, $m = 1, 2, ...$ и имеем $a_{l_m}\chi_{l_m}(x) = 2^m d$.

В первом случае требование леммы выполняется мгновенно.

Во втором случае получаем, что в каждом промежутке $2^{k(q)} < j \leq 2^{k(q)+1}$ начиная с некоторого q_0 найдется функция $a_{\mu(q)}\chi_{\mu(q)}(x)$, $2^{k(q)} < \mu(q) \leq 2^{k(q)+1}$, такая, что при $q > q_0$ имеем

$$\left|a_{\mu(q)}\right| \left\|\chi_{\mu(q)}\right\|_\infty \geq C \cdot 2^{k(q)}, \tag{2.5}$$

где C — постоянная. Следовательно,

$$\frac{\left|a_{\mu(q)}\right|}{\left\|\chi_{\mu(q)}\right\|_\infty} \geq C > 0 \qquad \text{при } q > q_0. \tag{2.6}$$

Неравенство (2.6) противоречит условию A1). Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Пусть ряд (2.2) удовлетворяет условию A1) и последовательность его частичных сумм $A_{l(q)}(x)$, $l(q) \nearrow +\infty$, сходится по мере к функции*

$f(x) \in L^1(T)$. Пусть, далее, ряд $\sum_\mu c_\mu \chi_\mu(x)$ является рядом Фурье функции $f(x)$, т.е.

$$c_\mu = \int_T f(x)\,\chi_\mu(x)\,dx, \tag{2.7}$$

и некоторая частичная сумма $B_l(x)$ ряда

$$\sum_\mu b_\mu \chi_\mu(x), \qquad b_\mu = a_\mu - c_\mu, \tag{2.8}$$

отлична от нуля на некотором интервале Δ его постоянства. Тогда если $x_0 \in T$, то для любого $M > 0$ и натурального N существуют частичные суммы $B_{l(q)}(x)$ и $A_{l(q)}(x)$, $q > N$, рядов (2.2) и (2.8), а также интервал постоянства Δ' этих сумм, такие, что $\Delta' \subset \Delta$, $x_0 \notin \Delta'$ и

$$\left|A_{l(q)}(x)\right| > M \text{ при } x \in \Delta', \qquad B_{l(q)}(x) \neq 0 \text{ при } x \in \Delta'. \tag{2.9}$$

Доказательство. Отметим, что так как $c_\mu = O(\sqrt{n})$, ряд $\sum_\mu b_\mu \chi_\mu(x)$ тоже удовлетворяет условию A_1). Пусть $B_l(x) \neq 0$, $x \in \Delta$, где Δ — интервал постоянства суммы $B_l(x)$. Применяя лемму 2.1, найдем сумму $B_{l'}(x)$, $l' > l$, и интервал Δ_1 постоянства этой суммы, такие, что

$$l' > l, \quad B_{l'}(x) = d_1 \neq 0, \quad x \in \Delta_1, \quad \Delta_1 \subset \Delta, \quad x_0 \notin \Delta_1. \tag{2.10}$$

Пусть q_0 выбрано так, что $l(q) > l'$ для всех $q > q_0$. Из (2.10) следует

$$\int_{\Delta_1} B_{l'}(x)\,dx = d_1 \cdot |\Delta_1| \neq 0, \tag{2.11}$$

а из условия $l(q) > l'$, $q > q_0$, следует

$$\int_{\Delta_1} B_{l(q)}(x)\,dx = \int_{\Delta_1} B_{l'}(x)\,dx = d_1 \cdot |\Delta_1| \neq 0, \qquad \forall q > q_0. \tag{2.12}$$

Предположение, что для некоторых фиксированных $M > 0$ и натурального N имеют место неравенства

$$\left|A_{l(q)}(x)\right| \leq M, \quad \forall x \in \Delta_1, \tag{2.13}$$

для всех $q > \max\{q_0, N\}$ не верно. Действительно, так как по предположению $A_{l(q)}(x)$ при $q \to \infty$ сходится по мере к функции $f(x)$, из (2.13) получаем

$$\lim_{q\to\infty} \int_{\Delta_1} \left|A_{l(q)}(x) - f(x)\right| dx = 0. \tag{2.14}$$

С другой стороны имеем

$$\lim_{q\to\infty}\int\limits_T \left|S_{l(q)}(x) - f(x)\right| dx = 0. \tag{2.15}$$

