Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 24-37.

СХОДИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

А. Р. НУРБЕКЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *anurbekyan@gmail.com*

Аннотация. В статье рассматривается вопрос сходимости частичных сумм многомерных тригонометрических интерполяционных полиномов. Доказана сходимость по Прингсхейму для функций, непрерывных по гармонической вариации. Построен пример, показывающий, что условие непрерывности по вариации нельзя заменить на ограниченность вариации.

MSC2010 numbers: 42A15.

Ключевые слова: Многомерная тригонометрическая интерполяция; гармоническая вариация.

1. Введение

Введем необходимые обозначения. Для промежутка I через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов I_n, таких что $\overline{I_n} \subset I$. Пусть $I_k = (a_k, b_k)$ и f функция на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ обозначим $f(I_1) = f(b_1) - f(a_1)$. Если для $m-1$ уже определено $f(I_1, \dots, I_{m-1})$, то положим

$$f(I_1, \dots, I_m) = f(I_1, \dots, I_{m-1}, b_m) - f(I_1, \dots, I_{m-1}, a_m).$$

Величину $f(I_1, \dots, I_m)$ будем называть смешанным приращением функции f на $I = I_1 \times \dots \times I_m$.

Если множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β, то через $f(I_\alpha, x_\beta)$ будем обозначать смешанное приращение f как функции аргументов x_i, $i \in \alpha$, при фиксированных x_j, $j \in \beta$.

Обозначим через $\mathbb{L}$ множество неубывающих последовательностей положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty.$$

Определение 1.1. *Пусть* $\Lambda_j = \{\lambda_k^j\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{L}$, $j = 1, \ldots, m$. *Тогда* $(\Lambda_1, \ldots \Lambda_m)$-*вариацией функции* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *относительно переменных* $x_1, \ldots, x_m$ *по параллелепипеду* $\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_m$ *называется величина*

$$V_{\Lambda_1,\ldots\Lambda_m} = \sup_{\{I_{k_j}^j\} \in \Omega(\Delta_j)} \sum_{k_1,\ldots,k_m} \frac{|f(I_{k_1}^1, \ldots, I_{k_m}^m)|}{\lambda_{k_1}^1 \cdots \lambda_{k_m}^m}.$$

Пусть $\alpha \subset \{1, \ldots, m\}$ состоит из чисел $j_1 < \ldots < j_p$ и $\beta = \{1, \ldots, m\} \setminus \alpha$. Тогда через

$$V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta)) = V_{\Lambda_{j_1},\ldots,\Lambda_{j_p}}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta))$$

обозначим $(\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p})$- вариацию f относительно функции переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}$ по p-мерному параллелепипеду $\Delta_\alpha = \Delta_{j_1} \times \cdots \times \Delta_{j_p}$ при фиксированных значениях x_j, $j \in \beta$.

$(\Lambda_{j_1}, \ldots, \Lambda_{j_p})$-вариацией функции $f(x_1, \ldots, x_m)$ относительно переменных x_α по m-мерному параллелепипеду $\Delta_\alpha = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m$ называется величина

$$V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda_{j_1},\ldots,\Lambda_{j_p}}^{x_\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x_\beta \in \Delta_\beta} V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; (\Delta_\alpha, x_\beta)).$$

Определение 1.2. *Полной* $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$-*вариацией функции* $f(x_1, \ldots, x_m)$ *по параллелепипеду* $\Delta = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m$ *называется величина*

$$V_{\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m}(f, \Delta) = \sum_{\alpha \neq \emptyset} V_{\Lambda_\alpha}^{x_\alpha}(f; \Delta).$$

Если полная вариация функции конечна, то она является функцией ограниченной $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$-*вариации, а класс таких функций обозначают через* $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)BV(\Delta)$.

Если последовательности Λ_i совпадают и равны Λ, то для краткости будем писать $V_\Lambda^{x_\alpha}$, V_Λ и $\Lambda BV(\Delta)$. В частном случае, когда $\Lambda = \{n\}$, функции класса $\Lambda BV(\Delta)$ называют функциями ограниченной гармонической вариации и пишут $HBV(\Delta)$, V_H и т.д.

Определение 1.3. *Скажем, что* $x \in \mathbb{R}^m$ *является регулярной точкой функции* f, *если существуют и конечны* 2^m *пределы*

$$f(x_1 \pm 0, \ldots, x_m \pm 0) = \lim_{t_1,\ldots,t_m \to +0} f(x_1 \pm t_1, \ldots, x_m \pm t_m),$$

для всевозможных комбинаций знаков.

