Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 36-46.

О ЗАДАЧЕ КОШИ В МУЛЬТИАНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ЖЕВРЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ С ВЕСОМ УРАВНЕНИЙ

В. Н. МАРГАРЯН, Г. Г. КАЗАРЯН

Российско-Армянский (Славянский) Университет
Ереванский Государственный Университет
E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com*; *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Доказывается существование единственного решения задачи Коши в мультианизотропных пространствах Жевре для одного класса гиперболических с весом уравнений с достаточно общим весом.

MSC2010 numbers: 12E10.

Ключевые слова: Задача Коши; гиперболический с весом оператор (многочлен); мультианизотропное пространство Жевре.

Введение

Работа посвящена нахождению достаточных условий для однозначной разрешимости Задачи Коши в определенных мультианизотропных классах Жевре для гиперболических с весом уравнений. Распространяются результаты Л. Гординга [3], Ларсона [11], Л. Каттабрига [12] и обобщаются результаты Л. Родино [4], Д. Калво [6] и других об однозначной разрешимости задачи Коши на общие гиперболические (относительно $(n-1)$−мерных гиперплоскостей) уравнения. В частности, 1) при рассмотрении задачи Коши для уравнений с младшими членами в отличие от работы [6], где условия ставятся на каждый моном младшей части, мы ставим условия на младшие однородные многочлены, 2) однозначная разрешимость задачи Коши доказывается в более общих пространствах Жевре. Настоящая статья является продолжением работы [7], где получены необходимые условия для однозначной разрешимости задачи Коши, где установлены некоторые свойства гиперболических с весом многочленов и где достаточно подробно изложена история вопроса. Поэтому мы отсылаем читателя к этой работе для ознакомления с необходимыми понятиями, результатами и литературой, а здесь мы приводим лишь те обозначения, определения и ссылки на литературу без которых прочтение этой работы стало бы затруднительным.

1. Вспомогательные результаты

Пусть E^n и R^n – n-мерные вещественные пространства точек соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$, $C^n = R^n \times iR^n$, $R^{n,0} = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, (j = 1, ..., n)\}$, N-множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times ... \times N_0$-множество n-мерных мультииндексов. Для $\xi \in R^n$, $x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i}.\partial/\partial x_j$ $(j = 1, ..., n)$.

Для набора точек $\aleph = \{a^1, ..., a^M\}$, $a^k \in R^{n,0}$ $(k = 1, ..., M)$ наименьший выпуклый многогранник $\Re(\aleph)$ в $R^{n,0}$, содержащий все точки набора $\aleph$ называется **многогранником Ньютона** набора $\aleph$ (см [1] или [2]).

Многогранник $\Re$ с вершинами из $R^{n,0}$ называется полным, если $\Re$ имеет вершину в начале координат и вершину на каждой оси координат $R^{n,0}$. Полный многогранник $\Re$ называется **вполне правильным**, если внешние нормали (нормированные так, что $\min\limits_{1 \leq j \leq n} \lambda_j = 1$) всех $(n-1)-$мерных некоординатных граней $\Re$ (множество которых обозначим через $\Lambda^{n-1}(\Re)$)имеют положительные координаты. Для вполне правильного многогранника $\Re$ с вершинами из $R^{n,0}$ и вектора $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$ обозначим через $\Re^0$ множество его вершин и положим

$$h_\Re(\xi) = \sum_{\nu \in \Re^0} |\xi|^\nu = \sum_{\nu \in \Re^0} |\xi_1|^{\nu_1} ... |\xi_n|^{\nu_n},$$

$$\theta(\lambda, \Re) = \max_{\nu \in \Re}(\lambda, \nu); \;\; d_0(\Re) \equiv \max_{\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)} \theta(\lambda, \Re). \tag{1.1}$$

Через B_n обозначим множество $n-$мерных вполне правильных многогранников $\Re \in R^{n,0}$, для которых $d_0(\Re) \leq 1$.

Всюду далее, где это не вызывает недоразумения, будем считать, что многогранник $\Re \in B_n$, порождающий вес $h_\Re$, фиксирован и опустим в обозначениях $h_\Re$, $d_0(\Re)$, $\theta(\lambda, \Re)$ и т.д символ $\Re$.

