Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 38-52.

СТРУКТУРА ИНВАРИАНТНЫХ ИДЕАЛОВ НЕКОТОРЫХ ПОДАЛГЕБР АЛГЕБРЫ ТЕПЛИЦА

Е. В. ЛИПАЧЕВА, К. Г. ОВСЕПЯН

Казанский Государственный Энергетический Университет, Россия
E-mails: *elipacheva@gmail.com*, *karen.hovsep@gmail.com*

Аннотация. В данной работе приводится полное описание инвариантных идеалов C^*-подалгебр алгебры Теплица, неподвижных относительно конечной группы автоморфизмов. Доказывается расщепимость коротких точных последовательностей порожденных такими идеалами.

MSC2010 numbers:

Ключевые слова: индекс монома; алгебра Теплица; неприводимое представление; C^*-алгебра, инвариантная подалгебра; инвариантный идеал; компактный оператор.

1. Введение

[1]Одним из хорошо известных и используемых алгебраических объектов в современной математической физике является алгебра Теплица $\mathcal{T}$. В работах многих авторов исследуется как сама эта алгебра, так и различные ее модификации, изучаются свойства полученных алгебр (см. [1] – [6]). Данная статья посвящена одному из обобщений алгебры Теплица, которое возникает при исследовании C^*-алгебр, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы. Ранее, в работе [7], авторами было начато изучение C^*-подалгебры алгебры Теплица $\mathcal{T}$, порожденной мономами, индекс которой кратен числу m. Эта C^*-алгебра была обозначена $\mathcal{T}_m$ и было показано, что она неподвижна относительно конечной подгруппы группы S^1 порядка m. Были описаны все неприводимые бесконечномерные представления этой C^*-алгебры.

В настоящей статье продолжается исследование C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ с несколько иной точки зрения. В частности, показывается, что C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ представляется в виде

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ N 12-01-97016.

где $\mathcal{T}(m)$ – C^*-подалгебра в алгебре $\mathcal{T}_m$, порожденная операторами T^m и T^{*m}, а $\mathcal{K}_m$ – C^*-подалгебра всех компактных операторов в $\mathcal{T}_m$. Более того, показывается, что при некоторых модификациях подалгебры $\mathcal{K}_m$ получаются новые представления вида (1.1) для алгебры $\mathcal{T}_m$.

Основной целью статьи является исследование инвариантных идеалов C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$. Идеал J алгебры $\mathcal{T}_m$ называется *инвариантным* относительно некоторого естественного представления $\sigma_0\colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$, если $\sigma_0(z)(J) = J$ для любого $z \in S^1$. В статье получено полное описание всех инвариантных идеалов алгебры $\mathcal{T}_m$, и показано, что их конечное число, в точности равное 2^m, и что каждый из них порождается разностями проекторов вида $T^iT^{*i} - T^jT^{*j}$, $0 \le i < j \le m$. Также доказано, что если J – инвариантный идеал C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ и $J \neq \mathcal{K}_m$, то она может быть представлена в виде прямой суммы $\mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_n \oplus J$, для некоторого $n < m$.

2. Подалгебры алгебры Теплица, неподвижные относительно конечной группы автоморфизмов

Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с естественным ортонормированным базисом $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Пусть T – оператор сдвига на $l^2(\mathbb{Z}_+)$, который на базисе действует следующим образом:

$$Te_k = e_{k+1}.$$

Очевидно, что $T^*T = I$, где T^* – сопряженный оператор к оператору T, I – тождественный оператор, и $TT^* = P$ – проектор на $l^2(\mathbb{Z}_+\backslash 0)$. Следовательно, полугруппа, порожденная операторами T и T^*, образует бициклическую полугруппу. Каждый элемент этой полугруппы имеет вид T^nT^{*m}, $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Такие элементы в дальнейшем будем называть мономами [5], а число $n - m$ – индексом монома T^nT^{*m} и обозначать $\mathrm{ind}(T^nT^{*m})$. Конечные линейные комбинации мономов образуют инволютивную подалгебру алгебры $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ всех линейных ограниченных операторов гильбертова пространства $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Равномерное замыкание этой подалгебры в $B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ называется *алгеброй Теплица* и обозначается через $\mathcal{T}$. Пусть $C(S^1;\mathcal{T}) = C(S^1) \otimes \mathcal{T}$ – C^*-алгебра всех непрерывных отображений из единичной окружности S^1 в алгебру $\mathcal{T}$, с нормой

$$\| A \| = \sup_{S^1} \| A(z) \|, \; A \in C(S^1;\mathcal{T}).$$

Пусть $A_{z_0} \in C(S^1; \mathfrak{T})$, $A_{z_0}(z) = A(z \cdot z_0)$ – оператор сдвига на z_0. Так как $\| A_{z_0} \| = \| A \|$, то оператор сдвига A_z порождает представление

$$\sigma \colon S^1 \to \mathrm{Aut}(C(S^1; \mathfrak{T})), \quad \sigma(z)(A) = A_z.$$