В одномерном случае классы ΛBV были введены Д. Ватерманом [2], а в двумерном случае – А. А. Саакяном [7]. Случай более высоких размерностей был рассмотрен А. И. Саблиным [9].

Классы ΛBV очень полезны при изучении сходимости тригонометрических рядов Фурье. Оказалось (см. [4], [6], [8]), что эти классы можно использовать также при изучении сходимости тригонометрических интерполяционных полиномов в одномерном и двумерном случаях. Приведем основные известные результаты.

Теорема 1.1 (Д. Ватерман [2]). *Пусть 2π-периодическая функция $f \in HBV([-\pi,\pi])$. Тогда в каждой точке ряд Фурье f сходится к величине $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции.*

Теорема 1.2 (А. А. Саакян [7]). *Пусть 2π-периодическая по каждому переменному измеримая функция $f \in HBV([-\pi,\pi]^2)$. Тогда в каждой регулярной точке $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ ряд Фурье f сходится по Прингсхейму к величине*

$$f^*(x_1,x_2) = \frac{1}{4}f(x_1 \pm 0, x_2 \pm 0).$$

Если функция непрерывна на открытом множестве E, то сходимость равномерна на любом компакте, лежащем в E.

А. Н. Бахвалов [5] показал, что в случае $m > 2$ непрерывность функции и ограниченность ее гармонической вариации недостаточны для сходимости рядов Фурье по Прингсхейму. Д. Ватерманом [3] было введено понятие непрерывности по Λ-вариации, которое было обобщено А. Н. Бахваловым [5] на многомерный случай для установления сходимости по Прингсхейму при $m > 2$.

Определение 1.4. *Скажем, что функция $f \in (\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m)BV(\Delta)$ непрерывна по $(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m)$-вариации и напишем $f \in C(\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m)V(\Delta)$, если для любого непустого множества $\alpha = \{j_1,\ldots,j_p\} \subset \{1,\ldots,m\}$ и любого $j_k \in \alpha$*

$$\lim_{n\to\infty} V^{x^\alpha}_{\Lambda_{j_1},\ldots,\Lambda_{j_{k-1}},\Lambda^{(n)}_{j_k},\Lambda_{j_{k+1}},\ldots,j_p},(f;\Delta) = 0$$

где $\Lambda^{(n)}_j = \{\lambda^j_{n+k}\}_{k=1}^\infty$.

Теорема 1.3 (А. Н. Бахвалов [5]). *Пусть $f \in CHV([-\pi,\pi]^m)$ – непрерывная 2π-периодическая по каждому аргументу функция. Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингсхейму на $[-\pi,\pi]^m$.*

Для тригонометрических интерполяционных полиномов аналог теоремы 1.1 был доказан А. А. Кельзоном [6] (см. также [4]), а аналог теоремы 1.2 был доказан в работе А. Нурбекяна и А. Саакяна [8].

В настоящей работе доказан аналог теоремы 1.3 для тригонометрических интерполяционных полиномов и установлена его окончательность.

2. Вспомогательные результаты

Определение 2.1. *Пусть функция $f(x_1,\dots,x_m)$ 2π-периодична по каждому аргументу и $T=[-\pi,\pi]$. Для набора натуральных чисел $N=(N_1,\dots,N_m)$ и вектора $\mathbf{x}^0=(x_1^0,\dots,x_m^0)\in T^m$ определим узлы интерполяции следующим образом:*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\mathbf{j} &= \mathbf{x}_\mathbf{j}(\mathbf{x}^0,N)=\left(x_{j_1}^1,\dots,x_{j_m}^m\right), \qquad \mathbf{j}=(j_1,\dots,j_m)\in\mathbb{Z}^m,\\ x_j^i &= x_0^i+jh_{N_i}, \quad h_{N_i}=\frac{2\pi}{2N_i+1}, \quad i=1,\dots,m, \quad j\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Через $I^{N_1,\dots,N_m}(f,\mathbf{x})$ обозначим единственный тригонометрический (интерполяционный) полином вида

$$\sum_{\nu_1=-N_1}^{N_1}\cdots\sum_{\nu_m=-N_m}^{N_m} c_{\nu_1,\dots,\nu_m}^{N_1,\dots,N_m} e^{i\nu_1x_1}\dots e^{i\nu_mx_m}$$

для которого

$$I^{N_1,\dots,N_m}(f,\mathbf{x}_\mathbf{j})=f(\mathbf{x}_\mathbf{j}), \qquad \mathbf{j}\in\mathbb{Z}^m.$$