Рассмотрим многочлен от $(n+1)$ переменных $(\xi_0, \xi) = (\xi_0, \xi_1, .., \xi_n) \in R^{n+1}$

$$P(\xi_0, \xi) = \sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} \gamma_{(\alpha_0, \alpha)} \, \xi_0^{\alpha_0} \, \xi^\alpha,$$

где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов

$$(P) = \{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}; \;\; \gamma_{(\alpha_0, \alpha)} \neq 0\}.$$

Представим многочлен P в виде суммы однородных многочленов

$$P(\xi_0,\xi)=\sum_{j=0}^{m}P_j(\xi_0,\xi), \tag{1.2}$$

где $m=\max_{(\alpha_0,\alpha)\in(P)}(\alpha_0+|\alpha|)$– порядок многочлена P, а P_j однородный многочлен порядка j; $(j=0,1,...,m)$.

Определение 1.1. *(см. [3]) Многочлен $P(\xi_0,\xi)$ называется гиперболическим относительно ξ_0, если $P_m(1,0,...,0)\neq 0$ и существует число $c\geq 0$ такое, что $|Im\xi_0|\leq c$ для точек $(\xi_0,\xi)\in C\times R^n$, для которых $P(\xi_0,\xi)=0$.*

Определение 1.2. *(см. [4]) Многочлен $P(\xi_0,\xi)$ называется $h-$ гиперболическим относительно ξ_0, если $P_m(1,0,...,0)\neq 0$ и существует число $c>0$ такое, что $|Im\xi_0|\leq c\,h(\xi)$ для точек $(\xi_0,\xi)\in C\times R^n$, для которых $P(\xi_0,\xi)=0$.*

Для точки $\xi\in R^n$, многочлена R и числа $t>0$ введём следующие функции Л. Хёрмандера (см. [5], формулы (10.1.7) и (10.4.2))

$$\tilde{R}((\xi_0,\xi),t)=\sqrt{\sum_{(\alpha_0,\alpha)\in N_0^{n+1}}|R^{(\alpha_0,\alpha)}(\xi_0,\xi)|^2\,t^{2(\alpha_0+|\alpha|)}};\quad \tilde{R}(\xi_0,\xi)=\tilde{R}(\xi_0,\xi,1).$$

Для $t>0$ обозначим $A_h(t)=\{(\xi_0,\xi,\tau)\in R^{n+2},|\tau|\geq t\,h(\xi)\}$ и $A_h=A_h(1)$.

Определение 1.3. *Скажем, что многочлен P $h-$сильнее многочлена Q (Q $h-$слабее P) и запишем $Q\prec^h P$, если с некоторой постоянной $C>0$*

$$\tilde{Q}((\xi_0,\xi),\tau)\leq C\tilde{P}((\xi_0,\xi),\tau)\ \ \text{при}\ \ (\xi_0,\xi,\tau)\in A_h.$$

Отметим, что Л. Хёрмандером введено понятие сравнения многочленов (дифференциальных операторов), когда множество A_h заменяется множеством R^{n+2}, при этом Л. Гордингом и С. Свенссоном (см. [8], или [5], Теорема 12.4.6) доказано, что если главная однородная часть P_m оператора $P=P_m+Q$ гиперболична (по Гордингу), то оператор P гиперболичен тогда и только тогда, когда Q слабее P_m. В работе [9] найдены алгебраические условия такого сравнения.

Лемма 1.1. *Если однородный многочлен $P_m(\xi_0,\xi)$ порядка m гиперболичен относительно ξ_0, то с некоторой постоянной $c>0$*

$$|P_m(\xi_0+i\tau,\xi)|\geq c\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)\ \ \text{при}\ \ ((\xi_0,\xi),\tau)\in R^{n+2}.$$

Доказательство. Так как при $\tau = 0$ доказуемое неравенство превращается в равенство с $c = 1$, то можем далее считать, что $\tau \neq 0$. Так как (см. [5], оценка (12.4.3)) с некоторой постоянной $C_1 > 0$

$$|P_m(\xi_0 + i, \xi)| \geq C_1 \tilde{P}_m((\xi_0, \xi), 1), \quad \text{при всех} \quad (\xi_0, \xi) \in R^{n+1},$$

