Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 2, 2015, стр. 3-12.

ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ОРИЕНТАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИНЫ СЛУЧАЙНОГО ОТРЕЗКА И КОВАРИОГРАММА

А. ГАСПАРЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mails: *ara1987-87@mail.ru*; *victo@aua.am*

Аннотация. В статье рассмотрен случайный отрезок $L(\omega)$ в R^n с фиксированными направлением и длиной при условии, что $L(\omega)$ пересекает ограниченное выпуклое тело $\mathbf{D}$. Получена связь между ковариограммой и распределением случайной величины $|L|(=$ длина $L\cap\mathbf{D})$. Также получена связь между распределением $|L|$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды. Используя нашу формулу получаем связь между функциями распределения длины хорды и случайной величины $|L|$.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65

Ключевые слова: Ковариограмма; зависящее от ориентации распределение случайного отрезка; зависящая от ориентации функция распределения длины хорды; выпуклое тело.

1. Введение

Пусть $R^n (n\geq 2)$ - n-мерное евклидово пространство, $\mathbf{D}\subset R^n$ - ограниченная выщуклая область с внутренними точками, а $V_n(\cdot)$ - n - мерная мера Лебега в R^n.

Определение 1.1. *(см. [3]). Функция*

$$C(h)=V_n(\mathbf{D}\cap(\mathbf{D}+h)),\quad h\in R^n, \tag{1.1}$$

называется ковариограммой тела $\mathbf{D}$. *Здесь* $\mathbf{D}+h=\{x+h, x\in\mathbf{D}\}$.

Ж. Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела $\mathbf{D}$ определяет ее в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [3]). Г. Бианчи и Г. Аверков доказали, что каждая плоская выпуклая область определяется в классе всех плоских выпуклых областей по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов и отражений (см. [4]). Пусть S^{n-1} - $(n-1)$-мерная единичная сфера с центром в начале координат в R^n. Рассмотрим случайную прямую из $\Omega_1(u)$:

$$\Omega_1(u)=\{\text{прямые параллельные направлению } u \text{ и пересекающие } \mathbf{D}\}.$$

Пусть $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ - ортогональная проекция $\mathbf{D}$ на гиперплоскость $u^\perp$($u^\perp$ - гиперплоскость проходящая через начало координат с нормальным вектором u). Случайная прямая, параллельная направлению u и пересекающая $\mathbf{D}$ имеет точку пересечения (обозначим ее через x) с $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$. Можно отождествлять точки $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ с прямыми, которые пересекают $\mathbf{D}$ и параллельны направлению u. Последнее означает, что можно отождествлять $\Omega_1(u)$ и $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$. Предположив, что точка пересечения x равномерно распределена в выпуклом теле $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ мы можем определить следующую функцию распределения:

Определение 1.2. *Функция*

$$F(u,t)=\frac{V_{n-1}\{x\in\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}:V_1(g(u,x)\cap\mathbf{D})<t)\}}{b_{\mathbf{D}}(u)} \tag{1.2}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды $\mathbf{D}$ *в направлении* u *в точке* $t\in R^1$, *где* $g(u,x)$ *- прямая параллельная* u *и пересекающая* $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}$ *в точке* x, *а* $b_{\mathbf{D}}(u)=V_{n-1}(\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D})$.

Вектор $h\in R^n$ можно задавать как $h=tu$, где u - направление h, а t его длина.

Лемма 1.1. *(см. [3]). Пусть* $u\in S^{n-1}$, *а* $t>0$ *такое, что* $\mathbf{D}\cap(\mathbf{D}+tu)$ *содержит внутренние точки. Тогда* $C(u,t)$ *дифференцируема по* t *и*

$$-\frac{\partial C(u,t)}{\partial t}=(1-F(u,t))\cdot b_{\mathbf{D}}(u). \tag{1.3}$$

Пусть $L(\omega)$ - случайный отрезок длины $l>0$, параллельный фиксированному направлению u и пересекающий $\mathbf{D}$. Рассмотрим случайную величину $|L|(\omega)=V_1(L(\omega)\cap\mathbf{D})$, где $L(\omega)\in\Omega_2(u)$, причем

$\Omega_2(u)=\{$отрезки длины l, параллельные направлению u и пересекающие $\mathbf{D}\}$.