Как показано в [1], $n_1,\dots,n_m$-частичные суммы интерполяционного полинома задаются формулами:

$$I_{n_1,\dots,n_m}^{N_1,\dots,N_m}(f,\mathbf{x}):=\sum_{\nu_1=-n_1}^{n_1}\cdots\sum_{\nu_m=-n_m}^{n_m} c_{\nu_1,\dots,\nu_m}^{N_1,\dots,N_m} e^{i\nu_1x_1}\dots e^{i\nu_mx_m} \tag{2.1}$$

$$=\frac{1}{\pi^m}\int_{T^m} f(x_1+t_1,\dots,x_m+t_m)D_{n_1}(t_1)\cdots D_{n_m}(t_m)d\omega_{2N_1+1}(t_1)\dots d\omega_{2N_m+1}(t_m),$$

где $\omega_{2N_i+1}(t_i)$ – непрерывная слева, ступенчатая функция со скачками h_{N_i} в точках x_i^j, $j=1,\dots,2N_i+1$, а $D_n(t)$ – ядро Дирихле.

Теорема 2.1. *Пусть $f\in HBV(\Delta^m)$ для некоторого интервала $\Delta\subset T$. Тогда*

$$\left|\int_{\Delta^m} f(t_1,\dots,t_m)\prod_{i=1}^m\frac{\sin n_it_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right| \tag{2.2}$$

$$\le\prod_{i=1}^m\frac{2N_i+1}{2n_i}\times\left(V_H(f,\Delta^m)+M(f,\Delta^m)\right),$$

где $M(f,\Delta^m) = \sup_{\mathbf{x}\in\Delta^m} f(\mathbf{x})$.

Доказательство. Теорему докажем индукцией по m. Для $m = 1$ она доказана в работе [8]. Предположим, что теорема верна для $m-1$ и докажем для m. Обозначив

$$\phi(t_1) = \int_{\Delta^{m-1}} f(t_1,\ldots,t_m) \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m),$$

интеграл в (2.2) можем представить в виде

$$I = \int_{\Delta} \phi(t_1) \frac{\sin n_1 t_1}{t_1} d\omega_{2N_1+1}(t_1).$$

Применив теорему в одномерном случае, получим

$$|I| \le \frac{2N_1+1}{2n_1}\big(V_H(\phi,\Delta) + M(\phi,\Delta)\big). \tag{2.3}$$

А в силу индуктивного предположения для $m-1$ и $t \in \Delta$ будем иметь

$$|\phi(t)| \le \prod_{i=2}^{m} \frac{2N_i+1}{2n_i} \times \big[f(t,\cdot,\ldots,\cdot), V_H(\Delta^{m-1}) + M(f(t,\cdot,\ldots,\cdot),\Delta^{m-1})\big]. \tag{2.4}$$

Для оценки гармонической вариации функции ϕ рассмотрим гармоническую сумму по некоторому семейству попарно непересекающихся интервалов $\{\Delta_k\}_{k=1}^r = \{(\alpha_k,\beta_k)\}_{k=1}^r$ из Δ:

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{|\phi(\Delta_k)|}{k} =$$

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\epsilon_k}{k} \int\limits_{\Delta^{m-1}} [f(\beta_k,t_2,\ldots,t_m) - f(\alpha_k,t_2,\ldots,t_m)] \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin nt_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) =$$

$$= \int\limits_{\Delta^{m-1}} \sum_{k=1}^{r} \frac{\epsilon_k}{k} [f(\beta_k,t_2,\ldots,t_m) - f(\alpha_k,t_2,\ldots,t_m)] \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin nt_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$

$$= \int_{\Delta^{m-1}} \psi(t_2,\ldots,t_m) \prod_{i=2}^{m} \frac{\sin nt_i}{t_i} d\omega_{2N_2+1}(t_2)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$

$$\le \prod_{i=2}^{m} \frac{2N_i+1}{2n_i} \times \big[V_H(\psi,\Delta^{m-1}) + M(\psi,\Delta^{m-1})\big],$$

где через ψ обозначена функция

$$\psi(t_2,\ldots,t_m) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\epsilon_k}{k} [f(\beta_k,t_2,\ldots,t_m) - f(\alpha_k,t_2,\ldots,t_m)].$$

Нетрудно показать, что

$$V_H(\psi,\Delta^{m-1}) \le V_H(f,\Delta^m), \qquad M(\psi,\Delta^{m-1}) \le V_H(f,\Delta^m). \tag{2.5}$$

