Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 3, 2015, стр. 3-21.

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ L^p_μ

М. Г. ГРИГОРЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *gmarting@ysu.am*

Аннотация. В статье доказывается, что для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1-\epsilon$ и весовая функция $\mu(x)$; $\mu(x) = 1$ на E такие, что для любого $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f \in L^p_\mu(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E и такую, что как ее жадный алгоритм, так и ряд Фурье по тригонометрической системе сходятся к ней по нормам $L^1[0,1)$ и $L^p_\mu[0,1]$.

MSC2010 numbers: 42C10, 42B05.

Ключевые слова: жадный алгоритм; сходимость в $L^p_\mu[0,1]$; тригонометрическая система.

1. Введение

Работа продолжает исследования автора о сходимости жадных алгоритмов с точки зрения широко известных классических теорем Н. Н. Лузина и Д. Е. Меньшова "об исправлении функций" (см. [1], [2]).

Для функции $f \in L^1\,[0,1]$, $(f(x \pm 1) = f(x), x \in [0,1))$ коэффициенты Фурье и частичная сумма ряда Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ задаются формулами

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t)\,e^{-2\pi ikt}dt,\ k = 0, \pm1, \pm2, ...,\ \ c_{-k} = \overline{c}_k, \tag{1.1}$$

и

$$S_m(x,f) = \sum_{|k|\le m} c_k(f)\,e^{2\pi ikx},\ m = 0,1,2,\dots . \tag{1.2}$$

Пусть $L^p_\mu[0,1]$– весовое пространство:

$$L^p_\mu[0,1]=\{f(x) : \int_0^1 |f(x)|^p \mu(x)\,dx < \infty,\},\ 1 \le p < \infty. \tag{1.3}$$

Перестановку неотрицательных целых чисел $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\sigma(-k) = -\sigma(k)$ назовем убывающей, если

$$|c_{\sigma(k)}(f)| \geq |c_{\sigma(k+1)}(f)|, \quad k = 1, 2, \dots . \tag{1.4}$$

Множество таких перестановок обозначим через $D(f)$. В случае строгих неравенств (1.4), множество $D(f)$ содержит только одну убывающую перестановку.

Для каждой функции $f \in L^1[0,1]$ и для любого элемента $\sigma \in D(f)$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f,\sigma)\}_{m=1}^{\infty}$, следующим образом

$$G_m(x,f) = G_m(x,f,\sigma) = \sum_{|k|\leq m} c_{\sigma(k)}(f) e^{2\pi i \sigma(k) x}. \tag{1.5}$$

Заметим, что оператор $G_m(x,f)$ зависит от σ и реализует наилучшее m-членное приближение по тригонометрической системе в пространстве $L^2[0,1]$.

Метод приближения функции f последовательностью нелинейных операторов $\{G_m(f,\sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ называется жадным (гриди) алгоритмом функции f по тригонометрической системе$\{e^{2\pi i k x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$.

Говорят, что жадный алгоритм функции f по тригонометрической системе сходится в *весовом пространстве* $L^p_\mu[0,1]$, если при некотором $\sigma \in D(f)$ имеем

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int_0^1 |G_m(x,f) - f(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} = 0.$$

Жадные алгоритмы для банаховых пространств, относительно нормированных базисов изучены в работах [3] - [15] и [17] - [21].

Т. В. Корнер ответив на вопрос поставленный Карлесоном и Койфманом, построил в [4] пример непрерывной функции, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится почти всюду. В работе [5] В. Н. Темляков доказал существование функции $f_0(x) \in \bigcap_{1\leq p<2} L^p[0,2\pi]$ жадный алгоритм которой по тригонометрической системе расходится по мере. В работе [6] доказано, что для каждого $p \geq 1$, $p \neq 2$, существует функция $f(x) \in L^p(0,1)$, жадный алгоритм которой по системе Уолша расходится в $L^p(0,1)$ (см. также [20]). Естественен следующий

Вопрос 1.1. Существует ли измеримое множество e сколь угодно малой меры такое,что после изменения значений любой функции класса $L^p(0,1), p \geq 1$ на e, жадный алгоритм по системе Уолша и по тригонометрической системе измененной функции сходился бы к ней (*почти всюду* по норме $L^p(0,1)$, равномерно)?

Важно отметить, что в работе [7] показано существование полной в $L^2(0,1)$ ортонормированной системы, для которой поставленный вопрос при $p>2$ имеет отрицательный ответ, точнее построена ортонормированная система $\psi = \{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограниченных функций и непрерывная функция $g(x)$ такие, что если для некоторой функции $f \in L^p(0,1)$, $p>2$; $\mid \{x \in [0,1]; f(x) = g(x)\} \mid > 0$, то ее жадный алгоритм $\{G_m(x,\psi,f)\}$ по системе ψ расходится в $L^p(0,1)$.

Мы рассмотрим вопрос 1.1 в двух постановках:

1. Когда значения функции $f(x)$ изменяются на зависящем от функции множестве сколь угодно малой меры.

2. Когда исключительное множество e, на котором происходит изменение не зависит от исправляемой функции $f(x)$, т.е. оно универсально, обслуживает целый функциональный класс.