Так как $B_{l(q)}(x) = A_{l(q)}(x) - S_{l(q)}(x)$, из (2.15) и (2.14) следует

$$\lim_{q\to\infty}\int\limits_{\Delta_1} \left|B_{l(q)}(x)\right| dx = 0. \tag{2.16}$$

Условие (2.16) противоречит равенству (2.11). Следовательно, для любого $M > 0$ и N существует $q > N$, такое, что на некотором интервале $\Delta' \subset \Delta_1$, где Δ' интервал постоянства сумм $A_{l(q)}(x)$ и $B_{l(q)}(x)$, выполняется неравенство

$$\left|A_{l(q)}(x)\right| > M, \qquad x \in \Delta'. \tag{2.17}$$

При этом, так как $\Delta_1 \subset \Delta$ и $x_0 \notin \Delta_1$, согласно (2.10), выполнено $\Delta' \subset \Delta$ и $x_0 \notin \Delta'$. Из неравенства (2.17) следует, что $\left|A_{l(q)}(x)\right| > M$ и $B_{l(q)}(x) \neq 0$ при $x \in \Delta'$. Лемма 2.2 доказана. □

Доказательство Теоремы 2.1. Пусть условия Теоремы 2.1 выполнены, но ряд (2.2) не является рядом Фурье функции $f(x)$. Это означает, что некоторые коэффициенты $b_\mu = a_\mu - c_\mu$ ряда (2.8) отличны от нуля. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счетное множество точек из $T = [0,1)$. Некоторая частичная сумма $B_l(x)$ ряда (2.8) отлична от нуля на некотором интервале Δ постоянства этой суммы. Пусть $M_i > 0$, $M_i \nearrow +\infty$ и $N_i \nearrow +\infty$ при $i \to +\infty$. Применяя Лемму 2.2, определим $q_1 > N_1$, такое, что

$$\left|A_{l(q_1)}(x)\right| > M_1, \quad B_{l(q_1)}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_1, \quad \Delta_1 \subset \Delta, \quad x_1 \notin \Delta_1,$$

где Δ_1 — интервал постоянства сумм $A_{l(q_1)}(x)$ и $B_{l(q_1)}(x)$.

Предположим, что определены $A_{l(q_i)}(x)$, $B_{l(q_i)}(x)$, $1 \le i \le p$, такие, что $q_i > N_i$ и

$$\left|A_{l(q_i)}(x)\right| > M_i, \quad B_{l(q_i)}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_i, \quad \Delta_i \subset \Delta_{i-1}, \quad x_i \notin \Delta_i,$$

где Δ_i — интервал постоянства сумм $A_{l(q_i)}(x)$ и $B_{l(q_i)}(x)$. Применяя Лемму 2.2 для суммы $B_{l(q_p)}(x)$, найдем суммы $A_{l(q_{p+1})}(x)$, $B_{l(q_{p+1})}(x)$ и интервал Δ_{p+1} их постоянства, такие, что $q_{p+1} > N_{p+1}$, $\Delta_{p+1} \subset \Delta_p$ и

$$\left|A_{l(q_{p+1})}(x)\right| > M_{p+1}, \quad B_{l(q_{p+1})}(x) \neq 0, \quad x \in \Delta_{p+1}, \quad x_{p+1} \notin \Delta_{p+1}.$$

Итак, существует последовательность $\{A_{l(q_i)}\}_{i=1}^{\infty}$ и интервалы Δ_i, такие, что Δ_i — интервал постоянства суммы $A_{l(q_i)}(x)$, $\Delta_{i+1} \subset \Delta_i$ для всех i, $x_i \notin \Delta_i$. Тогда точка x, принадлежащая всем Δ_i, отлична от точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и

$$\limsup_{q\to\infty} \left|A_{l(q)}(x)\right| = +\infty,$$

что противоречит условию теоремы 2.1. Следовательно, $a_\mu = c_\mu$ для всех μ. Теорема доказана. □

3. Некоторые теоремы единственности тригонометрических рядов.