Из (2.3)-(2.5) вытекает требуемая оценка (2.2). Теорема 2.1 доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ – 2π-периодическая по каждому переменному функция, и $f\in HBV(T^m)$. Тогда*

$$\left|\int_{T^m} f(t_1,\dots,t_m)e^{i(n_1t_1+\cdots+n_mt_m)}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right|$$
$$\le (2\pi)^{m-1}\frac{2N_j+1}{2n_j}\frac{1}{\ln N_j}V_H(f)$$

для любого $j=1,\dots,m$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $j=1$. Теперь воспользуемся аналогом теоремы 2.2 для одномерного случая, который был доказан в [4] (теорема 2):

$$\left|\int_{T^m} f(t_1,\dots,t_m)e^{i(n_1t_1+\cdots+n_mt_m)}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right| =$$
$$=\left|\int_{T^{m-1}} e^{i(n_2t_1+\cdots+n_mt_m)}\left[\int_T f(t_1,\dots,t_m)e^{in_1t_1}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\right]\prod_{k=2}^m d\omega_{2N_k+1}(t_k)\right|\le$$
$$\le(2\pi)^{m-1}\max_{t_2,\dots,t_m}\left|\int_T f(t_1,\dots,t_m)e^{in_1t_1}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\right|\le(2\pi)^{m-1}\frac{2N_1+1}{2n_1}\frac{1}{\ln N_1}V_H(f).$$

Теорема 2.2 доказана. □

Теорема 2.3. *Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ и $g(x_1,\dots,x_m)=\prod_{i=1}^m g_i(x_i)$. Если $f\in HBV(T^m)$, $g_i\in HBV(T), i=1,\dots,m$, тогда*

(2.6)
$$\left|\int_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})g(\mathbf{t})\left[\prod_{j=1}^k\frac{\sin n_jt_j}{t_j}\times\prod_{s=k+1}^m e^{in_st_s}\right]d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_k+1}(t_k)\right|\le$$
$$\le C(f,g)\left[\prod_{j=1}^k\frac{2N_j+1}{2n_j}\right]\times\frac{2N_s+1}{2n_s}\frac{1}{\ln N_s},$$

для любых $\mathbf{x}\in T^m$, $n_j\le N_j$, $j=1,\dots,k$, $s=k+1,\dots,m$, $k=1,\dots,m$.

Доказательство. Обозначим

$$F(\mathbf{t})=f(\mathbf{x}+\mathbf{t})g(\mathbf{t}),\quad \mathbf{x},\mathbf{t}\in\mathbb{R}^m.$$

По лемме 1.2 из [7] имеем, что $F\in HBV(T^m)$. Обозначив

$$\phi(t_{k+1},\dots,t_m)=\int_{T^k} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})g(\mathbf{t})\prod_{j=1}^k\frac{\sin n_jt_j}{t_j}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_k+1}(t_k),$$

интеграл в (2.6) можем записать в следующем виде

$$\left|\int_{T^{m-k}} \phi(t_{k+1},\dots,t_m) \prod_{s=k+1}^{m} e^{in_s t_s} d\omega_{2N_{k+1}+1}(t_{k+1})\dots d\omega_{2N_m+1}(t_m)\right| \le \tag{2.7}$$
$$\le (2\pi)^{m-k-1}\frac{2N_s+1}{2n_s}\frac{1}{\ln N_s}V_H(\phi)$$

и оценить с помощью теоремы 2.2, где $s\in\{k+1,\dots,m\}$.

Гармоническая вариация функции ϕ оценивается так, как в доказательстве теоремы 2.1:

$$V_H(\phi)\le C\prod_{j=1}^{k}\frac{2N_j+1}{2n_j}V_H(F). \tag{2.8}$$

Из оценок (2.7) и (2.8) следует (2.6). □

Теорема 2.4. *Пусть $f(x_1,\dots,x_m)$ – 2π-периодическая по каждому переменному функция, и $f\in HBV(T^m)$. Для любого $\varepsilon>0$*

$$I_{n_1,\dots,n_m}^{N_1,\dots,N_m}(f,x)=\frac{1}{\pi^m}\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin n_i t_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)+o(1),$$

где $o(1)$ стремится к 0 равномерно на T^m, когда $n_i\to\infty$, $i=1,\dots m$ так, что отношения $\frac{N_i}{n_i}$ равномерно ограничены.