В соответствии с этими постановками в работах [8] – [11] автора для системы Уолша доказаны следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Для любого $0<\epsilon<1$ и для каждой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, $|\{x \in [0,1]; f \neq \tilde{f}\}| < \epsilon$, жадный алгоритм которой по системе Уолша сходится к ней почти всюду на [0, 1].*

Теорема 1.2. *Для любых $0<\epsilon<1$, $2 \le p \le \infty$ и для каждой функции $f(x) \in L^p(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^p(0,1)$, $|\{x \in [0,1]; f \neq \tilde{f}\}| < \epsilon$ такую, что его жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней в $L^p[0,1]$ и все ненулевые члены в последовательности $\{|c_n(\tilde{f})|\}$ расположены в убывающем порядке.*

Теорема 1.3. *Для любого $0<\epsilon<1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $\mid E \mid > 1-\epsilon$ и весовая функция $\mu(x)$, $\mu(x)=1$ на E такие, что для любого $p \in [1,\infty)$ и для каждой функции $f \in L^p_\mu(0,1)$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1(0,1)$, совпадающую с f на E такую, что ее жадный алгоритм по системе Уолша сходится к ней по нормам $L^p_\mu(0,1)$ и $L^1(0,1)$.*

Сразу же отметим, что остается открытым следующий

Вопрос 1.2. Верны ли теоремы 1.1 – 1.3 при $p>2$ для тригонометрической системы?

Отметим также, что в случае $p \in [1,2]$ для тригонометрической системы в работе [12] автором доказано, что

Для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $| E |> 1 - \epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ можно найти функцию $\tilde{f} \in L^1[0,1]$, совпадающую с f на E такую, что ее жадный алгоритм по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^p(E)$, т.е.

$$\lim_{m\to\infty} \left(\int_E |G_m(x,\tilde{f}) - \tilde{f}(x))|^p dx \right)^{1/p} = 0.$$

В настоящей работе доказывается теорема 1.4, которая является усилением выше сформулированного результата

Теорема 1.4. *Для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ и весовая функция $\mu(x)$; $0 < \mu(x) \leq 1$; $\mu(x) = 1$ на E такие, что для любого $p \in [1,2)$ и для каждой функции $f(x) \in L^p_\mu[0,1]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1]$ совпадающую с $f(x)$ на E, жадный алгоритм которой по тригонометрической системе сходится к ней по нормам $L^1[0,1]$ и $L^p_\mu[0,1]$.*

Отметим, что в связи с изучением сходимости жадного алгоритма вновь полученной, исправленной, функции $\tilde{f}(x)$ возник следующий вопрос, который на мой взгляд представляет самостоятельный интерес.

Вопрос 1.3. Можно ли изменить значения любой функции $f(x)$ класса $L^p[0,1]$, $p \geq 1$ на множестве малой меры так, чтобы все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье вновь полученной функции по классическим системам (в частности по системе Уолша и по тригонометрической системе), по модулю были бы расположены в убывающем порядке?

В работе [10] доказано, что вопрос 3 для системы Уолша имеет положительный ответ (см. также [11] – [15]), а для тригонометрической системы этот вопрос остается открытым.

Теорема 1.4 следует из более общей Теоремы 1.5.

Теорема 1.5. *Для любой непрерывной неотрицательной возрастающей функции $\omega(t)$, $t \in (0,\infty)$ с $\omega(+0)= 0$ и для любого $0 < \epsilon < 1$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1 - \epsilon$ и весовая функция $\mu(x)$; $0 < \mu(x) \leq 1$, $\mu(x) = 1$ на E такие, что для любого $p \in [1,2]$ и для каждой функции $f(x) \in L^p_\mu[0,1]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1]$ совпадающую* *с $f(x)$ на E и перестановку $\{\sigma(k)\}, (\sigma(-k) = -\sigma(k))$ целых чисел $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ такие, что*

1) как жадный алгоритм, так и ряд Фурье функции $g(x)$ по тригонометрической системе $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ сходятся к ней по нормам $L^1[0,1]$и $L^p_\mu[0,1]$:

2) $$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(g)|^2 \omega(|c_n(g)|) < \infty, \quad \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \epsilon;$$

3) $D(f)$ содержит только одну убывающую перестановку$\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, (см. (1.4)).

В связи со вторым утверждением теоремы 1.5 заметим,что если функция $f \in L^1(0,1)$ и $f(x) \notin L^2(E)$, то для каждой функции $g(x) \in L^1[0,1)$ совпадающая с f на E, последовательность $\{c_n(g)\} \notin l_2$. Отметим, что из пункта 2 теоремы 1.5 вытекает, что последовательность коэффициентов Фурье исправленной функции $g(x)$ по тригонометрической системе лежит во всех $l_q, q > 2$, т.е. $(\sum_{n=0}^{\infty} |c_{\sigma(n)}(g(x))|^q < \infty$, для любого $q > 2)$. В теореме 1.5 исключительное множество е, на котором происходит изменение, не зависит от исправляемой функции $f(x)$, оно универсально. Отметим также, что в случае, когда это множество е зависит от функции в [16] А. М. Олевский доказал, что существует функция $g(x) \in C[0, 2\pi]$ такая, что для любой функции $f(x)$ с мерой $|\{x \in [0, 2\pi] \ ; \ f(x) = g(x)\}| > 0$, последовательность коэффициентов Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе $\{a_n(f), b_n(f)\} \notin l_p$ при всех $p \in (0, 2)$.