Рассмотрим тригонометрические ряды

(3.1) $$\sum_n c_n e^{2\pi inx}, \qquad c_n \to 0 \text{ при } |n| \nearrow +\infty.$$

Обозначим

(3.2) $$F(x) = c + c_0x + \sum{}' \frac{c_n}{2\pi in} e^{2\pi inx},$$

где $F(x)$ — сумма ряда, полученного формальным интегрированием ряда (3.1), а запись $\sum'$ будет обозначать, что в сумме $n \neq 0$. Очевидно, ряд (3.2) сходится в метрике $L_2(0,1)$ и почти всюду определена на T. Обозначим

(3.3) $$a_\mu^{(N)}(t) = \int_T S_N(x+t)\,\chi_\mu(x)\,dx.$$

Имеем

$$a_\mu^{(N)}(t) = \int_T S_N(x+t)\,\chi_\mu(x)\,dx = \sum_{|n|\le N} \int_T c_n e^{2\pi in(x+t)} \chi_\mu(x)\,dx$$
$$= \sum_{|n|\le N} c_n \left(\int_{\Delta_\mu} e^{2\pi inx}\chi_\mu(x)\,dx\right) e^{2\pi int},$$

где Δ_μ — носитель функции $\chi_\mu(x)$. Отсюда при $\mu \ge 2$ получаем

(3.4) $$\begin{aligned} a_\mu^{(N)}(t) &= \|\chi_\mu\|_\infty \sum_{|n|\le N}{}' \frac{c_n}{2\pi in} \left[\left(e^{2\pi in\frac{2\alpha-1}{2^k}} - e^{2\pi in\frac{2\alpha-2}{2^k}}\right)\right. \\ &\qquad\qquad \left. - \left(e^{2\pi in\frac{2\alpha}{2^k}} - e^{2\pi in\frac{2\alpha-1}{2^k}}\right)\right] e^{2\pi int} \\ &= \|\chi_\mu\|_\infty \sum_{|n|\le N}{}' \frac{c_n}{2\pi in} \beta_{n\mu} e^{2\pi int}, \quad \mu \ge 2, \end{aligned}$$

где

(3.5) $$\beta_{n\mu} = \left(e^{2\pi in\frac{2\alpha-1}{2^k}} - e^{2\pi in\frac{2\alpha-2}{2^k}}\right) - \left(e^{2\pi in\frac{2\alpha}{2^k}} - e^{2\pi in\frac{2\alpha-1}{2^k}}\right).$$

Исчезновение члена с номером $n = 0$ в сумме (3.4) объясняется тем, что каждая функция Хаара с номером $\mu \geq 2$ ортогональна постоянной функции. Легко видеть, что

$$(3.6)\qquad |\beta_{n\mu}| \leq \min\left\{4, \frac{Cn^2}{\mu^2}\right\} \text{ для всех } \mu \text{ и } n.$$

Очевидно, что при $N \to \infty$, $a_\mu^{(N)}(t)$ сходятся в метрике L_2 к функции

$$(3.7)\qquad a_\mu(t) = \|\chi_\mu\|_\infty \sum_n{}' \frac{c_n}{2\pi i n}\beta_{n\mu}e^{2\pi int},$$

т.е.

$$(3.8)\qquad \lim_{N\to\infty}\int_T \left|a_\mu(t) - a_\mu^{(N)}(t)\right|^2 dt = 0,$$

и поэтому коэффициенты $a_\mu(t)$ определены для почти всех $t \in T$. Имеем

$$(3.9)\qquad \int_T |a_\mu(t)|^2 dt = \|\chi_\mu\|_\infty^2 \sum_n{}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2n^2}|\beta_{n\mu}|^2.$$

Будем рассматривать ряд

$$(3.10)\qquad \sum_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x), \quad t \in T,$$

которую назовем рядом соответствующий ряду (3.1). Обозначим

$$(3.11)\qquad \Delta_k^p F(x+t) = F\left(\frac{p}{2^k}+t\right) - F\left(\frac{p-1}{2^k}+t\right),$$

Имеем

$$(3.12)\qquad \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = c_0 + \frac{1}{|\Delta_k^p|}\sum_n{}' \frac{c_n}{2\pi in}\Delta_k^p\left(e^{2\pi inx}\right)e^{2\pi int},$$

$$(3.13)\qquad \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p} S_N(x+t)\,dx = c_0 + \frac{1}{|\Delta_k^p|}\sum_{|n|\leq N}{}' \frac{c_n}{2\pi in}\Delta_k^p\left(e^{2\pi inx}\right)e^{2\pi int}.$$