Каждому элементу A из $C(S^1; \mathfrak{T})$ можно сопоставить формальный ряд:

$$A(z) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k z^k,$$

с коэффициентами

$$A_k = \int_{S^1} \sigma(z)(A) z^{-k} dz,$$

где интеграл берется по нормированной мере Лебега на S^1.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{T}}$ C^*-подалгебру алгебры $C(S^1) \otimes \mathfrak{T}$, порожденную мономами $\tilde{T}^n \tilde{T}^{*m}$, $\tilde{T}^n \tilde{T}^{*m}(z) = z^k T^n T^{*m}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, где $k = n - m$. Очевидно, что алгебра $\tilde{\mathfrak{T}}$ инвариантна относительно сдвигов элементами группы S^1, то есть $\sigma(z)(\tilde{A}) \in \tilde{\mathfrak{T}}$ для любых $\tilde{A}$ из $\tilde{\mathfrak{T}}$ и $z \in S^1$. В работах [8], [9] было показано, что отображение $\tilde{A} \mapsto A, A = \tilde{A}(1)$ порождает изоморфизм между C^*-алгебрами $\tilde{\mathfrak{T}}$ и $\mathfrak{T}$. Аналогичные результаты для более общего случае были получены в работе [10]. Поэтому представление $\sigma \colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\tilde{\mathfrak{T}})$ порождает представление $\sigma_0 \colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{T})$:

$$\sigma_0(z)(A) = \tilde{A}(z),$$

где $A = \tilde{A}(1)$. Отметим, что $\sigma_0(z)(T^n T^{*m}) = z^k T^n T^{*m}$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $k = n - m$. Понятие индекса монома можно распространить и на элементы $\tilde{T}^n \tilde{T}^{*m}$ алгебры $\tilde{\mathfrak{T}}$: $\mathrm{ind}(\tilde{T}^n \tilde{T}^{*m}) = n - m$. Из построения алгебры $\tilde{\mathfrak{T}}$ видно, что если $\tilde{A} = \tilde{T}^n \tilde{T}^{*m}$, $\tilde{B} = \tilde{T}^k \tilde{T}^{*l}$ и $n - m \neq k - l$, тогда

$$\int_{S^1} \tilde{A}(z) \tilde{B}^*(z) dz = 0.$$

Поэтому алгебру $\tilde{\mathfrak{T}}$ можно записать в виде

$$\tilde{\mathfrak{T}} = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\mathcal{L}}_k},$$

где $\tilde{\mathcal{L}}_k$ – замкнутое подпространство в $\tilde{\mathfrak{T}}$, порожденное мономами индекса k, то есть состоящее из тех $\tilde{A} \in \tilde{\mathfrak{T}}$, для которых

$$\sigma(z)(\tilde{A}) = z^k \tilde{A}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{T} = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_k}, \tag{2.1}$$

где $\mathcal{L}_k$ – замкнутое подпространство в $\mathcal{T}$, порожденное мономами индекса k. Поэтому

$$\mathcal{L}_k = \{A \in \mathcal{T}; \sigma_0(z)(A) = z^k A\}.$$

Каждому элементу A из $\mathcal{T}$ можно сопоставить формальный ряд:

$$A \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k,$$

где $A_k \in \mathcal{L}_k$. Пусть $\mathcal{T}_m$ – C^*-подалгебра алгебры Теплица, порожденная мономами, индекс которых кратен числу m.

В работе [7] было показано, что если $G_m = \{z \in S^1 : z^m = 1\}$ – конечная подгруппа группы S^1 порядка m, то

$$\mathcal{T}_m = \{A \in \mathcal{T} : \sigma_0(z)(A) = A,\ z \in G_m\}. \tag{2.2}$$

Последнее означает, что алгебра $\mathcal{T}_m$ является неподвижной относительно конечной группы автоморфизмов G_m.

Лемма 2.1. *Справедливо тождество:* $\mathcal{T}_m = \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{km}}$, *где*

$$\mathcal{L}_{km} = \{A \in \mathcal{T}; \sigma_0(z)(A) = z^{km} A\}.$$

Доказательство. Пусть $B \in \mathcal{T}_m$, тогда согласно (2.2) $\sigma_0(z)(B) = B$. Из равенства (2.1) и $\mathcal{T}_m \subset \mathcal{T}$ вытекает

$$B \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k,$$

где $B_k \in \mathcal{L}_k$. Но так как $\sigma_0(z)(B) = B$, следовательно, $\sigma_0(z)(B_k) = B_k$, то есть $\mathrm{ind}(B_k)$ кратен m. Таким образом, $B_k \in \mathcal{L}_{km}$. Последнее означает, что $\mathcal{T}_m \subset \overline{\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_{km}}$. Обратное включение очевидно. □

3. Структура алгебры $\mathcal{T}_m$

Обозначим через $\mathcal{T}(m)$ C^*-подалгебру алгебры Теплица $\mathcal{T}$, порожденную операторами T^m и T^{*m}. Очевидно, что $\mathcal{T}(m) \subset \mathcal{T}_m$.

Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(\mathbb{Z}_+)$ с базисом $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Представим его в виде прямой суммы

$$l^2(\mathbb{Z}_+) = H_0 \oplus H_1 \oplus ... \oplus H_{m-1}, \tag{3.1}$$

где базис подпространства H_i состоит из векторов $\{e_{i+km}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, $1 \leq i \leq m$. Тогда подпространства H_i, $0 \leq i \leq m-1$, инвариантны относительно алгебры $\mathcal{T}_m$. Действительно, пусть $A \in \mathcal{T}_m$, тогда A приближается линейными комбинациями мономов $V = T^kT^{*l}$, где $\operatorname{ind}(V) = k - l$ кратен m, то есть $k - l = dm$, $d \in \mathbb{Z}$. Тогда для любых H_i и $e_j \in H_i$ если $Ve_j \neq 0$, то $Ve_j = e_{j+\operatorname{ind}(V)} = e_{j+dm} \in H_i$. Следовательно, $Ae_j \in H_i$. Поэтому любой элемент $A \in \mathcal{T}_m$ однозначно представляется в виде

$$A = A|_{H_0} \oplus ... \oplus A|_{H_{m-1}}.$$

Отметим, что все вышесказанное справедливо и для алгебры $\mathcal{T}(m)$.