2. Доказательство основных лемм

Повторяя рассуждения приведенные при доказательстве леммы 2 работы автора [12], получим следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Пусть $\omega(t)$, $t \in (0, \infty)$, непрерывная неотрицательная возрастающая функция с $\omega(+0) = 0$. Тогда для любых чисел, $\delta \in (0,1)$, $\epsilon \in (0,1)$, $N > 1$ и для каждой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ $(||f|| > 0)$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$, функция $g(x)$, полином $Q(x)$ вида*

$$Q(x) = \sum_{|k|=N}^{M} a_k e^{2\pi ikx}, \quad a_{-k} = \overline{a}_k,$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{k=N}^{M}$ чисел $N, ..., M$, ($\sigma(-k) = -\sigma(k)$), которые удовлетворяют условиям:

1) $$g(x) = f(x), \quad x \in E, \quad |E| > 1 - \epsilon,$$

2) $$\int_0^1 |g(x)|dx < 2\int_0^1 |f(x)|dx, \left[\int_0^1 |Q(x) - g(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} < \delta,$$

3) $$\sum_{|k|=N}^{M} |a_k|^2 \omega(|a_k|) < \delta,$$

4) $$\delta > |a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad \text{для любого} \quad k \in [N, M),$$

5) $$\max_{N \le m \le M} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_k e^{2\pi i k x} \right| dx < 3\int_0^1 |f(x)|dx,$$

6) $$\max_{N \le m \le M} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} \right| dx < 3\int_0^1 |f(x)|dx.$$

Для каждого $p \in [[1;2]$ и для любого измеримого подмножества $e \subset E$

7) $$\max_{N \le m \le M} \int_e \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_k e^{2\pi i k x} \right|^p dx < 2\int_e |f(x)|^p dx + \delta$$

8) $$\max_{N \le m \le M} \int_e \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} \right|^p dx < 2\int_e |f(x)|^p dx + \delta.$$

Основным средством для доказательства теоремы 1.5 является следующая лемма.

Лемма 2.2. *Пусть $\omega(t)$, $t \in (0, \infty)$ – непрерывная неотрицательная возрастающая функция с $\omega(+0) = 0$. Тогда для любого $0 < \epsilon < 1$ существует измеримая функция $\mu(x)$ с $|\{x \in [0,1], \mu(x) = 1\}| > 1 - \epsilon$ такая, что для любых $\delta \in (0,1)$, $\epsilon \in (0,1)$ и $N > 1$ и для каждой функции $f(x) \in L^2[0,1]$ ($||f|| > 0$) существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$, функция $g(x)$, полином $Q(x)$ вида*

$$Q(x) = \sum_{|k|=N}^{M} a_k e^{2\pi i k x} = \sum_{|k|=N}^{M} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x}, \quad a_{-k} = \overline{a}_k,$$

(здесь $\{\sigma(k)\}_{k=N}^{M}$, $\sigma(-k)=-\sigma(k)$ -некоторая перестановка натуральных чисел $N,...,M$) которые удовлетворяют условиям:

1) $$g(x)=f(x),\quad x\in E,\qquad |E|>1-\epsilon,$$

2) $$\int_0^1|g(x)|dx<2\int_0^1|f(x)|dx,\left[\int_0^1|Q(x)-g(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}<\delta,$$

3) $$\int_0^1|g(x)|^p\,\mu(x)\,dx<2\int_0^1|f(x)|^p\mu(x)\,dx+\delta,\quad \text{для любого}\quad p\in[1,2],$$

4) $$\sum_{|k|=N}^{M}|a_k|^2\omega(|a_k|)<\delta,$$

5) $$\delta>|a_{\sigma(k)}|>|a_{\sigma(k+1)}|>0,\quad \text{для любого}\quad k\in[N,M),$$

6) $$\max_{N\le m\le M}\int_0^1\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_ke^{2\pi ikx}\right|dx<3\int_0^1|f(x)|dx,$$

7) $$\max_{N\le m\le M}\int_0^1\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_{\sigma(k)}e^{2\pi i\sigma(k)x}\right|dx<3\int_0^1|f(x)|dx,$$

8) $$\max_{N\le m\le M}\int_0^1\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_ke^{2\pi ikx}\right|^p\mu(x)\,dx<2\int_0^1|f(x)|^p\mu(x)\,dx+\delta,\ \text{для любого}\ p\in[1,2],$$

9) $$\max_{N\le m\le M}\int_0^1\left|\sum_{|k|=N}^{m}a_{\sigma(k)}e^{2\pi i\sigma(k)x}\right|^p\mu(x)\,dx<2\int_0^1|f(x)|^p\mu(x)\,dx+\delta,\ \text{для любого}\ p\in[1,2].$$

Доказательство. Пусть $0<\epsilon<1$. Если обозначим через

(2.1) $$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

последовательность полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами и последовательно применим Лемму 2.1, то можем найти последовательности функций $\{\overline{g}_n(x)\}$, множеств $\{E_k\}$ и полиномов

(2.2) $$Q_n(x)=\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1}a_{\sigma_n(k)}^{(n)}e^{2\pi i\sigma_n(k)x}=\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1}a_k^{(n)}e^{2\pi ikx},\quad a_{-k}^{(n)}=\overline{a}_k^{(n)},$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$, $(\sigma_n(-k)=-\sigma_n(k)), m_0=1$; для каждого фиксированного n, некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1}+1, ..., m_n-1$, которые удовлетворяют условиям:

$$g_n(x)=f_n(x), \quad x\in E_n, \tag{2.3}$$

$$|E_n|>1-4^{-8(n+2)}, \tag{2.4}$$

$$\int_0^1 |g_n(x)|dx<3\int_0^1 |f_n(x)|dx, \tag{2.5}$$

$$\left(\int_0^1 |Q_n(x)-g_n(x)|^2\,dx\right)^{1/2}<4^{-8(n+2)}, \tag{2.6}$$

(2.7)
$$\frac{1}{n}>|a_k^{(n)}|>|a_{k+1}^{(n)}|>|a_{m_n}^{(n+1)}|>0, \quad \text{для любого} \quad k\in[m_{n-1},m_n-1), \quad n\geq 1,$$

$$\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1}\left|a_k^{(n)}\right|^2\omega(\left|a_k^{(n)}\right|)<4^{-8(n+2)}, \tag{2.8}$$

$$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_{\sigma_n(k)}^{(n)}e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right|\leq 3\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{2.9}$$

$$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_k^{(n)}e^{2\pi ikx}\right|\leq 3\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{2.10}$$