Отметим, что для любого фиксированного интервала Δ_k^p функция (3.12) принадлежит $L^2(T)$ и следовательно, определена для почти всех $t \in T$. Для фиксированного Δ_k^p имеем

$$(3.14)\qquad \lim_{N\to\infty}\int_T \left|\frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} - \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p} S_N(x+t)\,dx\right|^2 dt = 0.$$

Лемма 3.1. *Существует множество $E_0 \subset T$, $|E_0| = 1$, такое, что для всех $t \in E_0$ выполняется равенство*

$$(3.15)\qquad \sum_{\mu\leq 2^k} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} \qquad \text{для любого } \Delta_k^p \text{ при } x \in \Delta_k^p.$$

Доказательство. Действительно, согласно (3.3), имеем

$$\sum_{\mu\leq 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} S_N(x+t)\,. \tag{3.16}$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$ в равенстве (3.16), согласно (3.8) и (3.14) получим, что для любого Δ_k^p

$$\sum_{\mu\leq 2^k} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|}, \qquad x\in\Delta_k^p,$$

для почти всех $t\in T$. Лемма 3.1 верна. □

Лемма 3.2. *Если ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ соответствует ряду $\sum c_n e^{2\pi i n x}$, и последний ряд есть ряд Фурье функции $f(x)$, то для почти всех $t\in T$ имеем*

$$\sum_{\mu\leq 2^k} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad \text{для любого } \Delta_k^p \text{ при } x\in\Delta_k^p. \tag{3.17}$$

Доказательство. Рассмотрим (C,1) средние

$$\sigma_N(x+t) = \frac{1}{N+1}\sum_{v=0}^{N} S_v(x+t), \tag{3.18}$$

где

$$S_v(x+t) = \sum_{|n|\leq v} c_n e^{2\pi i n(x+t)}. \tag{3.19}$$

Известно, что $\sigma_N(x+t)$ при $N\to\infty$ в метрике L^1 сходится к $f(x+t)$ на T для всех $t\in[0,1)$. В частности, для всех $t\in T$ и для всех Δ_k^p имеем

$$\lim_{N\to\infty}\int\limits_{\Delta_k^p}\sigma_N(x+t)\,dx = \int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx. \tag{3.20}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Delta_k^p}\sigma_N(x+t)\,dx = \frac{1}{N+1}\sum_{v\leq N}\int\limits_{\Delta_k^p} S_v(x+t)\,dx. \tag{3.21}$$

Далее, согласно (3.13) имеем

$$\int\limits_{\Delta_k^p} S_v(x+t)\,dx = c_0\,|\Delta_k^p| + \sum_{|n|\leq v}{}' \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n p/2^k} - e^{2\pi i n(p-1)/2^k}\right)e^{2\pi i n t}, \tag{3.22}$$

и поэтому, левые части (3.21) представляют собой (C,1) средние порядка N ряда

$$c_0\,|\Delta_k^p| + \sum_{n}{}' \frac{c_n}{2\pi i n}\left(e^{2\pi i n p/2^k} - e^{2\pi i n(p-1)/2^k}\right)e^{2\pi i n t}, \tag{3.23}$$

который сходится в метрике L_2 на $[0,1)$ к $\Delta_k^p F(x+t)$. Следовательно, правая часть равенства (3.21) сходится в метрике L_2 на $T=[0,1)$ к $\Delta_k^p F(x+t)$ для любого $t \in [0,1)$.

Следовательно, согласно (3.20), будем иметь

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx$$

для почти всех $t \in T$ и для всех Δ_k^p. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть имеем два ряда*

$$(3.24)\qquad \sum_n c_n e^{2\pi i n x} \quad \textit{и} \quad \sum_n b_n e^{2\pi i n x}, \quad \textit{где } |c_n| \le M, |b_n| \le M, \forall n,$$

и пусть ряды

$$(3.25)\qquad \sum_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) \qquad \textit{и} \qquad \sum_\mu d_\mu(t)\,\chi_\mu(x)$$

соответствующие им ряды по системе Хаара. Тогда ряды (3.24) *совпадают тогда и только тогда, когда для почти всех $t \in T$ совпадают ряды* (3.25).

Доказательство. Если $c_n = b_n$ для всех n, то, согласно Лемме 3.1,

$$\sum_{\mu=1}^{2^k} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx = \sum_{\mu=1}^{2^k} d_\mu(t)\,\chi_\mu(x), \qquad x \dot\in \Delta_k^p,$$

для почти всех $t \in T$ и для всех Δ_k^p. Тогда, очевидно, $a_\mu(t) = d_\mu(t)$ для почти всех t и для всех μ, т.е. ряды (3.25) совпадают.