Алгебра $\mathcal{T}(m)$ на каждом подпространстве $H_i, 0 \leq i \leq m-1$, действует как алгебра Теплица, так как $T^m e_{i+km} = e_{i+(k+1)m}$ – является оператором сдвига на базисе подпространства H_i. Таким образом: $\mathcal{T}(m)|_{H_i} \simeq \mathcal{T}$, то есть существуют изоморфизмы $\tau_i \colon \mathcal{T}(m)|_{H_i} \to \mathcal{T}, i = 0, 1, ..., m-1$ сопоставляющие сдвигу на H_i сдвиг на $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Следовательно, для любого $A \in \mathcal{T}(m)$ найдется единственный $B \in \mathcal{T}$, такой, что $\tau_0(A|_{H_0}) = \tau_1(A|_{H_1}) = ...\tau_{m-1}(A|_{H_{m-1}}) = B$. Поэтому

$$\mathcal{T}(m) = \{A : A = B_0 \oplus B_1 \oplus ... \oplus B_{m-1},$$

$$\text{где } \tau_i(B_i) = B, i = 0, 1, ..., m-1,\ B \in \mathcal{T}\} \hookrightarrow \bigoplus^m \mathcal{T}, \tag{3.2}$$

где через $\bigoplus^m \mathcal{T}$ обозначена прямая сумма m экземпляров алгебры Теплица $\mathcal{T}$.

Введем следующие обозначения: $P_l = T^lT^{*l}, l = 0, 1, ..., m$. Тогда справедливы неравенства $P_0 > P_1 > ... > P_m$.

Лемма 3.1. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ является C^*-алгеброй, порожденной операторами T^m, T^{*m} и проекторами P_l, где $1 \leq l \leq m-1$.*

Доказательство. По определению алгебра $\mathcal{T}_m$ порождается элементами V, индексы которых кратны m, то есть $V = T^{mk+l}T^{*mn+l}$, где $k, n \in \mathbb{Z}_+$, $0 \leq l \leq m-1$. Тогда $V = T^{mk}T^lT^{*l}T^{*mn} = (T^m)^k(T^lT^{*l})(T^{*m})^n$. Отсюда получаем утверждение леммы. □

Покажем, что алгебра $\mathcal{T}_m$ на каждом подпространстве $H_i, 0 \leq i \leq m-1$ также действует как алгебра Теплица $\mathcal{T}$. Для этого выясним, как проекторы

P_j, $1 \leq j \leq m-1$, действуют на этих подпространствах. Базисом H_i является множество $\{e_{i+km}\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Очевидно, $P_j e_{i+km} = e_{i+km}$ для любого $k \geq 1$. А при $k = 0$ имеем

$$P_j e_i = \begin{cases} e_i, & \text{при } i \geq j, \\ 0, & \text{при } i < j. \end{cases}$$

Это означает, что

$$P_j|_{H_i} = \begin{cases} I, & \text{при } i \geq j, \\ T^m T^{*m}, & \text{при } i < j. \end{cases} \tag{3.3}$$

Таким образом, алгебра $\mathcal{T}_m|_{H_i}$ порождается только лишь операторами T^m и T^{*m}.

Пусть $\mathcal{K}$ – C^*-подалгебра всех компактных операторов алгебры Теплица $\mathcal{T}$, а $\mathcal{K}_m$ – C^*-подалгебра всех компактных операторов алгебры $\mathcal{T}_m$. Обозначим через

$$\bigoplus^m \mathcal{K} = \{K_0 \oplus ... \oplus K_{m-1} : K_i - \text{компактный оператор в } B(H_i),\ 0 \leq i \leq m-1\}.$$

Лемма 3.2. *Справедливо тождество:*

$$\mathcal{K}_m = \bigoplus^m \mathcal{K}.$$

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{K}_m \subset \mathcal{T}_m$. Тогда $A = A|_{H_0} \oplus ... \oplus A|_{H_{m-1}}$ и $A|_{H_i}$ – компактный оператор в $B(H_i)$, $0 \leq i \leq m-1$. То есть $A \in \bigoplus^m \mathcal{K}$. Таким образом, $\mathcal{K}_m \subset \bigoplus^m \mathcal{K}$.

Покажем обратное включение. Алгебра $\mathcal{T}_m$ содержит операторы $E_i = P_i - P_{i+1}$, $0 \leq i \leq m-1$, действующие следующим образом:

$$E_i e_k = \begin{cases} e_k, & \text{если } k = i, \\ 0, & \text{если в противном случае.} \end{cases}$$

Каждый оператор $E_i, 0 \leq i \leq m-1$, является одномерным и, следовательно, компактным на своем подпространстве H_i. Поскольку $\mathcal{T}_m|_{H_i}$ является алгеброй Теплица и, следовательно, неприводима, то $\mathcal{T}_m|_{H_i}$ содержит весь идеал компактных операторов на H_i. Отсюда следует, что $\bigoplus^m \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_m$. □

Теорема 3.1. *Любой элемент $A \in \mathcal{T}_m$ представляется в виде $A = C + D$, где $C \in \mathcal{T}(m)$, $D \in \mathcal{K}_m$, то есть*

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m.$$

Доказательство. Согласно лемме 3.1 C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ порождается подалгеброй $\mathcal{T}(m)$ и проекторами $P_1, ..., P_{m-1}$. Для доказательства теоремы, учитывая, что

$\mathcal{K}_m$ является идеалом в $\mathcal{T}_m$, достаточно показать, что $P_j \in \mathcal{T}(m) + \mathcal{K}_m$, $1 \le j \le m-1$, то есть $P_j = C + D$, где $C \in \mathcal{T}(m)$ и $D \in \mathcal{K}_m$.