то для любого $\tau \neq 0$

$$|P_m(\frac{\xi_0}{\tau} + i, \frac{\xi}{\tau})| \geq C_1 \tilde{P}_m(\frac{(\xi_0, \xi)}{\tau}, 1), \text{ при } (\xi_0, \xi) \in R^{n+1}.$$

Так как в силу однородности многочлена P_m имеем что $\alpha_0 + |\alpha| = m$ для всех $(\alpha_0, \alpha) \in (P)$, то отсюда вытекает, что

$$|\tau|^{-m} \tilde{P}_m((\xi_0, \xi), \tau) = |\tau|^{-m} \sqrt{\sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} |P_m^{(\alpha_0, \alpha)}(\xi_0, \xi)|^2 |\tau|^{2(\alpha_0 + |\alpha|)}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} |P_m^{(\alpha_0, \alpha)}(\frac{(\xi_0, \xi)}{\tau})|^2} = \tilde{P}_m(\frac{(\xi_0, \xi)}{\tau}, 1) \leq$$

$$\leq \frac{1}{C_1} |P_m(\frac{\xi_0}{\tau} + i, \frac{\xi}{\tau})| \text{ при } (\xi_0, \xi) \in R^{n+1}, \quad \tau \neq 0.$$

Умножая полученное неравенство на τ^m и учитывая однородность многочлена P_m, отсюда получим

$$\tilde{P}_m((\xi_0, \xi), \tau) \leq \frac{1}{C_1} |P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)| \text{ при всех } (\xi_0, \xi) \in R^{n+1}, \tau \neq 0.$$

Лемма 1.1 доказана. □

Лемма 1.2. *Пусть $P_m(\xi_0, \xi)$ и $Q_k(\xi_0, \xi)$ однородные многочлены порядков соответственно m и k, при этом $Q_k \prec^h P_m$. Тогда*

1) если P_m гиперболичен относительно ξ_0, то с некоторой постоянной $C > 0$ и

$$\tilde{Q}_k((\xi_0 + i\tau, \xi), \tau) \leq C\, |P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)|, \quad \textit{при всех} \quad (\xi_0, \xi, \tau) \in A_h. \tag{1.3}$$

$$2) \lim_{t \to \infty} \sup_{((\xi_0, \xi), \tau) \in A_h(t)} \frac{\tilde{Q}_k((\xi_0, \xi), \tau)}{\tilde{P}_m((\xi_0, \xi), \tau)} = 0. \tag{1.4}$$

Доказательство пункта 1). Пусть $Q_k \prec^h P_m$. Применяя формулу Тейлора получим с некоторыми постоянными $C_j > 0$ $(j = 1, 2, 3)$ и для всех $(\xi_0, \xi, \tau) \in A_h$

$$\tilde{Q}_k((\xi_0 + i\tau, \xi), \tau) = \sqrt{\sum_{(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}} |Q_k^{(\alpha_0, \alpha)}(\xi_0 + i\tau, \xi)|^2\, |\tau|^{2(\alpha_0 + |\alpha|)}} \leq$$

$$\leq C_1 \sqrt{\sum_{(\alpha_0,\alpha)\in N_0^{n+1}} \sum_{\beta_0\in N_0} |Q_k^{(\alpha_0+\beta_0,\alpha)}(\xi_0,\xi)|^2\ |\tau|^{2\beta_0}\ |\tau|^{2(\alpha_0+|\alpha|)}} \leq$$

$$\leq C_2 \sqrt{\sum_{(\gamma_0,\gamma)\in N_0^{n+1}} |Q_k^{(\gamma_0,\gamma)}(\xi_0,\xi)|^2\ |\tau|^{2(\gamma_0+|\gamma|)}} =$$

$$= C_2\ \tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau) \leq C_3\ \tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau).$$

Отсюда и из леммы 1.1 следует утверждение пункта 1).