Обратно, пусть $a_\mu(t) = d_\mu(t)$ для всех μ и для всех $t \in E_0$, $|E_0| = 1$, $E_0 \subset T$. Тогда имеем

$$(3.26)\qquad \begin{aligned} \Delta_k^p F(x+t) &= c_0 \cdot 2^{-k} + {\sum_n}' \frac{c_n}{2\pi i n}\Delta_k^p(e^{2\pi i n x})e^{2\pi i n t} \\ &= b_0 \cdot 2^{-k} + {\sum_n}' \frac{b_n}{2\pi i n}\Delta_k^p(e^{2\pi i n x})e^{2\pi i n t} \end{aligned}$$

для всех Δ_k^p и для почти всех t. Из равенства (3.26), так как $\left\{e^{2\pi i n t}\right\}$ — ортонормированная система, следует

$$(3.27)\qquad c_0 = b_0 \qquad \text{и} \qquad \frac{c_n}{2\pi i n}\Delta_k^p(e^{2\pi i n x}) = \frac{b_n}{2\pi i n}\Delta_k^p(e^{2\pi i n x}), \quad \forall n \ne 0$$

для всех Δ_k^p. Для любой фиксированной пары c_n и b_n существует интервал Δ_k^p, такой, что $\Delta_k^p(e^{2\pi i n x}) \ne 0$. Следовательно, $c_0 = b_0$ и $c_n = b_n$ для всех n. Лемма 3.3 доказана. □

Теорема 3.1. *Для того, чтобы ряд $\sum_n c_n e^{2\pi inx}$, $|c_n| \le M$, был рядом Фурье интегрируемой на T периодической функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех $t \in T$ соответствующий ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ был рядом Фурье функции $f(x+t)$, $x \in T$.*

Доказательство. Пусть $\sum_n c_n e^{2\pi inx}$ есть ряд Фурье функции $f(x)$. Согласно Лемме 3.2, имеем

$$\sum_{\mu\le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad x \in \Delta_k^p \text{ для всех } \Delta_k^p.$$

Это означает, что ряд $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех t является рядом Фурье функции $f(x+t)$.

Обратно. Пусть ряд $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ является рядом Фурье функции $f(x+t)$ для почти всех t, где $f(x)$ — интегрируемая на $[0,1)$ периодическая функция. Рассмотрим ряд $\sum_n b_n e^{2\pi inx}$, где $b_n = \int_T f(x)\,e^{2\pi inx}dx$. Если ряд $\sum_\mu d_\mu(t)\chi_\mu(x)$ соответствует ряду $\sum_n b_n e^{2\pi inx}$, то имеем

$$\sum_{\mu\le 2^k} d_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad \forall x \in \Delta_k^p, \forall \Delta_k^p$$

для почти всех t. Но имеем также

$$\sum_{\mu\le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p} f(x+t)\,dx, \qquad \forall x \in \Delta_k^p, \forall \Delta_k^p.$$

Следовательно, $a_\mu(t) = d_\mu(t)$, для любой μ и для почти всех t. Согласно Лемме 3.3 будем иметь $c_n = b_n$ для всех n. Теорема 3.1 доказана. □

4. Применение рядов Хаара

Теорема 4.1. *Если коэффициенты тригонометрического ряда $\sum_n c_n e^{2\pi inx}$ стремятся к нулю, т.е.*

$$\lim_{|j|\to\infty} |c_j| = 0, \tag{4.1}$$

то соответствующий ему ряд $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ обладает свойством A1) для почти всех t, т.е. существует последовательность $k(q)$, где $k(q) \nearrow +\infty$ при $q \to +\infty$, такая, что для любой последовательности двоичных интервалов

$\Delta_{\mu_1} \supset \Delta_{\mu_2} \supset \ldots$ *с условием* $2^{k(q)} < \mu_q \le 2^{k(q)+1}$ *имеем*

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\left|a_{\mu_q}(t)\right|}{\left\|\chi_{\mu_q}\right\|_\infty} = 0 \text{ для почти всех } t \in T. \tag{4.2}$$