Действительно, учитывая (3.3), для любого j, $1 \le j \le m-1$, имеем:

$$P_j = P_j|_{H_1} \oplus ... \oplus P_j|_{H_j} \oplus P_j|_{H_{j+1}} \oplus ... \oplus P_j|_{H_m} =$$

$$= T^mT^{*m} \oplus ... \oplus T^mT^{*m} \oplus I \oplus ... \oplus I = (T^mT^{*m} \oplus ... \oplus T^mT^{*m}) +$$

$$+(0 \oplus ... \oplus 0 \oplus (I - T^mT^{*m}) \oplus ... \oplus (I - T^mT^{*m})) = C + D,$$

где $C = T^mT^{*m} \oplus ... \oplus T^mT^{*m} \in \mathcal{T}(m)$ и $D = 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus (I - T^mT^{*m}) \oplus ... \oplus (I - T^mT^{*m}) \in \bigoplus^m \mathcal{K}$, так как $I - T^mT^{*m}$ является конечномерным оператором и, следовательно, компактным. В силу леммы 3.2 $D \in \mathcal{K}_m$. Таким образом, $P_j = C + D$, $1 \le j \le m-1$, где $C \in \mathcal{T}(m)$, $D \in \mathcal{K}_m$. □

Из теоремы 3.1, леммы 3.2 и разложения (3.2) следует, что каждый элемент A из алгебры $\mathcal{T}_m$ представляется в виде:

$$A = \{(B_0 + K_0) \oplus ... \oplus (B_{m-1} + K_{m-1}),$$

$$\text{где } \tau_i(B_i) = B, i = 0, 1, ..., m-1, B \in \mathcal{T}, \ K_0, ..., K_m \in \mathcal{K}\}. \tag{3.4}$$

4. Короткие точные последовательности

Последовательность алгебраических объектов G_i с последовательностью гомоморфизмов $\varphi_i \colon G_i \to G_{i+1}$, такая что для любого i образ φ_{i-1} совпадает с ядром φ_i (если оба гомоморфизма с такими индексами существуют) называется *точной*.

Точные последовательности типа $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ называются *короткими точными последовательностями*, в этом случае φ – мономорфизм, а ψ - эпиморфизм, то есть короткая точная последовательность состоит из объекта B, его подобъекта A и фактор-объекта C. При этом, если у φ есть правый обратный или у ψ левый обратный морфизм, то B можно отождествить с $A \oplus C$ таким образом, что A и C отображаются в A и C тождественным образом. В этом случае короткая точная последовательность называется *расщепимой*.

Рассмотрим разложение (3.1) гильбертово пространства $l^2(\mathbb{Z}_+)$ и семейство представлений C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$ $\pi_i \colon \mathcal{T}_m \to B(H_i)$, заданных равенством для любого $A \in \mathcal{T}_m$

$$\pi_i(A) = A|_{H_i}, \ 0 \le i \le m-1.$$

В силу леммы 3.1 и (3.3) получаем, что эти представления описываются равенствами

$\pi_i(P_1) = \pi_i(P_2) = ...\pi_i(P_i) = I$, $\pi_i(P_{i+1}) = ... = \pi_i(P_{m-1}) = T^mT^{*m}$, $0 \leq i \leq m-1$.

В работе [7] была доказана следующая теорема, описывающая все неприводимые, унитарно неэквивалентные, бесконечномерные представления C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$.

Теорема 4.1. *C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ имеет ровно m неприводимых, унитарно неэквивалентных, бесконечномерных представлений, которые описываются тождествами:*

1) $P_1 = P_2 = ... = P_{m-1} = T^mT^{*m}$,

2) $P_1 = I$, $P_2 = P_3 = ... = P_{m-1} = T^mT^{*m}$,

3) $P_1 = P_2 = I$, $P_3 = ... = P_{m-1} = T^mT^{*m}$,

.....

m) $P_1 = P_2 = ... = P_{m-1} = I$.

Отметим, что семейство представлений $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$ описывается аналогичными тождествами и, следовательно, $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$ – неприводимые, унитарно неэквивалентные бесконечномерные представления.

Рассмотрим ядра этих представлений $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$, которые, очевидно, являются идеалами алгебры $\mathcal{T}_m$. Пусть $J_i = ker(\pi_i), 0 \leq i \leq m-1$. В дальнейшем будем использовать следующее обозначение: если идеал J некоторой алгебры порождается элементами $A_0, ..., A_{m-1}$, будем писать $J = [A_0, ..., A_{m-1}]$.

Заметим, что $J_0 = [T^mT^{*m} - P_1]$. Действительно, так как $\pi_0(T^mT^{*m} - P_1) = 0$, то $\pi_0(T^mT^{*m} - P_1)\pi_0(P_l) = 0$ и $\pi_0(T^mT^{*m} - P_l) = 0$, $2 \leq l \leq m-1$.

Аналогично, $J_i = [T^mT^{*m} - P_{i+1},\ I - P_i]$, $2 \leq i \leq m-1$, и $J_{m-1} = [I - P_{m-1}]$. Таким образом, мы получили семейство идеалов $\{J_i\}_{i=0}^{m-1}$, которые являются ядрами неприводимых представлений $\{\pi_i\}_{i=0}^{m-1}$.