для каждого $p\in[1;2]$ и для любого измеримого подмножества $e\subset E_n$

$$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n}\left(\int_e\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_{\sigma_n(k)}^{(n)}e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right|^p dx\right)^{1/p}\leq$$

$$\leq 3\left(\int_e|f_n(x)|^p dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)} \tag{2.11}$$

$$\max_{m_{n-1}\leq N<m_n}\left(\int_e\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_k^{(n)}e^{2\pi ikx}\right|^p dx\right)^{1/p}\leq$$

$$\leq 3\left(\int_e|f_n(x)|^p dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)}. \tag{2.12}$$

Положим

$$\Omega_n = \bigcap_{s=n}^{\infty} E_s, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{2.13}$$

$$G = \Omega_{n_0}, \quad n_0 = [\log_{\frac{1}{2}} \epsilon] + 1, \tag{2.14}$$

$$B = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Omega_n. \tag{2.15}$$

Очевидно, что (см. (2.4), (2.13) – (2.15)) $|B| = 1, \ \ |G| > 1 - \epsilon.$

Определим функцию $\mu(x)$ следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \in G \cup ([0,1] \setminus B), \\ \mu_n, & x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \ \ n \geq n_0 + 1, \end{cases} \tag{2.16}$$

где

$$\mu_n = \left[2^{2n} \prod_{s=1}^{n} h_s \right]^{-1}$$

и

$$h_k = \sup_{1 \leq p \leq 2} (1 + \int_0^1 |g_k(x)|^p dx + \max_{m_{k-1} < m \leq m_k} \int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p dx +$$

$$+ \max_{m_{k-1} < m \leq m_k} \int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_s^{(k)} e^{2\pi i s x} \right|^p dx). \tag{2.17}$$

Из (2.16), (2.17) для всех $k \geq 1$ и $p \in [1, 2]$ получим

$$\int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |g_k(x)|^p \mu(x) dx = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |g_k(x)|^p \mu_n dx \right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-2n} \left(\int_0^1 |g_k(x)|^p dx \right) h_k^{-1} < \frac{1}{3} 2^{-2k}. \tag{2.18}$$

Аналогично для всех $k > n_0$ и $p \in [1, 2]$ будем иметь

$$\max_{m_{k-1} \leq m < m_k} \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x) dx < \frac{1}{3} 2^{-2k}. \tag{2.19}$$

Из соотношений (2.3), (2.16) - (2.18) вытекает

$$\int_0^1 |g_k(x)|^p \mu(x) dx = \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^p \mu(x) dx + \int_{[0,1] \setminus \Omega_k} |g_k(x)|^p \mu(x) dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 |f_k(x)|^p \mu(x) dx + 2^{-2k} \quad \forall p \in [1, 2]. \tag{2.20}$$

Учитывая соотношения (2.11), (2.16)-(2.19), для всех $m \in [m_{k-1}, m_k)$, $k \geq n_0$ и $p \in [1,2]$ имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x)dx = \int_{\Omega_k} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x)dx +$$

$$+ \int_{[0,1]\setminus\Omega_k} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p \mu(x)dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} \mu_n \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_{\sigma_k(s)}^{(k)} e^{2\pi i \sigma_k(s) x} \right|^p dx =$$

$$\leq \frac{1}{3} \cdot 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} \mu_n \left[4^{-8(k+1)} + 3 \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p =$$

$$= \frac{1}{3} 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} \left[\frac{\mu_n^{\frac{1}{p}}}{2^{2(k+1)}} + \left(\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \cdot \mu_n dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} 2^{-2k} + \sum_{n=n_0+1}^{k} 2^p \cdot \left[\frac{\mu_n}{2^{2p(k+1)}} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_k(x)|^p \cdot \mu_n dx \right] \leq$$

$$\leq \frac{1}{3} 2^{-2k} + 2^p \cdot 2^{-2p(k+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^{k} \mu_n + 2^p \cdot \int_{\Omega_k} |f_k(x)|^p \cdot \mu(x)dx \leq$$

$$\leq 2^p \left(2^{-2k} + \int_0^1 |f_k(x)|^p \cdot \mu(x)dx \right). \tag{2.21}$$

Аналогично (см. (2.12), (2.16), (2.18)) для всех $m \in [m_{k-1}, m_k)$, $k > n_0$ и $p \in [1,2]$ будем иметь

$$\int_0^1 \left| \sum_{|s|=m_{k-1}}^{m} a_s^{(k)} e^{2\pi i s x} \right|^p \mu(x)dx \leq 2^p \left(2^{-2k} + \int_0^1 |f_k(x)|^p \mu(x)dx \right). \tag{2.22}$$

Возьмем функцию $f_{k_0}(x) (m_{k_0-1} - 1 > N)$ из последовательности (2.1) такую, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{k_0}(x)|^2 dx < \min\{ \left(\frac{\delta}{4} \right)^2, \frac{\int_0^1 |f(x)| dx}{2} \}, k_0 > [\log_{\frac{1}{2}} \delta] + n_0 . \tag{2.23}$$

Положим

(2.24)

$$Q(x) := \sum_{|k|=N}^{m_{k_0-1}-1} 2^{-2m_{k_0}-k} e^{2\pi i k x} + \sum_{|k|=m_{k_0-1}}^{m_{k_0}-1} a_k^{(n)} e^{2\pi i k x} = \sum_{|k|=N}^{M} a_k e^{2\pi i k x}, \quad a_{-k} = \overline{a}_k$$

$$E = E_{k_0}, \quad g(x) = f(x) + g_{k_0}(x) - f_{k_0}(x)$$

Отсюда и из (2.3) – (2.6), (2.16), (2,20) и (2.23) вытекает, что функции $g(x)$, $\mu(x)$, множество E и полином $Q(x)$ удовлетворяют требованиям 1) - 3) леммы 2.