Случайный отрезок $L(\omega)$, лежащий на прямой $g(u,x)$, можно задавать координатами $(g(u,x),y)$, где y одномерная координата центра отрезка $L(\omega)$ на прямой $g(u,x)$. Началом координат на прямой $g(u,x)$ берется одна из точек пересечений $g(u,x)$ с $\partial\mathbf{D}$. Используя вышеупомянутые обозначения можно отождествлять $\Omega_2(u)$ с множеством:

$$\Omega_2(u)=\left\{(x,y):x\in\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D},\quad y\in\left[-\frac{l}{2},\chi(u,x)+\frac{l}{2}\right]\right\},$$

где $\chi(u,x)=V_1(g(u,x)\cap\mathbf{D})$. Заметим, что $\Omega_2(u)$ не зависит от того, какая из двух точек пересечений $g(u,x)\cap\mathbf{D}$ берется в качестве начала координат. Какое из двух направлений выбрано в качестве положительного следует из вида интервала изменения y. Далее, обозначим

$$B_{\mathbf{D}}^{u,t} = \{(x,y) \in \Omega_2(u): \ |L|(x,y) < t\}, \quad t \in R^1,$$

Очевидно, что $\Omega_2(u)$ и $B_{\mathbf{D}}^{u,t}$ измеримые подмножества в R^n.

Определение 1.3. *Функция*

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{V_n(B_{\mathbf{D}}^{u,t})}{V_n(\Omega_2(u))} = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{B_{\mathbf{D}}^{u,t}} dx\,dy \tag{1.4}$$

называется зависящей от ориентации функцией распределения длины случайного отрезка в направлении $u \in S^{n-1}$.

Пусть G_n - пространство всех прямых в R^n. Прямую $g \in G_n$ можно задавать ее направлением $u \in S^{n-1}$ и точкой пересечения x с гиперплоскостью $u^\perp$. Плотность $du^\perp$ - элемент объема du единичной сферы S^{n-1}, а dx - элемент объема $u^\perp$ в точке x. Пусть $\mu(\cdot)$ локально-конечная мера в пространстве G_n, инвариантная относительно группы всех евклидовых движений плоскости. Известно, что элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид (см. [1], стр. 204)

$$\mu(dg) = dg = du dx$$

Обозначим через $O_{n-1} = V_{n-1}(S^{n-1})$ меру Лебега единичной сферы в R^n. Для каждого ограниченного выпуклого тела $\mathbf{D}$, обозначим множество прямых, пересекающих $\mathbf{D}$ через

$$[\mathbf{D}] = \{g \in G_n, \ g \cap \mathbf{D} \neq \emptyset\}$$

Имеем (см. [1], стр. 233)

$$\mu([\mathbf{D}]) = \frac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})}{2(n-1)}$$

Случайная прямая в $[\mathbf{D}]$ есть прямая с распределением пропорциональным сужению меры μ на $[\mathbf{D}]$. Следовательно, для каждого $t \in R^1$ имеем

$$F(t) = \frac{\mu(\{g \in [\mathbf{D}], \ V_1(g \cap \mathbf{D}) < t\})}{\mu([\mathbf{D}])}$$

$F(t)$ называется функцией распределения длины хорды тела $\mathbf{D}$.

Пусть L - случайный отрезок длины l в R^n и $K(\cdot)$ - кинематическая мера отрезка L (см. [1]). Если $g \in G_n$ прямая, содержащая L и y одномерная координата центра отрезка L на g, тогда элемент кинематической меры с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$dK = dg\, dy\, dK_{[1]},$$

где dy одномерная лебегова мера на g, а $dK_{[1]}$ элемент движений в R^n, оставляющие прямую g неподвижной (см. [2], стр. 201, 160, 125). В случае ориентированного отрезка, вышеупомянутый постоянный множитель равен 1, а для неориентированного отрезка множитель $\frac{1}{2}$ (В этой статье рассматриваются только неориентированные отрезки).