Рассмотрим теперь всевозможные попарные пересечения идеалов $J_i \cap J_j$, $0 \leq i < j \leq m-1$. Покажем, что такое пересечение является ядром представления $\pi_i \oplus \pi_j : \mathcal{T}_m \to B(H_i \oplus H_j)$. Действительно, пересечению $J_i \cap J_j$ будут принадлежать элементы $T^mT^{*m} - P_{j+1}$, $T^mT^{*m} - P_{j+2}, ...,$ $T^mT^{*m} - P_{m-1}$, $I - P_1, ..., I - P_i$, а также $P_{i+1} - P_{i+2}$, $P_{i+2} - P_{i+3}, ..., P_{j-1} - P_j$. Это означает, что $J_i \cap J_j = [T^mT^{*m} - P_{j+1},\ P_{i+1} - P_j,\ I - P_i]$. Нетрудно видеть, что этот идеал является ядром прямой суммы двух неприводимых представлений, то есть

$$ker(\pi_i \oplus \pi_j) = J_i \cap J_j.$$

Заметим, что если $i = 0$, то $I - P_0 = 0$, а если $j = m$, то $T^mT^{*m} - P_m = 0$. Аналогично, рассматривая всевозможные пересечения $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$, $0 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m-1$, можно показать, что они являются ядрами представлений

$$\bigoplus_{k=1}^{n} \pi_{i_k} : \mathcal{T}_m \to B(\bigoplus_{k=1}^{n} H_{i_k}).$$

Заметим, что $\bigcap\limits_{i=0}^{m-1} J_i = \{0\}$, и следовательно, что представление

$$\bigoplus_{i=0}^{m-1} \pi_i : \mathcal{T}_m \to B(H)$$

является точным.

В следующих леммах описываются идеалы J_i, $0 \leq i \leq m-1$, и всевозможные их пересечения $\bigcap\limits_{k=0}^{n} J_{i_k}$, $0 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m-1$.

Лемма 4.1. *Любой идеал J_i, $0 \leq i \leq m-1$, алгебры $\mathcal{T}_m$ имеет вид*

$$J_i = \{A \in \mathcal{K}_m : A|_{H_i} = 0\}.$$

Доказательство. Пусть A любой элемент из $J_i \subset \mathcal{T}_m$. Так как $J_i = ker(\pi_i)$ и $\pi_i(A) = A|_{H_i}$, то $A|_{H_i} = 0$. Покажем, что $A \in \mathcal{K}_m$. Согласно теореме 3.1, A представляется в виде $A = A_0 + K$, где $A_0 \in \mathcal{T}(m)$, $K \in \mathcal{K}_m$. Далее из (3.2) и леммы 3.2 получаем $A_0 = B_0 \oplus \ldots \oplus B_{m-1}$, где $\tau_i(B_i) = B, i = 0, 1, \ldots, m-1$. $B \in \mathcal{T}$ и $K = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$, $K_i \in \mathcal{K}, 0 \leq i \leq m-1$. Поскольку $A|_{H_i} = 0$, то $A_0|_{H_i} = -K|_{H_i}$. Следовательно, $B_i = -K_i \in \mathcal{K}$. Так как τ_i – изоморфизм, то $\tau_i(B_i) = B$ – также является компактным оператором, откуда используя то, что $\tau_j(B_j) = B, j = 0, .., i-1, i+1, \ldots, m-1$ получается, что B_j также являются компактными операторами. Таким образом, $A_0 \in \mathcal{K}_m$, следовательно, $A \in \mathcal{K}_m$. □

Лемма 4.2. *Любой идеал $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$, $0 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m-1$, имеет вид*

$$\bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} = \{A \in \mathcal{K}_m : A|_{H_{i_k}} = 0,\ k = 1, .., n\}.$$

Доказательство аналогично лемме 4.1.

Следующая теорема является обобщением теоремы 3.1.

Теорема 4.2. *C^*-алгебра $\mathcal{T}_m$ как векторное пространство представляется в виде прямой суммы:*

$$\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i,$$

для любого i, $0 \le i \le m-1$.

Доказательство. Так как $\mathcal{T}_m|_{H_i} = \mathcal{T}(m)|_{H_i}$, то для любого элемента $A \in \mathcal{T}_m$ существует $B \in \mathcal{T}(m)$, такой что $A|_{H_i} = B|_{H_i}$. Представим элемент A в виде $A = (A-B)+B$. Очевидно, что $(A-B)|_{H_i} = 0$. Поэтому согласно лемме 4.1 $(A-B) \in J_i$. Таким образом: $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) + J_i$.

Покажем, что это есть прямая сумма. Действительно, если $A \in \mathcal{T}(m) \cap J_i$, то $A = B_0 \oplus ... \oplus B_{m-1}$, где $\tau_i(B_i) = B$, $B \in \mathcal{T}$ и $A|_{H_i} = B_i = 0$. Но тогда $B = 0$, так как τ_i – изоморфизм и значит все $B_j = 0, j = 0, ..., i-1, i+1, ..., m-1$. Откуда получается, что $A = 0$. Следовательно, $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i$. □

Следствие 4.1. *Пусть* $\mathcal{K}(m)$ *- алгебра компактных операторов в* $\mathcal{T}(m)$. *Тогда* $\mathcal{K}_m = \mathcal{K}(m) \oplus J_i$, $0 \le i \le m-1$.