Учитывая соотношения (2.7)-(2.10), и (2.20) – (2.24) получим, что функции $g(x)$, $\mu(x)$ и полином $Q(x)$ удовлетворяют требованиям 4)-9) леммы 2.2. $\square$

3. Доказательство Теоремы 1.5

Пусть $0 < \epsilon < 1$. Если обозначим через

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \tag{3.1}$$

последовательность полиномов по тригонометрической системе с рациональными коэффициентами и последовательно применим Лемму 2.2, то можем найти весовую функцию $\mu(x)$ с

$$|\ \{x \in [0,1],\, \mu(x) = 1\}\ | > 1 - \epsilon/2, \tag{3.2}$$

и последовательности функций $\{\overline{g}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, множеств $\{E_n\}$ и полиномов

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} a^{(n)}_{\sigma_n(k)} e^{2\pi i \sigma_n(k) x} = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} a^{(n)}_k e^{2\pi i k x}, \quad a^{(n)}_{-k} = \overline{a}^{(n)}_k, \tag{3.3}$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$, $(\sigma_n(-k) = -\sigma_n(k))$, $m_0 = 1$, для каждого фиксированного n, некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1}+1, ..., m_n-1$, которые для всех $n \geq 1$ удовлетворяют условиям:

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \tag{3.4}$$

$$|E_n| > 1 - 4^{-8(n+2)}, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)| dx < 3 \int_0^1 |f_n(x)| dx, \tag{3.6}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)|^p \mu(x) dx < 2 \int_0^1 |f_n(x)|^p \mu(x) dx + 4^{-8(n+2)}, \tag{3.7}$$

$$\left(\int_0^1 \left|\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} < 4^{-8(n+2)}, \tag{3.8}$$

(3.9)
$$\frac{1}{n} > |a^{(n)}_{\sigma_n(k)}| > |a^{(n)}_{\sigma_n(k+1)}| > |a^{(n+1)}_{\sigma_n(m_n)}| > 0, \quad \forall n \geq 1, \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n - 1)\ \forall n \geq 1,$$

$$\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} \left|a^{(n)}_k\right|^2 \omega(\left|a^{(n)}_k\right|) < 4^{-8(n+2)}, \tag{3.10}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a^{(n)}_{\sigma_n(k)}e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right|\le 3\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{3.11}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a^{(n)}_{k}e^{2\pi ikx}\right|\le 3\int_0^1|f_n(x)|dx, \tag{3.12}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\left(\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a^{(n)}_{\sigma_n(k)}e^{2\pi i\sigma_n(k)x}\right|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}\le$$

$$\le 3\left(\int_0^1|f_n(x)|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)},\forall p\in[1,2) \tag{3.13}$$

и

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n}\left(\int_0^1\left|\sum_{|k|=m_{n-1}}^{N}a^{(n)}_{k}e^{2\pi ikx}\right|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}\le$$

$$\le 3\left(\int_0^1|f_n(x)|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}+4^{-8(n+2)},\forall p\in[1,2). \tag{3.14}$$

Положим

$$E=(\bigcap_{n=n_0}^{\infty}E_n)\bigcap\{x\in[0,1],\,\mu(x)=1\},n_0=|\log_{\frac12}\epsilon|+1. \tag{3.15}$$

Очевидно, что (см. (3.2),(3.5),(3.15)) $|E|>1-\epsilon$.

Пусть $p\in[1,2]$ и $f(x)\in L^p_\mu[0,1]$. (см. (1.3)) Положим

$$f^\circ(x)=\begin{cases}f(x), & x\in E;\\ 0, & x\notin E.\end{cases} \tag{3.16}$$

Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(\int_0^1\left|\sum_{n=1}^{N}f_{k_n}(x)-f^\circ(x)\right|^p dx\right)^{1/p}=0, \tag{3.17}$$

$$\left(\int_0^1|f_{k_n}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\le 4^{-8(n+2)},\quad n\ge 2, \tag{3.18}$$

где

$$f_{k_1}(x)=\sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1}a_ke^{2\pi ikx}=\sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1}a_{\overline{\sigma}(k)}e^{2\pi i\overline{\sigma}(k)x},\quad |a_{\overline{\sigma}(k)}|>|a_{\overline{\sigma}(k+1)}|>0, \tag{3.19}$$

и $\overline{\sigma}(|k|)$-некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, ..., m_{\nu_1} - 1$, $\overline{\sigma}(-k) = -\overline{\sigma}(k)$, ($a_{-k} = \overline{a}_k, \forall |k| \in [0, m_{\nu_1})$).