Доказательство пункта 2). Так как $Q_k \prec^h P_m$, т.е. с некоторой постоянной $C_4 > 0$

$$\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau) \leq C_4 \tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau) \text{ при всех } (\xi_0,\xi,\tau)\in A_h,$$

то для произвольных $\rho \neq 0$, $(\xi_0,\xi)\in R^{n+1}$ и $|\tau| \geq h(\frac{\xi}{\rho})$ имеем

$$\tilde{Q}_k(\frac{(\xi_0,\xi)}{\rho},\tau) \leq C_4 \tilde{P}_m(\frac{(\xi_0,\xi)}{\rho},\tau).$$

Отсюда в силу однородности многочленов P_m и Q_k имеем

$$|\tau|^{-k}\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\rho\tau) \leq C_1 |\tau|^{-m}\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\rho\tau)\ \ \forall(\xi_0,\xi)\in R^{n+1}, \rho \geq h(\xi/\tau).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и число $\tau_0 = \tau_0(\varepsilon)$ выбрано так, что $C_4\,|\tau_0|^{-m+k} = \varepsilon$ (напомним, что $m > k$). Так как с некоторой постоянной $\tau_1 = \tau_1(\varepsilon)$ $\ \tau_0\ h(\xi/\tau_0) \leq \tau_1\ h(\xi)$ для всех $\xi \in R^n$, то отсюда получаем

$$\sup_{((\xi_0,\xi),\tau)\in A_h(\tau_1)} \frac{\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau)}{\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)} \leq \varepsilon.$$

Так как $A_h(\rho_1) \subset A_h(\rho_2)$ при $\rho_1 \geq \rho_2$, то отсюда имеем для всех $\rho \geq \tau_1$

$$\sup_{((\xi_0,\xi),\tau)\in A_h(\rho)} \frac{\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau)}{\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)} \leq \varepsilon,$$

следовательно, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{((\xi_0,\xi),\tau)\in A_h(t)} \frac{\tilde{Q}_k((\xi_0,\xi),\tau)}{\tilde{P}_m((\xi_0,\xi),\tau)} \leq \varepsilon.$$

Так как число $\varepsilon > 0$ произвольно, то это доказывает второй пункт леммы. Лемма 1.2 доказана.

Из доказанной леммы непосредственно следует

Следствие 1.1. *При условиях леммы 1.1 существует число $C > 0$ такое, что*

$$\tilde{Q}_k((\xi_0+i\tau,\xi),1) \leq C\,|P_m(\xi_0+i\tau,\xi)| \ \ \textit{при всех}\ \ (\xi_0,\xi,\tau)\in A_h;\ \ |\tau|\geq 1.$$

Лемма 1.3. *Пусть однородный многочлен $P_m(\xi_0, \xi)$ порядка m гиперболичен относительно ξ_0, а однородные многочлены $Q_j(\xi_0, \xi)$ порядка j, $j = 0, 1, ..., m - 1$ $h-$слабы P_m. Тогда многочлен $P_m + Q_0 + ... + Q_{m-1}$ $h-$гиперболичен относительно ξ_0.*

Доказательство. Применив формулу Тейлора, получим с некоторой постоянной $C_1 > 0$ и для всех $(\xi_0, \xi, \tau) \in R^{n+2}$

$$|Q_j(\xi_0 + i\,\tau, \xi)| \leq C_1\, \tilde{Q}_j((\xi_0, \xi), \tau), \quad j = 0, 1, ..., m - 1.$$

С другой стороны в силу леммы 1.1 с некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$|P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)| \geq C_2\, \tilde{P}_m((\xi_0, \xi), \tau) \ \text{ при } \ (\xi_0, \xi, \tau) \in R^{n+2}.$$

Поэтому в силу пункта 2) леммы 1.2 существует число $t_0 > 0$ для которого

$$\sum_{j=0}^{m-1} |Q_j(\xi_0 + i\,\tau, \xi)| \leq \frac{1}{2}|P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)|, \quad \text{при всех} \quad (\xi_0, \xi, \tau) \in A_h(t_0),$$

откуда следует, что

$$\frac{1}{2}|P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)| \leq |P_m(\xi_0 + i\tau, \xi) + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j(\xi_0 + i\,\tau, \xi)| \leq$$

$$\leq \frac{3}{2}|P_m(\xi_0 + i\tau, \xi)|, \quad \text{при всех} \quad (\xi_0, \xi, \tau) \in A_h(t_0).$$