Доказательство. Запишем ядро Дирихле $D_n(t)$ в следующем виде:

$$D_n(t)=\frac{\sin nt}{t}+g(t)\sin nt+\frac{1}{2}\cos nt,\quad t\in T,$$

где

$$g(t)=\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{t},\quad 0<|t|\le\pi,\quad g(0)=0.$$

Тогда, согласно (2.1),

$$\pi^m\cdot I_{n_1,\dots,n_m}^{N_1,\dots,N_m}(f,\mathbf{x})=\int_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}D_{n_i}(t_i)d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$
$$=\int_{[-\varepsilon,\varepsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin n_i t_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)+I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1 = \int_{T^m\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\frac{\sin n_i t_i}{t_i}d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m)$$
$$I_2 = \int_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t})\prod_{i=1}^{m}\left[g(t_i)\sin n_i t_i+\frac{1}{2}\cos n_i t_i\right]d\omega_{2N_1+1}(t_1)\cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m),$$

а I_3 является суммой по $k = 1, \ldots, m-1$ и всевозможным комбинациям $(i_1, \ldots, i_m)$ интегралов следующего вида

$$\int\limits_{T^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{s=1}^{k} \frac{\sin n_{i_s} t_{i_s}}{t_{i_s}} \prod_{s=k+1}^{m} \left[g(t_{i_s}) \sin n_{i_s} t_{i_s} + \frac{1}{2} \cos n_{i_s} t_{i_s} \right] d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m).$$

Сначала оценим интеграл I_1. Обозначим

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } |t| < \epsilon \\ \frac{1}{t}, & \text{если } |t| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Так как функция h ограничена на T, то используя лемму 1.2 из [7] получаем

$$F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{i=1}^{m} h(t_i) \in HBV(T^m), \quad V_H(F) \leq C(\epsilon) V_H(f).$$

Применив теорему 2.2 для функции F, получим нужную оценку для I_1.

Далее, нетрудно убедиться, что $g \in HBV(T)$ и с учетом леммы 1.2 из [7] получаем

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{i=1}^{m} g(t_i) \in HBV(T^m),$$

что вместе с теоремой 2.2 дает нужную оценку для I_2.

Интегралы в I_3 являются суммами интегралов вида (2.6), где $g_i = g$ или $g_i = \frac{1}{2}$ и оцениваются по теореме 2.3, откуда следует нужная оценка для I_3, так как количество интегралов вида (2.6) составляющих I_3 конечно и зависит только от m. □

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть f – 2π-периодическая по каждому переменному функция и $f \in CHV(T^m)$. Тогда для любой регулярной точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in T^m$,*

$$\lim_{n_1, \ldots, n_m \to \infty} I_{n_1, \ldots, n_m}^{N_1, \ldots, N_m}(f, \mathbf{x}) = \frac{1}{2^m} \sum f(x_1 \pm 0, \ldots, x_m \pm 0), \tag{3.1}$$

при условии, что отношения N_i/n_i равномерно ограничены.

Если, кроме того, функция f непрерывна в окрестности компакта K, то (3.1) имеет место равномерно по $\mathbf{x} \in K$.

Доказательство. По теореме 2.4 достаточно показать, что

$$\lim_{n_1, \ldots, n_m \to \infty} \frac{1}{\pi^m} \int_{[0,\epsilon]^m} f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) \prod_{i=1}^{m} \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) = \frac{1}{2^m} f(\mathbf{x}+0), \tag{3.2}$$

где

$$n_i \le N_i \le L \cdot n_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3.3}$$

(L – фиксированная константа) и

$$f(\mathbf{x}+0) = \lim_{t_1,\ldots,t_m \to +0} f(x_1+t_1, \ldots, x_m+t_m).$$

Из теоремы 2.4 следует, что

$$\lim_{n_1,\ldots,n_m \to \infty} \frac{1}{\pi^m} \int_{[0,\epsilon]^m} \prod_{i=1}^m \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) = \frac{1}{2^m}.$$

Следовательно, если обозначим

$$\psi(\mathbf{t}) = \psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}+0),$$

то соотношение (3.2) примет вид:

$$\lim_{n_1,\ldots,n_m \to \infty} \frac{1}{\pi^m} \int_{[0,\epsilon]^m} \psi(\mathbf{t}) \prod_{i=1}^m \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) = 0. \tag{3.4}$$

Но по теореме 2.1,

$$\left| \int_{[0,\epsilon]^m} \psi(\mathbf{t}) \prod_{i=1}^m \frac{\sin n_i t_i}{t_i} d\omega_{2N_1+1}(t_1) \cdots d\omega_{2N_m+1}(t_m) \right|$$
$$\le (L+1)^m \left[V_H(\psi, [0,\epsilon]^m) + M(\psi, [0,\epsilon]^m) \right],$$