Очевидно, что (см. (3.16)-(3.17))

$$\left(\int_E |f(x) - f_{k_1}(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{3.20}$$

Положим

$$a_k = \begin{cases} a_k, & k \in [0, m_{\nu_1}), \\ a_k^{(n)}, & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad n \geq \nu_1 + 1, \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\sigma(k) = \begin{cases} \overline{\sigma}(k), & k \in [0, m_{\nu_1}), \\ \sigma_n(k), & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad \forall n \geq \nu_1 + 1. \end{cases} \tag{3.22}$$

Пусть

$$g_1(x) \equiv Q_1(x) = f_{k_1}(x), \ l(1) = m_{\nu_1}, \ b_{l(1)} = \min\{4^{-32}; \frac{1}{2}|a_{\overline{\sigma}(m_{\nu_1}-1)}|\}. \tag{3.23}$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_1 < ... < \nu_{q-1}$, $l(1) < ... < l(q-1)$, $\{b_{l(k)}\}_{k=1}^{q-1}$, функции $g_n(x)$, $f_{\nu_n}(x)$, $1 \leq n \leq q-1$, и полиномы

$$Q_n(x) = \sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} = \sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_k e^{2\pi i k x}, \ \ M_n = m_{\nu_n - 1},$$

$$\overline{M}_n = m_{\nu_n} - 1, \ \ M_2 > m_{\nu_1} = \overline{M}_1 \ ,$$

удовлетворяющие условиям:

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \ \ x \in E_{\nu_n}, \quad 1 < n \leq q-1,$$

$$\int_0^1 |g_n(x)| dx < 4^{-3n}, \ \ 1 < n \leq q-1,$$

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n} \left[\left(Q_k(x) + b_{l(k)} e^{2\pi i l(k) x}\right) - g_k(x)\right]\right|^p dx\right)^{1/p} < 4^{-8(n+1)}, \tag{3.24}$$

$$l(n) = \min\{k \in N: \ \ k \notin [1, m_{\nu_1}) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} [M_j, \overline{M}_j]\right) \cup \{l(s)\}_{s=1}^{n-1}\},$$

$$\max_{M_n \leq N < \overline{M}_n} \int_0^1 \left|\sum_{|k|=M_n}^{N} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x}\right| dx < 4^{-3n}, \ \ 1 < n \leq q-1,$$

$$\max_{M_n\le N<\overline{M}_n}\int_0^1\left|\sum_{|k|=M_n}^{N}a_ke^{2\pi ikx}\right|dx<4^{-3n},\ \ 1<n\le q-1,$$

$$\max_{M_n\le N<\overline{M}_n}\left(\int_0^1\left|\sum_{|k|=M_n}^{N}a_{\sigma(k)}e^{2\pi i\sigma(k)x}\right|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}<4^{-3n},\ \ 1<n\le q-1\ ,$$

$$\max_{M_n\le N<\overline{M}_n}\left(\int_0^1\left|\sum_{|k|=M_n}^{N}a_ke^{i2\pi kx}\right|^p\mu(x)dx\right)^{1/p}<4^{-3n},\ \ 1<n\le q-1\ ,$$

$|a_{\sigma(M_n)}|>...>|a_{\sigma(k)}|>...>|a_{\sigma(\overline{M}_n)}|>b_{l(n)}>0$, $\forall k\in(M_n,\overline{M}_n)$, $1<n\le q-1$.

Возьмем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что

$$\left(\int_0^1\left|f_{\nu_q}(x)-\left(f_{k_q}(x)-\sum_{n=2}^{q-1}\left[\left(Q_n(x)+b_{l(n)}e^{2\pi il(n)x}\right)-g_n(x)\right]\right)\right|^p dx\right)^{1/p}<$$

(3.25) $$<4^{-8(q+2)},$$

и

(3.26) $$|a_{\sigma(m_{\nu_q-1})}|<b_{l(q-1)},\ \ \nu_q>\nu_{q-1}.$$

Согласно (3.17) и (3.23) имеем

$$\left(\int_0^1\left|f_{k_q}(x)-\sum_{n=2}^{q-1}\left[\left(Q_n(x)+b_{l(n)}e^{2\pi il(n)x}\right)-g_n(x)\right]\right|^p dx\right)^{1/p}<4^{-8q-1}.$$

Отсюда и из (3.24) вытекает

(3.27) $$\left(\int_0^1|f_{\nu_q}(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<4^{-8q}.$$

Положим

(3.28) $$Q_q(x)=\overline{Q}_{\nu_q}(x)=\sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q}a_{\sigma(k)}e^{2\pi i\sigma(k)x}=\sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q}a_ke^{2\pi ikx},$$

где

(3.29) $$\overline{M}_q=m_{\nu_q}-1,\ \ M_q=m_{\nu_q-1}\ ,\ (.\ (3.3))$$

(3.30) $$g_q(x)=f_{k_q}(x)+[\overline{g}_{\nu_q}(x)-f_{\nu_q}(x)]\ ,\ \ (.\ (3.17)\ ,\ (3.25)),$$

(3.31) $$\begin{cases}l(q)=\min\{\ \ k\notin[0,m_{\nu_1})\cup\left(\bigcup\limits_{n=2}^{q-1}[M_n,\overline{M}_n]\right)\cup\{l(s)\}_{s=1}^{q-1}\}\},\\ b_{l(q)}=\min\left(4^{-8(q+3)};\ \ \frac12|a_{\sigma(\overline{M}_q)}|\right).\end{cases}$$