Так как многочлен $P_m(\xi_0, \xi)$ гиперболичен относительно ξ_0, то из леммы 1.1 следует, что $P_m(\xi_0 + i\tau, \xi) \neq 0$ для всех $(\xi_0, \xi, \tau) \in R^{n+2}$, $\tau \neq 0$, откуда, в свою очередь следует, что

$$P_m(\xi_0 + i\tau, \xi) + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j(\xi_0 + i\,\tau, \xi) \neq 0, \quad \text{при всех} \quad (\xi_0, \xi, \tau) \in R^{n+2}, \ |\tau| \geq t_0\, h(\xi),$$

т.е. многочлен $P_m + Q_0 + ... + Q_{m-1}$ $h-$ гиперболичен относительно ξ_0. $\square$

2. Некоторые свойства многогранников Ньютона и мультианизотропных пространств Жевре

Для $\Re \in B_n$ через $\partial\Re$ обозначим множество точек $\nu \in \Re$, для которых существует вектор $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$ такой, что $(\lambda, \nu) = \theta(\lambda)$.

Пусть $[a]$– целая часть a и $\alpha \in N_0^n$. Обозначим $k(\alpha) = k(\alpha, \Re) = inf\{t > 0 : t\,\alpha \in \Re\}$ и положим $k'(\alpha) = k'(\alpha, \Re) = k(\alpha)$, если число $k(\alpha)$– целое и $k'(\alpha) = [k(\alpha)] + 1$, если $k(\alpha)$– нецелое.

В этом пункте мы докажем несколько предложений, которыми будем пользоваться при доказательстве основного результата. Следующее предложение непосредственно следует из определения множества $\partial\Re$ и числа $k(\alpha)$.

Лемма 2.1. *Пусть $\Re \in B_n$ и $\alpha \in N_0^n$. Тогда*

1) $\alpha/k(\alpha) \in \partial\Re$, при этом, если $\alpha/t \in \partial\Re$, то $k(\alpha) = t$

$$2) \alpha \in k'(\alpha)\,\Re \setminus [k'(\alpha) - 1]\,\Re.$$

Для $\Re \in B_n$ и $\mu_0 \in (0, d_0]$ через $\tilde{\Re}(\mu_0) = \tilde{\Re}(\Re, \mu_0)$ обозначим следующий (вполне правильный) многогранник в $R^{n+1,0}$ (обозначения $d_0 = d_0(\Re)$ и $\theta(\lambda)$ см. в (1.1))

$$\tilde{\Re}(\mu_0) = \{(\nu_0, \nu) \in R^{n+1,0} : \frac{\nu_0}{\mu_0} + \frac{(\lambda, \nu)}{\theta(\lambda)} \le 1, \quad \text{при всех} \quad \lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)\}.$$

Лемма 2.2. *Пусть $\Re \in B_n$, $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$, $\mu_0 \in (0, d_0(\Re)]$ и $(\alpha_0, \alpha) \in N_0^{n+1}$. Тогда $k((\alpha_0, \alpha), \tilde{\Re}) = k(\alpha, \Re) + \alpha_0/\mu_0$.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 достаточно доказать, что $(\alpha_0, \alpha)/[k(\alpha,) + \alpha_0/\mu_0] \in \partial\tilde{\Re}(\mu_0)$. Так как $\Lambda^n(\tilde{\Re}) = \{ (\frac{\theta(\lambda)}{\mu_0}, \lambda) : \lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)\}$, то в силу определения $k(\alpha, \Re)$ для любого $\lambda \in \Lambda^n(\tilde{\Re})$

$$\left(\frac{(\alpha_0, \alpha)}{k(\alpha, \Re) + \alpha_0/\mu_0}, \lambda\right) = [\alpha_0\,\frac{\theta(\lambda)}{\mu_0} + (\lambda, \alpha)]/[k(\alpha, \Re) + \alpha_0/\mu_0] =$$

$$= \frac{\alpha_0\,\theta(\lambda)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0} + \frac{\mu_0\,k(\alpha, \Re)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0}\,(\frac{\alpha}{k(\alpha, \Re)}, \lambda) \le$$

$$\le \frac{\alpha_0\,\theta(\lambda) + \mu_0\,k(\alpha, \Re)\,\theta(\lambda)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0} = \theta(\lambda). \tag{2.1}$$