где L - постоянная из (3.3). Отсюда следует (3.4), а, следовательно, и утверждение теоремы, так как из условия $f \in CHV(T^m)$ вытекает, что (см теорему 2 из [5]),

$$\lim_{\epsilon \to 0} V_H(\psi, [0,\epsilon]^m) = 0, \qquad \lim_{\epsilon \to 0} M(\psi, [0,\epsilon]^m) = 0, \tag{3.5}$$

при этом, если f непрерывна в окрестности компакта K, то (3.5) имеет место равномерно по $\mathbf{x} \in K$. Теорема 3.1 доказана. □

В случае $m > 2$ в [5] (Теорема 5) приведен пример непрерывной функции с ограниченной гармонической вариацией ряд Фурье которой расходится в некоторой точке. Приведем аналогичный пример для тригонометрических интерполяционных полиномов. При построении примера воспользуемся элементами конструкции примера в [5].

Теорема 3.2. *Пусть $m \ge 3$ и последовательности $\Lambda^1, \ldots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \cdots \lambda_k^m} < \infty.$$

Тогда в классе $(H,\Lambda^2,\ldots,\Lambda^m)BV([-\pi,\pi]^m)$ существует непрерывная функция тригонометрические интерполяционные полиномы которой расходятся по кубам в $\mathit{0}=(0,\ldots,0)$.

В частности, это означает, что в случае $m>2$ в теореме 3.1 класс $CHV([-\pi,\pi]^m)$ нельзя заменить классом $HBV([-\pi,\pi]^m)$.

Доказательство. Для построения функции воспользуемся так называемыми "диагональными" функциями определенными в [5]. Пусть n_k, N_k натуральные числа такие, что

$$n_1=4,\ n_k\geq 3,\qquad N_0=1,\quad N_k=n_1n_2\cdots n_k=N_{k-1}n_k. \tag{3.6}$$

Для натуральных k определим интервалы $D_k^1=(\pi/N_k,\pi/N_{k-1})$. Узлами интерполяции будут служить точки

$$t_j=-\pi+\frac{2\pi j}{2N_k+1},\qquad j=0,1,\ldots,2N_k.$$

Определим функции f_k с помощью которых будет задана "диагональная" функция. Мы полагаем $f_k(t)=0$ при $t\in T\setminus D_k^1$. В узлах t_j, которые находятся в D_k^1 полагаем

$$f_k(t_j)=\frac{1}{\ln n_k}sgn\left[\sin(N_k+1/2)t_j\right],$$

а на интервалах между узлами функция f_k линейная. Заметим, что из определения следует, что $f_k(\frac{\pi}{N_k})=f_k(\frac{\pi}{N_{k-1}})=0$. Легко проверить, что номерами узлов, которые лежат в D_k^1 являются $j=N_k+2,\ldots,N_k+n_k$. Носитель функции f_k делится точками t_k на n_k интервалов монотонности. Приращение функции на (n_k-2) интервалах монотонности равняется $\frac{2}{\ln n_k}$, а на остальных двух равняется $\frac{1}{\ln n_k}$. Следовательно

$$V_H(f_k,T)=\frac{1}{\ln n_k}\left(\sum_{j=1}^{n_k-2}\frac{2}{j}+\frac{1}{n_k-1}+\frac{1}{n_k}\right)\leq 4.$$

Далее, обозначим $D_k^2=(\pi/(N_k+1/2),\ 2\pi/(N_k+1/2))$ и

$$h_k(t)=\begin{cases}\sin(N_k+1/2)t, & \text{если } t\in D_k^2,\\ 0, & \text{если } t\in T\setminus D_k^2\end{cases}$$

Тогда "диагональная" функция

$$f(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{\infty}\left(f_{2j}(x^1)\prod_{q=2}^{m}h_{2j}(x^q)\right),\qquad \mathbf{x}=(x^1,\ldots,x^m)\in T^m, \tag{3.7}$$

принадлежит классу $(H,\Lambda^2,\ldots,\Lambda^m)BV(T^m)$ по лемме 6 в [5].