Длина случайного отрезка, при условии, что L пересекает $\mathbf{D}$, имеет следующую функцию распределения

$$F_{|L|}(t) = \frac{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset, V_1(L \cap \mathbf{D}) < t)}{K(L : L \cap \mathbf{D} \neq \emptyset)}, \qquad t \in R^1.$$

$F_{|L|}(t)$ - функция распределения длины случайного отрезка L.

2. Основные результаты

В настоящей работе получены следующие результаты:

1. Связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\omega)$ и зависящей от ориентации функцией распределения длины хорды в R^n:

$$(2.1) \quad F_{|L|}(u,t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \leq 0, \\ \dfrac{b_{\mathbf{D}}(u)\left[2t + F(u,t)(l-t) - \int_0^t F(u,z)dz\right]}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)} & \text{для} \quad 0 \leq t \leq l, \\ 1 & \text{для} \quad t > l. \end{cases}$$

В [5]-[7] получены явные выражения зависящей от ориентации функции распределения длины хорды для треугольника, эллипса, правильного многоугольника и параллелограмма. Следовательно, подставляя в (2.1) $n = 2$ и $F(u,t)$ получаем явные выражения для $F_{|L|}(u,t)$ для вышеупомянутых плоских выпуклых областей.

2. Из (2.1) можно получить значения $F(u,t)$ на интервале $[0,l)$ в терминах функции распределения $F_{|L|}(u,t)$:

$$(2.2) \quad F(u,t) = \frac{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)}{(l-t) b_{\mathbf{D}}(u)} \left[F_{|L|}(u,t) + \frac{1}{l-t}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz\right] + 1 - \frac{l^2}{(l-t)^2}.$$

3. Получена связь между функцией распределения случайной величины $|L|(\omega)$ и ковариограммой на интервале $[0, l]$, которая дается следующей формулой:

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{V_n(\mathbf{D}) + l\, b_{\mathbf{D}}(u)}\left[\frac{\partial C(u,t)}{\partial t}(l-t) - C(u,t) + V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)\right] \tag{2.3}$$

Значения $F_{|L|}(u,t)$ равны 0, для $t \leq 0$ и равны 1, для $t > l$.

4. Из (2.3) можно получить значения производной коварограммы по t на интервале $[0, l)$ в терминах функции распределения $F_{|L|}(u,t)$.

$$-\frac{\partial C(u,t)}{\partial t} = \frac{l^2 b_{\mathbf{D}}(u)}{(l-t)^2} - \frac{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)}{l-t}\left[F_{|L|}(u,t) + \frac{1}{l-t}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz\right]. \tag{2.4}$$

5. Также получена связь между функцией распределения длины случайного отрезка, пересекающего $\mathbf{D}$ и функцией распределения длины хорды $\mathbf{D}$ в R^n:

$$F_{|L|}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t \leq 0, \\ \dfrac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})\left(2t + F(t)(l-t) - \int_0^t F(z)dz\right)}{(n-1)O_{n-1}V_n(\mathbf{D}) + lO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})} & \text{для} \quad 0 \leq t \leq l, \\ 1 & \text{для} \quad t > l. \end{cases} \tag{2.5}$$

Если предположить, что $F(t)$ имеет плотность, подставляя в (2.5) $n = 2$, получаем результат из [8].

3. Доказательства (2.1) – (2.4)

Согласно определению зависящей от ориентации распределения длины случайного отрезка, для расчета $F_{|L|}(u,t)$ мы должны найти n-мерную Лебегову меру для $\Omega_2(u)$ и $B_{\mathbf{D}}^{u,t}$. Сначала вычислим меру Лебега для $\Omega_2(u) \subset R^n$.

$$V_n(\Omega_2(u)) = \int_{\Omega_2(u)} dx\,dy = \int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} dy = \int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} (\chi(u,x) + l)\,dx =$$

$$= \int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} \chi(u,x)\,dx + l\int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} dx = V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u) \tag{3.1}$$

Очевидно, что $F_{|L|}(u,t) = 0$ для $t \leq 0$ и $F_{|L|}(u,t) = 1$ для $t > l$. Кроме того, для $0 < t \leq l$ имеем

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{B_{\mathbf{D}}^{u,t}} dx\,dy = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\Omega_2(u)} I(|L|(x,y) < t)\,dx\,dy =$$

$$\frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\,dy,$$

где I индикатор, т.е. $I(A) = 1$ если событие A выполнено и 0 в противном случае.