С другой стороны, так как $\alpha/k(\alpha, \Re) \in \partial\Re$ (см. лемму 2.1), то $(\frac{\alpha}{k(\alpha,\Re)}, \lambda^0) = \theta(\lambda^0)$ для некоторого вектора $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}(\Re)$. Следовательно, имеем

$$((\alpha_0, \alpha, (\frac{\theta(\lambda^0)}{\mu_0}, \lambda^0))/(k(\alpha, \Re) + \frac{\alpha_0}{\mu_0}) =$$

$$= \frac{\alpha_0\,\theta(\lambda^0)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0} + \frac{\mu_0\,k(\alpha, \Re)}{\mu_0\,k(\alpha, \Re) + \alpha_0}\,(\frac{\alpha}{k(\alpha, \Re)}, \lambda^0) = \theta(\lambda^0). \tag{2.2}$$

Из (2.1), (2.2) и определения $\tilde{\Re}$ следует, что $(\alpha_0, \alpha)/(k(\alpha, \Re) + \frac{\alpha_0}{\mu_0}) \in \partial\tilde{\Re}$, поэтому в силу леммы 2.1 $k((\alpha_0, \alpha), \tilde{\Re}) = (k(\alpha, \Re) + \frac{\alpha_0}{\mu_0})$, что доказывает лемму 2.2. □

Для $\Re \in B_n$ и области $\Omega \subset E^n$ через $\Gamma^{\Re}(\Omega)$ обозначим мультианизотропный класс Жевре (см. [10]) как множество функций $f \in C^\infty(\Omega)$ таких, что для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует число $c = c(f, K) > 0$ такое, что

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \le c^{j+1}\, j^j, \quad \text{при всех} \quad \alpha \in j\,\Re \cup N_0^n,\ j = 0, 1, \ldots.$$

Так как $k'(\alpha, \Re) = l$ для любого $l \in N$ и $\alpha \in (l\,\Re) \setminus ((l-1)\,\Re)$, то следующее предложение непосредственно следует из определений класса $\Gamma^{\Re}$ и чисел $k(\alpha, \Re)$ и $k'(\alpha, \Re)$.

Лемма 2.3. *$f \in \Gamma^{\Re}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда для каждого компакта $K \subset \Omega$ существует постоянная $c = c(f, K) > 0$ такая, что выполняется одно из следующих эквивалентных условий*

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \le c^{k(\alpha,\Re)+1}\ (k(\alpha, \Re))^{k(\alpha,\Re)},$$

$$\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)| \le c^{k'(\alpha,\Re)+1}\ (k'(\alpha, \Re))^{k'(\alpha,\Re)}.$$

Приведем ещё два предложения, которые нам понадобятся при доказательстве основной теоремы. Ниже через $\hat{f}$ мы обозначаем преобразование Фурье функции f, через E' пространство распределений над $C^\infty(E^n)$, через S' пространство медленно растущих распределений, а через $\{\delta_{j,k}\}_{j,k=1}^{m-1}$ символ Кронекера.

Лемма 2.4. *(см.[6] или [4]) Пусть $\Re \in B_n$, $d_0(\Re) < 1$ (см. (1.1)). Тогда*

1) для $f \in \dot{\Gamma}^{\Re}(E^n) \equiv \Gamma^{\Re}(E^n) \cap C_0^\infty(E^n)$ существуют положительные числа ε и C такие, что

$$|\hat{f}(\xi)| \le C\, e^{-\varepsilon\, h(\xi)}, \quad \text{при всех} \quad \xi \in R^n, \tag{2.3}$$

2) если для распределения $f \in E'$ или $f \in S'$ выполняется оценка (2.3), то $f \in \Gamma^{\Re}(E^n)$.

Замечание 2.1. *Известно (см. [5], теорема 1.4.2), что $\dot{\Gamma}^{\Re}(\Omega) \setminus \{0\} = \emptyset$ при $d_0(\Re) \ge 1$.*

Лемма 2.5. *(см. [5], Лемма 12.7.7) Пусть $P(D) = D^m + a_1 D^{m-1} + \ldots + a_{m-1}D + a_m$ обыкновенный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $A = max\{|\lambda| : P(\lambda) = 0\}$, $B = max\{|Im\lambda| : P(\lambda) = 0\}$. Тогда для каждой пары $(j, k) : j, k = 0, 1, \ldots, m-1$ для решения задачи Коши*

$$P(D)v_k(t) = 0, \quad v_k^{(j)}(0) = \delta_{j,k}$$

справедлива оценка $|D^l v_k(t)| \leq 2^m\ (A+1)^{l+m-k}\ e^{(B+1)\,t},\ \ l = 0, 1, \ldots.$