Для доказательства теоремы докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Если* $c_n \to 0$, *и ряд* $\sum_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)$ *соответствует ряду* $\sum_n c_n e^{2\pi i n x}$, *то*

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_T |a_\mu(t)|^2\, dt = 0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Согласно (3.9), имеем

$$\int_T |a_\mu(t)|^2 dt = \|\chi_\mu\|_\infty^2 {\sum_n}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} |\beta_{n\mu}|^2 \le \mu {\sum_n}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} |\beta_{n\mu}|^2, \tag{4.4}$$

где $\beta_{n\mu}$ определены в (3.5) и удовлетворяют условиям (3.6). Имеем

(4.5)

$${\sum_n}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2 = {\sum_{|n|\le\sqrt{\mu}}}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2 + {\sum_{\sqrt{\mu}<|n|\le\mu}}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2 + {\sum_{|n|>\mu}}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}|\beta_{n\mu}|^2$$

$$= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3. \tag{4.6}$$

Из (3.6) получаем

(4.7)

$$\sum\nolimits_1 \le C {\sum_{|n|\le\sqrt{\mu}}}' \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} \frac{n^4}{\mu^4} \le C\mu^{-5/2},$$

(4.8)

$$\sum\nolimits_2 \le C \max_{|n|>\sqrt{\mu}} |c_n|^2 \cdot \sum_{|n|\le\mu} \frac{|\beta_{n\mu}|^2}{n^2} \le C\mu^{-4} \max_{|n|>\sqrt{\mu}} |c_n|^2 \cdot \sum_{|n|\le\mu} n^2 \le C\mu^{-1} \max_{|n|>\sqrt{\mu}} |c_n|^2,$$

(4.9)

$$\sum\nolimits_3 \le C \max_{|n|>\mu} |c_n|^2 \sum_{|n|>\mu} \frac{1}{n^2} = C\mu^{-1} \max_{|n|>\mu} |c_n|^2.$$

Из (4.5), (4.7) – (4.9) следует (4.3). Лемма 4.1 доказана. □

Доказательство Теоремы 4.1. Теорема 4.1 легко следует из леммы 4.1. Действительно, пусть $\varepsilon_q \searrow 0$, $\sum_{q=1}^{\infty} \varepsilon_q < \infty$. Из (4.3) следует, что для некоторой последовательности $k(q) \nearrow +\infty$ имеем

$$\frac{\int_T \sum_{\mu=2^{k(q)}+1}^{\mu=2^{k(q)+1}} |a_\mu(t)|^2 dt}{2^{k(q)}} < \varepsilon_q. \tag{4.10}$$

Из (4.10) следует существование множества $E_0 \subset T$, $|E_0| = 1$, для которого

$$\lim_{q\to\infty} \frac{\sum\limits_{\mu=2^{k(q)}+1}^{\mu=2^{k(q)+1}} |a_\mu(t)|^2}{2^{k(q)}} = 0, \qquad t \in E_0. \tag{4.11}$$

Отсюда получаем, что (4.2) выполняется для всех $t \in E_0$. Теорема 4.1 доказана.

□

Комбинируя Теоремы 2.1, 3.1 и 4.1, получаем

Теорема 4.2. *Пусть $c_n \to 0$ и ряд $\sum\limits_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ соответствует ряду $\sum\limits_n c_n e^{2\pi i n x}$. Пусть, далее, для почти всех $t \in E$, где $E \subset T$, $|E| = 1$, существует последовательность*

$$A_{l(q)}(x,t) = \sum_{\mu\le 2^{l(q)}} a_\mu(t)\chi_\mu(x), \quad l(q) \nearrow +\infty, (l(q) \textit{ зависит от } t)$$

такая, что выполнены условия

a′) $A_{l(q)}(x,t)$ при $q \to \infty$ сходится по мере на $\{x : x \in T\}$ к $f(x+t)$, где $f(x)$ суммируемая функция,

b′) $\sup\limits_q |A_{l(q)}(x,t)| < +\infty$ для всех x, не принадлежащих счетному множеству $E_t \subset T$.

Тогда ряд $\sum\limits_n c_n e^{2\pi i n x}$ является рядом Фурье функции $f(x)$.