Сначала докажем, что ряд в (3.7) сходится равномерно. Покажем, что для любого $\epsilon > 0$ существует число $N_0 > 0$ такое, что при $N > N_0$

$$\left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(f_{2j}(x^1) \prod_{q=2}^{m} h_{2j}(x^q) \right) \right| < \epsilon \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m) \in T^m.$$

Заметим, что $\max|f_j(t)| \searrow 0$ при $j \to \infty$. Выберем $N_0 > 0$ так, что $\max|f_j(t)| < \epsilon$ при $j > N_0$. Так как $|h_j(t)| \leq 1$, то ясно, что

$$\left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \left(f_{2j}(x^1) \prod_{q=2}^{m} h_{2j}(x^q) \right) \right| \leq \sum_{j=N+1}^{\infty} |f_{2j}(x^1)|.$$

Поскольку по построению носители функций f_k лежат в интервалах D_k^1, то для любого $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^m) \in T^m$ имеем

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |f_{2j}(x^1)| = 0, \quad \text{если} \quad x^1 \notin \bigcup_{j=N+1}^{\infty} D_{2j}^1.$$

В противном случае, так как интервалы D_k^1 попарно не пересекаются, то для некоторого $j_0 > N > N_0$ будем иметь

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} |f_{2j}(x^1)| = |f_{2j_0}(x^1)| < \epsilon,$$

что и требовалось доказать.

Из равномерной сходимости ряда (3.7) и непрерывности функций f_j и h_j следует, что функция f непрерывна на T^m.

Обозначим

$$I_N(f) = I_{N,\ldots,N}^{N,\ldots,N}(f), \qquad N = 1, 2, \ldots$$

и докажем, что в (3.6) последовательность n_k можно выбрать так, чтобы для

$$R_k = I_{N_k}(f, 0) \quad \text{и} \quad \delta = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{2}{3\pi}\right)^{m-1},$$

при достаточно больших k имели место оценки

$$R_k \geq 2\delta \quad \text{при четных } k, \qquad R_k \leq \delta \quad \text{при нечетных } k.$$

Так как ряд (3.7) равномерно сходится,

$$R_k = \sum_{j=1}^{\infty} I_{N_k}(f_{2j}, 0)(I_{N_k}(h_{2j}, 0))^{m-1} =: \sum_{j=1}^{\infty} R_{k,2j}.$$

Сначала рассмотрим величины $I_{N_k}(f_{2j}, 0)$. Для любого k

$$(3.8)\quad I_{N_k}(f_k,0)=\frac{1}{\pi\ln n_k}\int_{\pi/N_k}^{\pi/N_{k-1}} f_k(t)\frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin t/2}d\omega_{2N_k+1}(t)=$$
$$\frac{1}{\pi\ln n_k}\sum_{j=N_k+2}^{N_k+n_k}\frac{1}{2\sin(t_j/2)}\times\frac{\pi}{N_k+1/2}\geq\frac{1}{(2N_k+1)\ln n_k}\sum_{j=N_k+2}^{N_k+n_k}\frac{1}{\frac{2}{\pi}\times\frac{t_j}{2}}=$$
$$\frac{1}{2\ln n_k}\sum_{j=N_k+2}^{N_k+n_k}\frac{1}{j-N_k-1/2}=\frac{1}{2\ln n_k}\sum_{j=1}^{n_k-1}\frac{1}{j+1/2}\geq\frac{1}{2\ln n_k}(\ln n_k-1)\geq\frac{1}{3},$$

при достаточно больших n_k. Пусть $f_0(t)=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(t)$, тогда

$$(3.9)\quad \sum_{i=k+1}^{\infty}|I_{N_k}(f_i,0)|=\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left|\int_0^{\pi}f_i(t)\frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin t/2}d\omega_{2N_k+1}(t)\right|$$
$$\leq\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{N_k}}|f_0(t)|\,\frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin t/2}d\omega_{2N_k+1}(t)=\frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi}{2N_k+1}\times\left|f_0\left(\frac{\pi}{2N_k+1}\right)\right|$$
$$\times\left|\frac{\sin(N_k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2N_k+1}}{2\sin\pi/2(2N_k+1)}\right|\leq\frac{1}{2N_k+1}\max_{t\in(0,\pi/N_k)}|f_0(t)|\times\frac{1}{\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2(2N_k+1)}}\leq\frac{\delta}{2},$$

при достаточно больших n_k. В доказательстве неравенства мы воспользовались тем, что единственным узлом интерполяции в интервале $\left(0,\frac{\pi}{N_k}\right)$ является $t_{N_k+1}=\frac{\pi}{2N_k+1}$ и $|f_0(t)|=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i(t)|$, так как носители f_i попарно не пересекаются.