Следствие 4.2. *Короткие точные последовательности*

$$0 \to J_i \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T} \to 0,$$

где $id : J_i \to \mathcal{T}_m$ *- вложения,* $0 \le i \le m-1$, *расщепимы.*

Теорема 4.3. *Фактор-алгебра* $\mathcal{T}_m/\mathcal{K}_m$ *изоморфна* $C(S^1)$ *и короткая точная последовательность*

$$0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m \to C(S^1) \to 0,$$

где $id : \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m$ *- вложение, дополняема.*

Доказательство. Отображение вложения $id : \mathcal{K}_m = \mathcal{K}(m) \oplus J_i \to \mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i$ раскладывается в прямую сумму $id = \phi \oplus \psi$, где $\phi : \mathcal{K}(m) \to \mathcal{T}(m)$ есть вложение, а $\psi : J_i \to J_i$ – тождественное отображение. И, поскольку $\mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T}$, а $\mathcal{K}(m) \cong \mathcal{K}$, имеет место изоморфизм

$$\mathcal{T}_m/\mathcal{K}_m \cong \mathcal{T}(m)/\mathcal{K}(m) \cong C(S^1).$$

Следовательно, существует короткая точная последовательность

$$0 \to \mathcal{K}(m) \oplus J_i \to \mathcal{T}(m) \oplus J_i \to C(S^1) \to 0.$$

Далее, поскольку $\mathcal{T}(m) \cong \mathcal{T} \cong C(S^1) \oplus \mathcal{K} \cong C(S^1) \oplus \mathcal{K}(m)$, то $\mathcal{T}_m = \mathcal{T}(m) \oplus J_i \cong C(S^1) \oplus \mathcal{K}(m) \oplus J_i = C(S^1) \oplus \mathcal{K}_m$. Это доказывает дополняемость последовательности $0 \to \mathcal{K}_m \to \mathcal{T}_m \to C(S^1) \to 0$. □

Теорема 4.4. *Существует короткая точная расщепимая последовательность:*

$$0 \to \bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n \to 0,$$

где $0 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n \leq m-1$. *И, следовательно,* $\mathcal{T}_m$ *изоморфна прямой сумме алгебр:*

$$\mathcal{T}_m \cong \mathcal{T}_n \oplus \bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k}.$$

Доказательство. Согласно лемме 4.2

$$\bigcap_{k=1}^{n} J_{i_k} = \{A \in \mathcal{K}_m : A|_{H_{i_1}} = ... = A|H_{i_n} = 0\}.$$

Рассмотрим $\varphi\colon \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n$: $\varphi(A) = \varphi(A_0 \oplus ... \oplus A_{m-1}) = A_{i_1} \oplus A_{i_2} \oplus ... \oplus A_{i_n}$. Понятно, что φ – является гомоморфизмом, ядро которого

$$ker(\varphi) = \{A : A|_{H_{i_1}} = ... = A|_{H_{i_m}} = 0\},$$

Рассуждениями, аналогичными, как при доказательстве леммы 4.1 можно показать, что $ker(\varphi) \subset \mathcal{K}_m$. Поэтому $ker(\varphi) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$. Отсюда следует существование короткой точной последовательности $0 \to \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_k \to \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_n \to 0$.

Для доказательства расщепимости зададим вложение $\lambda\colon \mathcal{T}_n \to \mathcal{T}_m$ следующим образом: $\lambda(A) = \lambda(A_{i_1} \oplus ... \oplus A_{i_n}) = B$, $B \in \mathcal{T}_m$, где $B|_{H_{i_k}} = A_{i_k}$, $1 \leq k \leq n$, $B|_{H_{i_k}} = 0$, $j \neq i_k$. Тогда $\varphi \circ \lambda = id$. □

5. Инвариантные идеалы C^*-алгебры $\mathcal{T}_m$

Во втором параграфе было показано, что существует представление $\sigma_0 \colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ такое, что $\sigma_0(z)(T) = zT$. Поскольку алгебра $\mathcal{T}_m$ есть C^*-алгебра, порожденная операторами T^m, T^{*m} и проекторами P_i, $1 \leq i \leq m-1$, и $\sigma_0(z)(T^m) = z^m T^m$, $\sigma_0(z)(T^{*m}) = z^{-m}T^{*m}$, $\sigma_0(z)(P_i) = P_i$, то сужение этого представления на $\mathcal{T}_m$ есть представление $\sigma_m \colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_m)$, $\sigma_m(z)(T^m) = z^m T^m$.

Идеал I алгебры $\mathcal{T}_m$ назовем *инвариантным* относительно представления $\sigma_m \colon S^1 \to \mathrm{Aut}(\mathcal{T}_m)$, если $\sigma_m(z)(I) = I$ для любого $z \in S^1$. Таким образом, все идеалы алгебры $\mathcal{T}_m$ разбиваются на два класса – инвариантных и неинвариантных идеалов. Данный параграф посвящен описанию класса инвариантных идеалов.

Лемма 5.1. *Идеалы* J_i, $0 \leq i \leq m-1$, *и* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$, $0 \leq i_1 < ... < i_n \leq m-1$, *являются инвариантными.*

Доказательство. Поскольку $J_i = [T^mT^{*m} - P_{i+1},\ I - P_i]$, то конечные линейные комбинации элементов вида $A(T^mT^{*m} - P_{i+1})B$ и $A(I - P_i)B$, где $A, B \in \mathcal{T}_m$, плотны в J_i. Поэтому, из того, что $\sigma_m(z)(A(T^mT^{*m} - P_{i+1})B) = \sigma_m(z)(A)\sigma_m(z)(T^mT^{*m} - P_{i+1})\sigma_m(z)(B) = \sigma_m(z)(A)(T^mT^{*m} - P_{i+1})\sigma_m(z)(B) \in J_i$ и $\sigma_m(z)(A(I-P_{i-1})B) = \sigma_m(z)(A)(I-P_{i-1})\sigma_m(z)(B) \in J_i$, следует, что $\sigma_m(z)(J_i) = J_i$, для любого $z \in S^1$. Аналогично показывается, что $\sigma_m(z)(\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$. □