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть* $\Re \in B_n$, $P_m(\xi_0,\xi)$ *m– однородный многочлен, гиперболический относительно* ξ_0, $\{Q_j(\xi_0,\xi)\}_{j=1}^{m-1}$ *j– однородные многочлены, при этом многочлен* Q_j $h_\Re$*–слабее многочлена* P_m $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$, $Q = Q_0 + \ldots + Q_{m-1}$. *Пусть многогранник* $\Im \in B_n$ *и натуральное число* $r > 1$ *таковы, что* $r\,\Re \subset \Im$. *Тогда для любых* $f_j \in \dot{\Gamma}^{\Im}(E^n)$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ *задача Коши*

$$R(D_0, D)u(t,x) \equiv [P_m(D_0, D) + Q(D_0, D)]u(t,x) = 0,\ \ t > 0 \tag{3.1}$$

$$D_0^j u(0,x) = f_j(x)\ \ j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{3.2}$$

имеет единственное решение из $\Gamma^{\Im}(E^{n+1})$.

Замечание 3.1. *Отметим, что аналогичная теорема доказана в работе [6] Д. Калво в случае, когда* $\Im = r\,\Re$ *для некоторого* $r \in N$, *т.е. когда многогранники* $\Re$ *и* $\Im$ *подобны и когда условия на младшие члены* $Q(\xi_0,\xi) = \sum q_{(\alpha_0,\alpha)}\ \xi_0^{\alpha_0}\ \xi^\alpha$ *ставятся на каждый моном этой суммы.*

Доказательство. Пусть $R(D_0,\xi) = P_m(D_0,\xi) + Q(D_0,\xi)$ обыкновенный дифференциальный оператор, зависящий от параметра $\xi \in \Re^n$. Обозначим через $F_j(t,\xi)$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ решение следующей задачи Коши

$$R(D_0,\xi)F(t,\xi) = 0,\ \ D_0^k F(0,\xi) = \delta_{j,k},\ \ k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Хорошо известно (см., например [5], Теорема 12.7.5), что решение задачи Коши

$$R(D_0,\xi)\ v(t,\xi) = 0,\ \ D_0^j v(0,\xi) = \hat{f}_j(\xi),\ \ j = 0, 1, \ldots, m-1 \tag{3.3}$$

можно представить в виде

$$v(t,\xi) = \sum_{j=0}^{m-1} \hat{f}_j(\xi)\ F_j(t,\xi). \tag{3.4}$$

В силу лемм 1.1 и 1.2 существует число $\kappa_1 > 0$ такое, что $R(\xi_0 + i\,\tau, \xi) \neq 0$ для всех $(\xi_0,\xi,\tau) \in R^{n+2}$, с $|\xi_0 + i\,\tau| \geq \kappa_1\,(|\xi| + 1)$. С другой стороны, в силу леммы 1.3 существует число $\kappa_2 > 0$ такое, что $|\tau| \leq \kappa_2 h_\Re(\xi)$ для точек $(\xi_0,\xi,\tau) \in R^{n+2}$, для которых $R(\xi_0 + i\,\tau, \xi) = 0$. Поэтому в силу леммы 2.5 имеем для всех $k \in N_0$ и $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$

$$|D_0^k F_j(t,\xi)| \leq 2^m\,[\kappa_1\,(|\xi| + 1) + 1]^{k+m-j}\ e^{[\kappa_2 h_\Re(\xi) + 1]\,|t|}. \tag{3.5}$$