Можно представить $\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} \subset R^{n-1}$ в виде объединения двух непересекающихся множеств в R^{n-1}:

$$\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} = \{x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} : \chi(u,x) < t\} \cup \{x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} : \chi(u,x) \geq t\},$$

следовательно, имеем

$$\frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\, dy =$$

$$= \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\chi(u,x)<t} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\, dy +$$

$$+\frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\int_{\chi(u,x)\geq t} dx \int_{-\frac{l}{2}}^{\chi(u,x)+\frac{l}{2}} I(|L|(x,y) < t)\, dy$$

Если $\chi(u,x) < t$, то $I(|L|(x,y) < t) = 1$ для каждого $y \in [-\frac{l}{2}, \chi(u,x) + \frac{l}{2}]$.
Если $\chi(u,x) \geq t$, то $I(|L|(x,y) < t) = 1$ тогда и только тогда

$$y \in \left[-\frac{l}{2}, -\frac{l}{2} + t\right) \cup \left(\chi(u,x) + \frac{l}{2} - t, \chi(u,x) + \frac{l}{2}\right]$$

Следовательно, для зависящей от ориентации распределении длины случайного отрезка имеем

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\left[\int_{\chi(u,x)<t} (\chi(u,x) + l)\, dx + \int_{\chi(u,x)\geq t} 2t\, dx\right] =$$

$$(3.2) \quad = \frac{1}{V_n(\Omega_2(u))}\left[\int_{\chi(u,x)<t} \chi(u,x)\, dx + l b_{\mathbf{D}}(u) F(u,t) + 2t b_{\mathbf{D}}(u)(1 - F(u,t))\right],$$

где $F(u,t)$ - зависящая от ориентации функция распределения длины хорды $\mathbf{D}$, которая равна следующему выражению (см. (1.2))

$$(3.3) \qquad F(u,t) = \frac{1}{b_{\mathbf{D}}(u)}\int_{\chi(u,x)<t} dx$$

Используя (3.3) можно упростить следующий интеграл:

$$\int_{\chi(u,x)<t} \chi(u,x)\, dx = \int_{\Pi r_{u^\perp}\mathbf{D}} \chi(u,x) I(\chi(u,x) < t)\, dx = b_{\mathbf{D}}(u)\int_0^t z dF(u,z) =$$

$$= -b_{\mathbf{D}}(u)\int_0^t z d(1 - F(u,z)) = -b_{\mathbf{D}}(u)\left[t(1 - F(u,t)) - \int_0^t (1 - F(u,z)) dz\right] =$$

$$(3.4) \qquad = b_{\mathbf{D}}(u)\int_0^t (1 - F(u,z)) dz - b_{\mathbf{D}}(u) t (1 - F(u,t))$$

Подставляя (3.4) в (3.2) получаем (2.1).

Таким образом, если имеем зависящую от ориентации функцию распределения длины хорды тела $\mathbf{D}$, то можно получить зависящую от ориентации распределение длины случайного отрезка пересекающую $\mathbf{D}$. Отметим, что для каждого фиксированного направления $u \in S^{n-1}$ значения функции $F(u,t)$ восстанавливают значения функции $F_{|L|}(u,t)$. Попробуем решить обратную проблему: Найти значения функции $F(u,t)$, когда заданы значения $F_{|L|}(u,t)$ на действительной оси. Можно найти функцию $F(u,t)$ решив интегральное уравнение (2.1) на интервале $[0,l]$. Во-первых, сделаем следующие обозначения:

$$A = \frac{b_{\mathbf{D}}(u)}{V_n(\mathbf{D}) + l b_{\mathbf{D}}(u)} \quad \text{и} \quad G(u,t) = \int_0^t F(u,z)dz.$$