Учитывая соотношения (3.4), (3.6), (3.24),(3.25),(3.27) и (3.30) получим

$$g_q(x) = f_{k_q}(x), \quad x \in E_{\nu_q}, \tag{3.32}$$

$$\int_0^1 |g_q(x)|dx \le \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right) \right| dx +$$

$$+ \int_0^1 |\overline{g}_{\nu_q}(x)|dx + \int_0^1 \left| \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right| dx < 4^{-3q}. \tag{3.33}$$

Аналогично для всех $q > 1$ и $p \in [1, 2]$ получим

$$\left(\int_0^1 |g_q(x)|^p \mu(x)\, dx \right)^{1/p} \le 4^{-3q}. \tag{3.34}$$

В силу (3.8), (3.25), (3.31) имеем

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{j=2}^{q} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right) \right|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ b_{l(q)} + \left(\int_0^1 |\overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < 4^{-8(q+1)}. \tag{3.35}$$

Из соотношений (3.9), (3.11) -(3.14), (3.26) и (3.27), (3.29) вытекает

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} \right| dx \le 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|dx < 4^{-3q}, \tag{3.36}$$

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_k e^{2\pi i k x} \right| dx \le 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|dx < 4^{-3q}, \tag{3.37}$$

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le 3 \left(\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-3q}, \tag{3.38}$$

$$\max_{M_q \le N < \overline{M}_q} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_k e^{2\pi i k x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} < 4^{-3q}, \tag{3.39}$$

(3.40) $$b_{l(q-1)} > |a_{\sigma(M_q)}| > ... > |a_{\sigma(k)}| > ... > |a_{\sigma(\overline{M}_q)}| > b_{l(q)} \ \forall q \geq 2.$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}_{q=1}$, множеств $\{G_q\}_{q=1}$, чисел $\{l(q)\}_{q=1}^{\infty}$, $\{b_{l(q)}\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}_{q=1}$, удовлетворяющих условиям (3.31) - (3.40) для всех $q \geq 1$.

Учитывая выбор $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{[M_q, \overline{M}_q]\}_{q=1}^{\infty}$ и $\{l(q)\}_{q=1}^{\infty}$ (см. (3.26), (3.29), (3.31)) получим, что последовательность натуральных чисел

(3.41) $$\sigma(1), ..., \sigma(m_{\nu_1} - 1),\ l(1), ..., \sigma(M_n), ..., \sigma(k), ..., \sigma(\overline{M}_n),\ l(n), ... ,$$

есть некоторая перестановка последовательности $0, 1, 2, ..., n, ...$.

Последовательность (3.41) запишем в виде

$$\sigma_f(1),\ \ \sigma_f(2), ..., \sigma_f(k), ...$$

Определим функцию $g(x)$ и ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} d_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x}$ следующим образом

(3.42) $$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

где

(3.43) $$g_1(x) = Q_1(x) = f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=1}^{m_{\nu_1}-1} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x} = \sum_{|k|=1}^{m_{\nu_1}-1} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} +$$

(3.44) $$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_{\sigma(k)} e^{2\pi i \sigma(k) x} + b_{l(n)} e^{2\pi i l(n) x} \right],$$

где

$$\{d_{\sigma_f(k)}\}_{k=0}^{\infty} = \{a_{\sigma(1)}, ..., {}_{\sigma(m_{\nu_1}-1)}, b_{l(1)}, a_{\sigma(M_2)}, ..., a_{\sigma(\overline{M}_2,)}; b_{l(2)},$$

(3.45) $$..., b_{l(n-1)}, a_{\sigma(M_n)}, ..., a_{\sigma(\overline{M}_n)}, b_{l(n)}, a_{\sigma(M_{n+1})}, ...\}, (\ d_{-k} = \overline{d}_k, \forall k \geq 0).$$

Отсюда и из соотношений (3.9), (3.10), (3.21)- (3.23), (3.19), (3.20) вытекает

$$|d_{\sigma_f(k)}| > |d_{\sigma_f(k+1)}|, \quad \text{для любого} \quad k \geq 0,\ \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|^2 \omega(|d_k|) < \infty,$$

В силу (3.15)- (3.20), (3.33), (3.34) будем иметь

$$g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1],\ \int |g(x) - f(x)| < \epsilon, \quad g(x) = f(x),\ x \in E.$$

Пусть $m > M_2$, тогда существует натуральное число q такое, что

$$N_q \le m < N_{q+1}, \tag{3.46}$$

где $N_q = M_1 + 1 + \sum_{k=2}^{q}[\overline{M}_k - M_k + 2]$ для любого $q \ge 2$.

В силу (1.4), (1.5), (3.31), (3.33),(3.37) и (3.41)- (3.46) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{m} d_{\sigma_f(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x} - g(x) \right| dx \le \int_0^1 \left| \sum_{\gamma=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right| dx +$$

$$+ \sum_{s=q}^{\infty} \int_0^1 |g_s(x)| dx + \max_{M_q \le n \le \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{n} a_k e^{2\pi i \sigma(k) x} \right| dx + b_{l(q)} < 2^{-q}.$$

Следовательно, $d_k = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i k x} dx = c_k(g)$ для любого $k \ge 0$ (см.(1.1)). Аналогичным образом убеждаемся в справедливости неравенства

$$\left(\int_0^1 |G_m(x,g) - g(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=0}^{m} d_{\sigma_f(k)} e^{2\pi i \sigma_f(k) x} - g(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \le 2^{-q}.$$