Отсюда, из представления (3.4) и леммы 2.4 имеем с некоторыми положительными постоянными C_j, $(j = 1, ..., 5)$ (ниже $\check{v}(t,x)$ обратное преобразование Фурье функции $v(t,\xi)$ по ξ)

$$|D_0^{\alpha_0} D^{\alpha} \check{v}(t,x)| = |D_0^{\alpha_0} F_\xi^{-1}[\xi^\alpha v(t,\xi)]| =$$

$$= (2\pi)^{-n} |D_0^{\alpha_0} \int\limits_{R^n} e^{i(x,\xi)} \xi^\alpha v(t,\xi) d\xi| \le C_1 \int\limits_{R^n} |\xi^\alpha|\, |D_0^{\alpha_0} v(t,\xi)| d\xi \le$$

$$\le C_2 \int\limits_{R^n} h_{\Im}^{k(\alpha,\Im)}(\xi)[\kappa_1(|\xi|+1)+1]^{\alpha_0+m}\, e^{-C_3 h_\Im(\xi)}\, e^{\kappa_2\,(h_\Im(\xi)+1)\,|t|}\, d\xi \le$$

$$\le C_4 \int\limits_{R^n} h_{\Im}^{k(\alpha,\Im)+\alpha_0/d_0(\Im)}(\xi)\, e^{-C_3 h_\Im(\xi) + C_5\, h_\Re(\xi)(|t|+1)}\, d\xi.$$

Так как по условию теоремы $r\,\Re \subset \Im$, то $h_\Re(\xi)/h_\Im(\xi)$ сходится равномерно к 0 при $|\xi| \to \infty$. Поэтому в силу леммы 2.2 для любого $T > 0$ и для всех $t : |t| \le T$ отсюда имеем с некоторыми положительными постоянными $C_j = C_j(T)$ $(j = 6, 7, 8)$

$$|D_0^{\alpha_0} D^{\alpha} \check{v}(t,x)| \le C_6 \int\limits_{R^n} h_{\Im}^{k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})}(\xi)\, e^{-C_7\, h_\Im(\xi)}\, d\xi \le$$

$$\le C_8^{k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})+1} [k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})]^{k((\alpha_0,\alpha),\tilde{\Im})}.$$

В силу леммы 2.3 это означает, что $\check{v}(t,x) \in \Gamma^{\tilde{\Im}}(E_+^{n+1})$, где $E_+^{n+1} = \{(t,x), t > 0,\ x \in E^n\}$. Непосредственной проверкой легко убедится, что так полученная функция $\check{v}(t,x)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям (3.2), т.е. является решением поставленной задачи Коши. Единственность этого решения следует из теоремы Хольмгрена (см., например [5], Теорема 12.7.2). Теорема 3.1 доказана. □

Abstract. In this paper we prove existence of a unique solution of Cauchy problem in the multianisotropic Gevre spaces for a class of weighted hyperbolic equations with sufficiently general weight.

Список литературы

[1] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов," Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 91 (1967).

[2] S. Gindikin and L. R. Volevich, The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partal Differential Equations.Mathematics and Its Applications (Soviet Series), **86**, 266 p., Kluwer Academic Publishers, Dortrecht, Boston, London.

[3] L. Görding, "Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients", Acta Math., **85**, 1 – 62 (1951).

[4] L. Rodino, Linear partial diff. operators in Gevrey spaces, Word Scientific, Singapure (1993).
[5] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, 2, Springer - Verlag (1983).
[6] D. Calvo, Multianizotropic Gevrey Classes and Caushy Problem, Ph. D. Thesis in Mathematics, Universita degli Studi di Pisa (1999).
[7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "О многочленах, гиперболических с весом. Изв. НАН Армении, Мат., 49, но. 5, 23 – 40 (2014).
[8] S. L. Svensson, "Necessary and sufficient conditions for the hyperbolisity of polynomials with hyperbolic principal parts", Ark. Mat. 8, 145 – 162 (1969).
[9] Г. Г. Казарян, "Гиперболические операторы с данной старшей частью", Дифф. уравнения, 15, но. 6, 1059 – 1069 (1979).
[10] V. N. Margaryan, G. H. Hakobyan, "On Gevrey type solutions of hypoelliptic equations", Izv. Nat. Acad. Armenii, Math., 31, no. 2, 33 – 47 (2002).
[11] E. Larson, "Generalized hyperbolity", Arkiv für Mat., 7, no. 2, 11 – 32 (2003).
[12] L. Cattabriga, "Alcuni problemi por equazoni differentiali lineari qon coefficienti constanti", Quad. Un. Mat. It. 24, Pitadora, Bologna (1983).

Поступила 31 января 2014