Очевидно, что $G(u,t)$ дифференцируема по t и $G'(u,t) = F(u,t)$. Следовательно, из (2.1) получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$F_{|L|}(u,t) = A[2t + G'(u,t)(l-t) - G(u,t)] \quad \text{для} \quad 0 \le t \le l \tag{3.5}$$

Легко заметить, что

$$G'(u,t)(l-t) - G(u,t) = ((l-t)G(u,t))' \tag{3.6}$$

Из (3.6) можно представить (3.5) следующим образом:

$$((l-t)G(u,t))' = A^{-1}F_{|L|}(u,t) - 2t \tag{3.7}$$

Интегрируя обе части (3.7) и деля на $l-t$ получаем выражение для $G(u,t)$ когда $0 \le t < l$:

$$G(u,t) = \frac{1}{l-t}\int (A^{-1}F_{|L|}(u,t) - 2t)dt = \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{A(l-t)}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz - \frac{t^2}{l-t} + B(u)$$

В наших обозначениях G(u,0)=0, следовательно $B(u) = 0$. Дифференцируя (3.8) по t получаем

$$F(u,t) = G'(u,t) = \left(\frac{1}{A(l-t)}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz - \frac{t^2}{l-t}\right)' = \frac{F_{|L|}(u,t)}{A(l-t)} +$$

$$+ \frac{1}{A(l-t)^2}\int_0^t F_{|L|}(u,z)dz - \frac{2lt-t^2}{(l-t)^2},$$

и после несложных преобразований получаем (2.2).

Таким образом, если имеем $F_{|L|}(u,t)$, то можно восстановить $F(u,t)$ на интервале $[0,l)$. Так как функция распределения $F(u,t)$ имеет левосторонний предел в каждой точке, то из (2.2) можно получить значение $F(u,t)$ в точке $t=l$:

$$F(u,l)=\lim_{t\to l-}F(u,t).$$

Подставляя (2.2) в (1.3), получаем (2.4).

Интегрируя (1.3) по t и используя начальные условия $C(u,0)=V_n(\mathbf{D})$, получаем

$$C(u,t)=V_n(\mathbf{D})+b(\mathbf{D},u)\int_0^t F(u,z)dz-tb(\mathbf{D},u). \tag{3.9}$$

Подставляя (3.9) и (1.3) в (2.1) получаем (2.3).

4. Доказательство формулы (2.5)

Используя (3.1), вычислим следующий интеграл:

$$\int_{L\cap\mathbf{D}\neq\emptyset}dg\,dy\,dK_{[1]}=\int_{S^1\times\ldots\times S^{n-2}\times S^{n-1}}dK_{[1]}\,du\int_{\mathbf{D}\cap L(x,y)\neq\emptyset}dx\,dy=$$

$$=O_{n-2}\ldots O_1\int_{S^{n-1}}(V_n(\mathbf{D})+lb_{\mathbf{D}}(u))\,du \tag{4.1}$$

Известно, что (см. [1] стр. 218)

$$\int_{S^{n-1}}b_{\mathbf{D}}(u)du=\frac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})}{n-1} \tag{4.2}$$

Таким образом, подставляя (4.2) в (4.1) получаем кинематическую меру L пересекающую $\mathbf{D}$ (см. [2] стр. 201):

$$K(L:L\cap\mathbf{D}\neq\emptyset)=\frac{1}{2}O_{n-2}\ldots O_1\left[V_n(\mathbf{D})O_{n-1}+\frac{lO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})}{n-1}\right] \tag{4.3}$$