Учитывая выбор чисел $l(1), l(2), \ldots ..l(k), \ldots$ получим, что $\{l(k)\}_{k=1}^{\infty}$ есть некоторая перестановка натуральных чисел$\{k \in \bigcup_{n=1}^{\infty}[\overline{M}_n + 1, M_{n+1}]\}$ и, следовательно (см. (3.3), (3.21) – (3.23), (3.28), (3.29), (3.31) и (3.45)), для каждого натурального q существуют натуральные числа n_q и J_q такие ,что

$$\{b_{l(k)}\}_{k=1}^{q} \subset \{d_k, k \in N \cap \bigcup_{n=1}^{n_q} [\overline{M}_n + 1, M_{n+1}]\} = \{b_k, k \in N \cap \bigcup_{n=1}^{n_q} [\overline{M}_n + 1, M_{n+1}]\} \subset \{b_{l(k)}\}_{k=1}^{J_q}.$$

Отсюда и из соотношений (1.2), (3.31), (3.34), (3.35), (3.39), (3.41) – (3.45), для каждого $q \ge 2$ и для всех $m > M_{J_q}$ будем иметь

$$\left(\int_0^1 |S_m(x,g) - g(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=0}^{m} d_k e^{2\pi i k x} - g(x) \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 \left| \sum_{\gamma=2}^{q} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{2\pi i l(j) x} \right) - g_j(x) \right] \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{s=q+1}^{\infty} \left(\int_0^1 |g_s(x)|^p \mu(x) dx \right)^{1/p} + \sum_{s=q+1}^{\infty} \max_{M_s \le n \le \overline{M}_s} \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{n} a_k e^{2\pi i \sigma(k) x} \right|^p \mu(x) dx \right)^{1/p}$$

$$+ \sum_{s=q+1}^{\infty} b_{l(s)} < 2^{-q}.$$

Аналогично для каждого $q \geq 2$ и для всех $m > M_{J_q}$ доказывается, что

$$\int_0^1 |S_m(x,g) - g(x)|dx = \int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{m} d_k e^{2\pi ikx} - g(x) \right| dx < 2^{-q}.$$

Теорема 1.5 доказана.

Abstract. In this paper we prove that for any $0 < \epsilon < 1$ there exist a measurable set $E \subset [0,1]$ with measure $|E| > 1 - \epsilon$ and a weight function $\mu(x)$; $0 < \mu(x) \leq 1$; $\mu(x) = 1$ on E, such that for any number $p \in [1,2]$ and each function $f \in L^p_\mu(0,1)$ there is a function $g(x) \in L^1[0,1] \cap L^p_\mu[0,1]$, coinciding with $f(x)$ on E, whose greedy algorithm and Fourier series by trigonometric system converge to $g(x)$ in norms $L^1_{[0,1]}$ and $L^p_\mu[0,1]$.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Матем. Сб., **28**, no. 2, 266 – 294 (1912).

[2] Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Матем. Сб., **53**, no. 2, 67 – 96 (1942).

[3] L. K. Jones, "On a conjecture of Huber concerning the convergence of projection pursuit regression", Ann. Statist., **15**, 880 – 882 (1987).

[4] T.W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applications **5**, 1 – 19 (1999).

[5] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation, Found.Comput. Math., **3**, 33 – 107 (2003).

[6] R. Gribonval, M. Nielsen, "On the quasi-greedy property and uniformly bounded orthonormal systems", http://www.math.auc.dk/research/reports/R-2003-09.pdf.

[7] M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. func.", Trans. Amer. Math. Soc. (TAMS), **352**, no. 8, 3777 – 3799 (2000).

[8] M. G. Grigorian and R. E. Zink, "Greedy approx. with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal systems", Proc. of the Amer. Mat. Soc., **134**, **12**, 3495 – 3505 (2006).

[9] M. G. Grigorian, "Uniform convergence of the greedy algorithm with respect to the Walsh system", Studia. Math., **198**, no. 2, 197 – 206 (2010).

[10] М. Г. Григорян, "Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация", Матем.сборник, **203**, no. 3, 49 – 78 (2012).

[11] S. A. Episkoposian, M. G. Grigorian, "On the convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system", Journal of Mathematical Analysis and Applications, **389**, 1374 – 1379 (2012).

[12] М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^p гриди алгоритма по тригонометрической системе", Изв. НАН Армении, серия Математика, **39**, no. 4, 89 – 116 (2004).

[13] А. Х. Кобелян, "О сходимости в $L^1[0,1]$ жадного алгоритма по общей системе Хаара", Изв. НАН Армении, серия Математика, **47**, no. 6, 53 – 70 (2012).

[14] М. Г. Григорян, С. Л. Гогян, "Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций", Analysis Mathematica, **32**, 49 – 80 (2006).

[15] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера", Матем. Сб., **199**, no. 5, 3 – 26 (2008).

[16] А. М. Олевский, "Существование функций с неустранимыми особенностями Карлемана", ДАН СССР, **238**, 796 – 799 (1978).

[17] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on Greedy approximation in Banach spaces", East Journal on Approximations, **5**, no. 1, 1 – 15 (1999).
[18] Е. Д. Лившиц, "Об оптимальности жадного алгоритма для некоторых классов функций", Матем. сб., **198**, no. 5, 95 – 114 (2007).
[19] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Two remarks on quazi greedy bases in the L space", Изв. НАН Арменйи, серия Математика, **40**, no. 1, 2 – 14 (2005).
[20] Г. М. Амирханян, "О сходимости гриди алгоритма по ситеме Уолша в пространстве L^p", Изв. НАН Армении, серия Математика, **43**, no. 4, 3 – 12 (2008).
[21] К. Навасардян, А. Степанян, "О рядах Хаара", Изв. НАН Армении, серия Математика,**43**, no. 4, 3 – 12 (2007).

Поступила 10 декабря 2013