5. Доказательство Теоремы 1.1

Лемма 5.1. *Если $\varepsilon_n \searrow 0$ при $n \to \infty$, то для любых $k > 0$ и $N \ge 2^{3k}$ имеет место неравенство*

$$\int_T \max_{x\in T} \left| \sum_{\mu\le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\chi_\mu(x) \right|^2 dt \le C(\varepsilon_N)^2 \tag{5.1}$$

для всех $x \in T$ и для всех последовательностей $\{c_n\}$ с условием $|c_n| \le \varepsilon_n$.

Доказательство. Возьмем любую точку $x \in T$. Имеем

$$x \in \bigcap_{j=0}^{k} \Delta_{\mu_j},$$

где $T = \Delta_{\mu_0} \supset \Delta_{\mu_1} \supset \ldots \supset \Delta_{\mu_k}$ есть последовательность двоичных интервалов с $|\Delta_{\mu_j}| = 2^{-j}$. Очевидно, что каждая сумма из (5.1) постоянна на Δ_{μ_k} и среди первых 2^k функций Хаара в точке x отличны от нуля лишь функции $\chi_1 \equiv 1$ и $\chi_{\Delta_{\mu_j}}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$. Отсюда получаем

$$\int_T \left| \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\chi_\mu(x) \right|^2 dt$$

$$(5.2) \qquad = \sum_{|n|>N} \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} \left(\sum_{\mu=1}^{2^k} \beta_{n\mu} \|\chi_\mu\|_\infty \chi_\mu(x) \right)^2$$

$$\le \sum_{|n|>N} \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2} \left(4 + \sum_{j=0}^{k-1} 4 \cdot 2^j \right)^2 = 4 \cdot 2^{2k} \sum_{|n|>N} \frac{|c_n|^2}{4\pi^2 n^2}.$$

Если имеем также $N > 2^{3k}$, то

$$(5.3) \qquad \int_T \left| \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu \le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\chi_\mu(x) \right|^2 dt \le C \cdot 2^{-k}(\varepsilon_N)^2, \quad x \in T,$$

где C - абсолютная постоянная. При разных значений $x \in T$ в интеграле (5.3) получаются всего лишь 2^k разных функций от t. Отсюда сразу же получаем (5.1). □

Лемма 5.2. *Пусть $\eta > 0$, $N \ge 0$, $k > 0$. Тогда существуют $k' > k$, $N' > N$, $N' \in \{\nu_q\}$ такие, что для любой последовательности $\{c_n\}$, для которой $|c_n| \le \varepsilon_{|n|}$ и $c_n = 0$ при $N < |n| \le N'$, выполняется неравенство*

$$(5.4) \qquad \left| \sum_{\mu \le 2^{k'}} a_\mu(t)\, \chi_\mu(x) - S_{N'}(x+t) \right| < \eta, \forall x \in T,\ \forall t \in E,$$

где $E \subset T$, $|E| > 1 - \eta$.

Доказательство. Возьмем $k' > k$ так, чтобы кусочно постоянная функция

$$(5.5) \qquad d_{k'}(t,x) = \frac{1}{|\Delta_{k'}^p|} \int_{\Delta_{k'}^p} S_N(u+t)\, du, \quad \forall x \in \Delta_{k'}^p,\ 1 \le p \le 2^{k'},$$

удовлетворяла неравенству

$$(5.6) \qquad |d_{k'}(t,x) - S_N(x+t)| < \eta/2, \quad \forall x\ \forall t,$$

для всех последовательностей $\{c_n\}$, $|c_n| \le \varepsilon_{|n|}$. По лемме 4.1 существует $N' > N$, $N' \in \{v_q\}$, такое, что

$$\int_T \max_{x\in T} \left| \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) \right|^2 dt < \eta^3/4. \tag{5.7}$$

Действительно, для этого N' надо взять так, чтобы было $N' > 2^{3k'}$ и $C(\varepsilon_{N'})^2 < \eta^3/4$ (см. (5.1)). Далее определим

$$E = \left\{ t \in T : \max_{x\in T} \left| \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) \right| < \eta/2 \right\}.$$

Используя неравенство Чебышева, из (5.7) следует $|E| > 1-\eta$, а также

$$\left| \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) \right| < \eta/2, \quad \forall x\in T,\ \forall t\in E. \tag{5.8}$$