Если числа $n_1,\dots,n_{k-1}$ уже выбраны, то для $i=1,2,\dots,k-1$,

$$I_{N_k}(f_i,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_i(t)\frac{\sin N_k t}{t}d\omega_{2N_k+1}(t)+o(1)\quad\text{при}\quad N_k\to\infty,$$

где интеграл является коэффициентом Фурье-Лагранжа непрерывной функции $\frac{f_i(t)}{t}$, который стремится к нулю, когда $N_k\to\infty$. Следовательно число n_k можно выбрать так, чтобы

$$(3.10)\qquad \sum_{i=1}^{k-1}|I_{N_k}(f_i,0)|\leq\frac{\delta}{2},$$

Перейдем к оценкам $I_{N_k}(h_i,0)$. Учитывая, что для любого k единственной узловой точкой в D_k^2 является $\frac{3\pi}{2N_k+1}$, то будем иметь

$$
\begin{aligned}
(3.11)\quad I_{N_k}(h_k,0) &= \frac{1}{\pi}\int_{\pi/(N_k+1/2)}^{2\pi/(N_k+1/2)} \frac{(\sin(N_k+1/2)t)^2}{2\sin(t/2)}\,d\omega_{2N_k+1}(t) \\
&= \frac{\left(\sin\left[\left(N_k+\frac{1}{2}\right)\times\frac{3\pi}{2N_k+1}\right]\right)^2}{2\pi\sin\left(\frac{3\pi}{4(N_k+1/2)}\right)} \times \frac{\pi}{N_k+1/2} = \frac{1}{(2N_k+1)\sin\left(\frac{3\pi}{4N_k+2}\right)} \\
&\geq \frac{1}{(2N_k+1)\frac{3\pi}{4N_k+2}} = \frac{2}{3\pi} := C_0,
\end{aligned}
$$

Далее, для $i \neq k$ имеем, что

$$
\begin{aligned}
(3.12)\quad |I_{N_k}(h_i,0)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{\pi/(N_k+1/2)}^{2\pi/(N_k+1/2)} \left[\sin\left(N_i+\frac{1}{2}\right)t\right] \frac{\sin(N_k+1/2)t}{2\sin(t/2)}\,d\omega_{2N_k+1}(t)\right| \\
&\leq \frac{1}{\pi}\times\frac{\pi}{N_i+1/2}\times\frac{1}{2\sin(\pi/(2N_k+1))} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Тогда, с учетом (3.10),

$$
(3.13)\qquad \sum_{2j<k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2}.
$$

Учитывая (3.8), (3.11) и (3.9), (3.12), выберем k_0 так, чтобы при $k \geq k_0$

$$
(3.14)\qquad R_{k,k} \geq \frac{C_0^{m-1}}{4} = 3\delta, \qquad \sum_{2j>k} |R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2}.
$$

Из соотношений (3.13) и (3.14) получим, что при четных $k \geq k_0$

$$
R_k \geq R_{k,k} - \sum_{2j<k}|R_{k,2j}| - \sum_{2j>k}|R_{k,2j}| \geq 3\delta - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 2\delta,
$$

а при нечетных $k \geq k_0$

$$
|R_k| \leq \sum_{2j<k}|R_{k,2j}| + \sum_{2j>k}|R_{k,2j}| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,
$$

что и доказывает расходимость интерполяционных полиномов по кубам в точке 0. □

Abstract. The paper considers the question of convergence of partial sums of multidimensional trigonometric interpolation polynomials. Convergence by Pringsheim for functions that are continuous in harmonic variation is established. An example is constructed showing that continuity in variation cannot be replaced by boundedness of variation.

Список литературы

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, ч.2. Москва, Мир (1965).
[2] D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", Studia Math., **44**, no. 1, 107 – 117 (1972).
[3] D. Waterman, "On the summability of Fouries series of functions of Λ-bounded variation", Studia Math., **55**, 87 – 95 (1976).
[4] D. Waterman, H. Xing, "The convergence of partial sums of interpolating polynomials", J. Math. Anal. Appl., **333**, 543 – 555 (2007).
[5] А. Н. Бахвалов, "Непрерывность по Λ-вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье", Математический Сборник, **193**, no. 12, 3 – 20 (2002).
[6] А. А. Кельзон, "О тригонометрическом интерполировании функций Λ-ограниченной вариации", ДАН СССР, **286**, no. 5, 1062 – 1064 (1997).
[7] А. А. Саакян, "О сходимостй двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. АН АрмССР, Математика, **22**, no. 6, 517 – 529 (1987).
[8] А. Р. Нурбекян, А. А. Саакян, "Сходимость двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, серия Математика, **49**, no. 4, 35 – 46 (2014).
[9] А. И. Саблин, "Λ-вариация и ряды Фурье", Изв. вузов, Сер. матем., **28**, no. 3, 3 – 20 (1993).

Поступила 1 сентября 2014