Следствие 5.1. $\mathcal{K}_m$ *– инвариантный идеал.*

Доказательство. Пусть $I_j = \bigcap\limits_{i \neq j,\ i=0}^{m-1} J_i$, тогда $\mathcal{K}_m = I_0 \oplus \ldots \oplus I_{m-1}$ – инвариантный идеал. □

Следствие 5.2. *Любой идеал, содержащийся в* $\mathcal{K}_m$*, является инвариантным идеалом.*

Доказательство. Пусть идеал $J \subset \mathcal{K}_m$. Так как алгебра компактных операторов $\mathcal{K}$ есть нетривиальный минимальный идеал алгебры Теплица, то есть каждый нетривиальный идеал содержит $\mathcal{K}$, то сужение $J|_{H_i}$ равно либо $\{0\}$ либо $\mathcal{K}$. Поэтому в силу лемм 4.1 и 4.2, $J = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$ для некоторых $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le m-1$, и, следовательно, является инвариантным. □

Лемма 5.2. *Пусть J – такой замкнутый идеал алгебры $\mathcal{T}_m$, что у фактор-алгебры $\mathcal{T}_m/J$ есть хотя бы одно неприводимое бесконечномерное представление. Тогда*

1) $J \subsetneq \mathcal{K}_m$,

2) $J = \bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{i_k}$ *для некоторых* $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n \le m$,

3) J *– инвариантный идеал.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\mathcal{T}(m) \cap J = \{0\}$. Пусть $\tau : \mathcal{T}_m/J \to B(H')$ – неприводимое бесконечномерное представление алгебры $\mathcal{T}_m/J$. Пусть $\alpha \colon \mathcal{T}_m \to \mathcal{T}_m/J$ – канонический гомоморфизм. Тогда $\pi = \tau \circ \alpha \colon \mathcal{T}_m \to B(H')$ – неприводимое бесконечномерное представление алгебры $\mathcal{T}_m$. Согласно лемме 3.3 из [7] $\pi|_{\mathcal{T}(m)} \colon \mathcal{T}(m) \to B(H')$ – также неприводимое бесконечномерное представление алгебры $\mathcal{T}(m)$. Очевидно, $\pi(T^mT^{*m}) \neq I$, так как, в противном случае, $\pi(\mathcal{T}(m))$ была бы коммутативной C^*-подалгеброй в $B(H')$. Но у коммутативной

C^*-алгебры нет бесконечномерных представлений, что противоречит неприводимости представления $\pi|_{\mathcal{T}(m)}$. Поскольку $\mathcal{T}(m)$ изоморфна алгебре Теплица, по теореме Кобурна [1] $\pi|_{\mathcal{T}(m)}$ – изометрический гомоморфизм и, следовательно, $\ker(\pi|_{\mathcal{T}(m)}) = \{0\}$. С другой стороны, очевидно, $\ker(\pi|_{\mathcal{T}(m)}) = \ker\pi \cap \mathcal{T}(m)$. И поскольку $J \subset \ker(\pi)$, получаем, что $\mathcal{T}(m) \cap J = \{0\}$.

Далее по теореме 3.1 имеем $J \subseteq \mathcal{K}_m$. Если $J = \mathcal{K}_m$, то по теореме 4.3 $\mathcal{T}_m/J = C(S^1)$. Но это невозможно, так как у $C(S^1)$ нет неприводимых бесконечномерных представлений. Таким образом, $J \subsetneq \mathcal{K}_m$.

Второе и третье утверждения леммы вытекают из следствия 5.2. □

Пусть $P(T)$ – пространство конечных линейных комбинаций вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_{-k}T^{*k} + \sum_{k=0}^{l} c_k T^k,\ c_k, c_{-k} \in \mathbb{C}.$$

Обозначим через $L(T)$ замыкание $P(T)$ в алгебре Теплица $\mathcal{T}$. Из результатов 2-го параграфа вытекает, что каждому элементу $A \in L(T)$ сопоставляется формальный ряд:

$$A \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k,$$

где $A_k = c_k T^k$ для $k \geq 0$, и $A_k = c_k T^{*|k|}$ для $k < 0$.

Зададим отображение $p : \mathcal{T} \to L(T)$ формулой

$$p(A) = \lim_{k\to\infty} T^{*k} A T^k.$$

Покажем, что p – корректно определено. Заметим, что $p(B) = B$ для любого $B \in P(T)$ и для любого монома $V = T^k T^{*l}$

$$p(V) = \begin{cases} T^{k-l}, & \text{если } k > l, \\ T^{*(l-k)}, & \text{если } k < l, \\ I, & \text{если } k = l. \end{cases}$$

Поэтому, если $A \in \mathcal{T}$ – есть конечная линейная комбинация мономов, то есть $A = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i T^{k_i} T^{*l_i}$, то $p(A) \in P(T)$. Поскольку конечные линейные комбинации мономов плотны в $\mathcal{T}$, получим, что $p : \mathcal{T} \to L(T)$. Очевидно, что $\|p(A)\| \leq \|A\|$.

Лемма 5.3. *Следующие условия эквивалентны:*

1) A – компактный оператор,

2) $p(A) = 0$.