С другой стороны, если $c_n = 0$ при $N < |n| \le N'$, то имеем

$$S_{N'}(x+t) = S_N(x+t), \tag{5.9}$$

а из (5.5) получаем

$$\begin{gathered}\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_{k'}^p|}\int_{\Delta_{k'}^p} S_{N'}(u+t)\,du = d_{k'}(t,x),\\ \forall x\in\Delta_{k'}^p, \forall\Delta_{k'}^p,\ 1\le p\le 2^{k'}.\end{gathered} \tag{5.10}$$

Согласно (5.10) и (5.9) имеем

$$\sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) - S_{N'}(x+t) = d_{k'}(t,x) - S_N(x+t). \tag{5.11}$$

Из (5.11) и (5.6) следует

$$\left| \sum_{\mu\le 2^{k'}} a_\mu^{(N')}(t)\chi_\mu(x) - S_{N'}(x+t) \right| < \eta/2, \quad \forall x\in T,\ \forall t\in E. \tag{5.12}$$

Из (5.8) и (5.12) сразу же получаем (5.4). □

Доказательство Теоремы 1.1. Последовательно применив лемму 5.2, найдем последовательности $k_j \nearrow +\infty$, $N_j \nearrow +\infty$, $N_j \in \{\nu_q\}$, множества $E_j \subset T$, $|E_j| > 1 - 2^{-j}$, такие, что если ряд (1.1) удовлетворяет одному из условий а) и

b) теоремы 1.1, то, соответственно, выполняется одно из неравенств

$$(5.13)\quad \begin{aligned} &\left|\sum_{\mu\le 2^{k_{2j}}} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) - S_{N_{2j}}(x+t)\right| < 2^{-j}, \quad \forall x\in T, \quad \forall t\in E_j, \\ &\left|\sum_{\mu\le 2^{k_{2j-1}}} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x) - S_{N_{2j-1}}(x+t)\right| < 2^{-j}, \quad \forall x\in T, \quad \forall t\in E_j \end{aligned}$$

при $j = 1, 2, \ldots$. Далее обозначим

$$E = \bigcup_{k\ge 1}\bigcap_{j\ge k} E_j.$$

Очевидно, что $|E| = 1$. Предположим, что ряд (1.1) удовлетворяет одному из условий a) и b). Без потери общности можно предполагать, что это есть условие a). Далее предположим, что последовательность $\sum_{|n|\le N_j} c_n e^{2\pi i n x}$ сходится к конечной интегрируемой функции $f(x)$ всюду на $[0,1)$ кроме точек из некоторого счетного множества A. Тогда из условий (5.13) получаем, что последовательность

$$A_{k_j}(x,t) = \sum_{\mu\le 2^{k_{2j}}} a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)$$

для всех $t\in E$ будет сходится к $f(x+t)$ для всех x не принадлежащих счетному множеству $A_t = t + A$. Отсюда легко усмотреть, что для ряда

$$\sum_\mu a_\mu(t)\,\chi_\mu(x)$$

выполнены условия теорем 3.1 и 4.2 и поэтому ряд (1.1) будет рядом Фурье функций $f(x)$. □

Доказательство следствия 1.1. Применив теорему 1.1 при $\varepsilon_n = \max_{|j|\ge n}|c_j|$, найдем последовательность $\{N_k\}\subset\{\nu_k\}$, удовлетворяющая условиям теоремы 1.1. Определим

$$(5.14)\quad \begin{aligned} &c_n' = \begin{cases} c_n & \text{если} \quad n\in \cup_{j=1}^{\infty}(N_{2j}, N_{2j+1}] \\ 0 & \text{если} \quad n\in \cup_{j=1}^{\infty}(N_{2j-1}, N_{2j}] \end{cases} \\ &c_n'' = c_n - c_n', \end{aligned}$$

Легко усмотреть, что тогда ряды (1.3) удовлетворяют, соответственно, условиям a) и b). Применив теорему 1.1 для каждого из рядов (1.3), мы получим, что они являются рядами Фурье функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и следствие будет установлено. □

Abstract. In this paper we discuss some uniqueness questions for trigonometric series and for series in Haar system. The obtained results are used to study a problem posed by P. L. Ul'yanov in 1964.

Список литературы

[1] А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, "О единственности рядов по системам Хаара и Уолша", Изв. АН СССР, **28**, 1391 – 1408 (1964).

[2] П. Л. Ульянов, "Решенные и нерешенные проблемы теории триеонометрических и ортогональных рядов", Успехи Мат. Наук, **19**, no. 1, 3 – 69 (1964).

Поступила 29 ноября 2014