Доказательство. Докажем 1) $\Rightarrow$ 2). Каждый компактный оператор можно приблизить линейными комбинациями операторов вида $T^kT^{*l}(I-TT^*)T^nT^{*m}$. Поскольку для мономов V и W с одинаковыми индексами справедливо $p(V) = p(W)$, то $p(T^kT^{*l}(I-TT^*)T^nT^{*m}) = 0$. Поэтому $p(A) = 0$ для любого компактного оператора A.

Докажем 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $A \in \mathfrak{T}$ такой, что $p(A) = 0$. Для любого n оператор $Q = I - T^nT^{*n}$ есть конечномерный проектор. Представим A в виде $A = (Q+T^nT^{*n})A(Q+T^nT^{*n}) = QAQ+T^nT^{*n}AQ+QAT^nT^{*n}+T^nT^{*n}AT^nT^{*n}$. Так как первые три слагаемых являются компактными операторами, фактор-норма оператора A по идеалу компактных операторов $\mathcal{K}$ удовлетворяет неравенству

$$\inf_{K\in\mathcal{K}} \|A+K\| \leq \|T^nT^{*n}AT^nT^{*n}\| \leq \|T^{*n}AT^n\|,$$

для любого натурального n. Следовательно, $\inf\limits_{K\in\mathcal{K}} \|A+K\| = 0$, то есть A – компактный оператор. □

Обозначим через $P(T_m)$ пространство конечных линейных комбинаций вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_{-k}T^{*mk} + \sum_{k=0}^{l} c_kT^{mk}, \quad c_k, c_{-k} \in \mathbb{C},$$

а через $L(T_m)$ – замыкание $P(T_m)$ в алгебре $\mathfrak{T}_m$. Понятно, что если $A \in \mathfrak{T}_m$, то $p(A) \in L(T_m)$.

Теорема 5.1. *Пусть J – собственный идеал алгебры $\mathfrak{T}_m$. Следующие условия эквивалентны:*

1) J – инвариантный идеал,

2) $J \subseteq \mathcal{K}_m$.

Доказательство. Докажем 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть J – инвариантный идеал и $J \nsubseteq \mathcal{K}_m$. Тогда найдется $A \in J\backslash\mathcal{K}_m$. Очевидно, $p(A) \in L(T_m) \cap J$. Поскольку каждый элемент из $L(T_m)$ имеет вид $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$, где $A_k = c_kT^{km}$ для $k \geq 0$, и $A_k = c_kT^{*|k|m}$ для $k < 0$, имеем $p(A) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$. Так как A не принадлежит $\mathcal{K}_m$, то по лемме 5.3 $p(A) \neq 0$. Пусть k такое число, что $c_k \neq 0$. Для определенности будем считать, что $k \geq 0$. Тогда

$$A_k = c_kT^{mk} = \int\limits_{S^1} \sigma_m(z)(p(A))z^{-km}dz.$$

Мы воспользовались тем, что J – инвариантный идеал: $\sigma_m(z)(p(A)) \in J$. Поэтому $T^{km} \in J$. Следовательно, $I = T^{*mk}T^{mk} \in J$. Пришли к противоречию.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) вытекает из следствий 5.1 и 5.2. $\square$

Таким образом, любой инвариантный идеал алгебры $\mathcal{T}_m$ совпадает либо с $\mathcal{K}_m$, либо с одним из идеалов J_i, $1 \leq i \leq m$, или с некоторым их пересечением. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Алгебра $\mathcal{T}_m$ имеет в точности 2^m инвариантных идеалов, каждый из которых порождается разностями проекторов $P_i - P_j$, $0 \leq i < j \leq m$.*

Авторы выражают искреннюю благодарность Григоряну Сурену Аршаковичу за полезные обсуждения.

Abstract. In this paper we give a complete description of invariant ideals of C^*-subalgebras of Toeplitz algebra that are fixed with respect to a finite group of automorphisms. The splitting property of short exact sequences generated by such ideals is established.

Список литературы

[1] L. A. Coburn, "The $C*$-algebra generated by an isometry", Bull. Amer. Math. Soc., **73**, 722 – 726 (1967).

[2] S. Y. Jang, "Uniqueness property of $C*$-algebras like the Toeplitz algebras", Trends Math., **6**, 29 – 32 (2003).

[3] R. G. Douglas, "On the $C*$-algebra of a one-parameter semigroup of isometries, Acta Math., **128**, 143 – 152 (1972).

[4] G. J. Murphy, "Crossed Products of $C*$-algebras by semigroups of automorphisms, Proc. London Math. Soc., **68**, 423 – 448 (1994).

[5] V. H. Teроyan, "Об изометрических представлениях полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus 1$", Изв. НАН Армении, серия Математика, **48**, no. 2, 78 – 84 (2013).

[6] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, "C^*-алгебры, порожденные отображениями", Матем. заметки, **87**, no. 5, 694 – 703 (2010).

[7] К. Г. Овсепян, "О C^*-алгебрах, порожденных инверсными подполугруппами бициклической полугруппы", Известия НАН Армении, Математика, **49**, no. 5, 67 – 75 (2014).

[8] М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева, "Компактная квантовая полугруппа, поропжденная изометрией", Изв. вузов. Матем., **10**, 89 – 93 (2011).

[9] M. A. Aukhadiev, S. A. Grigorian, E. V. Lipacheva, "Infinite-dimensional compact quantum semigroup", Lobachevskii Journal of Mathematics, **32**, no. 4, 304 – 316 (2010).

[10] С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов, "$C*$-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением", Сиб. матем. журн., **51**, no. 1, 16 – 25 (2010).

Поступила 11 апреля 2014