Чтобы получить функцию распределения длины хорды случайного отрезка, сначала вычислим кинематическую меру отрезков, пересекающих $\mathbf{D}$ и порождающих хорды длины меньше заданного числа $t\in[0,l]$. Используя определение функции распределения длины хорды случайного отрезка, для вышеупомянутой меры имеем:

$$K(L:L\cap\mathbf{D}\neq\emptyset,V_1(L\cap\mathbf{D})<t)=\frac{1}{2}\int_{V_1(L\cap\mathbf{D})<t}dg\,dy\,dK_{[1]}=$$

$$=\frac{1}{2}O_{n-2}\ldots O_1\int_{S^{n-1}}V_n(B_{\mathbf{D}}^{u,t})\,du=\frac{1}{2}O_{n-2}\ldots O_1\int_{S^{n-1}}V_n(\Omega_2(u))F_{|L|}(u,t)\,du=$$

$$=\frac{1}{2}O_{n-2}\ldots O_1\left[\int_{S^{n-1}}2b_{\mathbf{D}}(u)\,t\,du+\int_{S^{n-1}}b_{\mathbf{D}}(u)F(u,t)(l-t)\,du-\right.$$

$$\left.-\int_{S^{n-1}}\left(b_{\mathbf{D}}(u)\int_0^t F(u,z)dz\right)du\right]=\frac{1}{2}O_{n-2}\ldots O_1\left[\frac{2tO_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})}{n-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{F(t)(l-t)O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})}{n-1}-\frac{O_{n-2}V_{n-1}(\partial\mathbf{D})}{n-1}\int_0^t F(z)dz\right] \tag{4.4}$$

Так как $0 \leq F(u,z) \leq 1$, используя теорему Фубини, можно изменить порядок интегрирования повторных интегралов в (4.4).
Из определения $F_{|L|}(t)$, используя (4.3) и (4.4) получаем (2.5).

5. $F_{|L|}(u,t)$ для n мерного шара

Пусть $\mathbf{D}$ - n мерный шар в R^n с радиусом R и с центром в начале координат. Известно, что

$$V_n(\mathbf{D}) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \quad \text{и} \quad b_{\mathbf{D}}(u) = \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} R^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} \tag{5.1}$$

здесь $\Gamma(m)$ есть гамма функция - $\Gamma(m) = \int_0^\infty w^{m-1}e^{-w}dw$. Можно вычислить $F_{|L|}(u,t)$ для n мерного шара используя (2.1). Используя (5.1) получаем

$$\frac{b_{\mathbf{D}}(u)}{V_n(\mathbf{D}) + lb_{\mathbf{D}}(u)} = \frac{1}{\frac{V_n(\mathbf{D})}{b_{\mathbf{D}}(u)} + l} = \frac{1}{\frac{R\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} + l} = \frac{1}{RB(1, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) + l} \tag{5.2}$$

где $B(s,a,b) = \int_0^s w^{a-1}(1-a)^{b-1}dw$ для $a,b \in R^1$ - бета функция.

Из определения $F(u,t)$ легко видеть, что

$$1 - F(u,t) = \frac{V_{n-1}\{x \in \Pi r_{u^\perp}\mathbf{D} : V_1(g(u,x) \cap \mathbf{D}) \geq t)\}}{b_{\mathbf{D}}(u)} = \frac{b_{\mathbf{D}_r}(u)}{b_{\mathbf{D}}(u)} \tag{5.3}$$

$b_{\mathbf{D}_r}(u)$ - n мерный шар в R^n с радиусом $r = \left(R^2 - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ и с центром в начале координат. Следовательно

$$\frac{b_{\mathbf{D}_r}(u)}{b_{\mathbf{D}}(u)} = \frac{\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} r^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}}{\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}} R^{n-1}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}} = \frac{r^{n-1}}{R^{n-1}} = \left[R^{-1}\left(R^2 - \frac{t^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n-1} = \left[1 - \left(\frac{t}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} \tag{5.4}$$

Из (5.3) и (5.4) вытекает, что для $t \in [0, 2R]$ имеем

$$F(u,t) = 1 - \left[1 - \left(\frac{t}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}. \tag{5.5}$$

Отметим, что $F(u,t) = 1$ при $t \geq 2R$. Вычислим следующий интеграл:

$$\int_0^t F(u,z)dz = \int_0^t \left(1 - \left[1 - \left(\frac{z}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\right)dz = t - \int_0^t \left[1 - \left(\frac{z}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}} dz. \tag{5.6}$$

Обозначим $1 - (\frac{z}{2R})^2 = w$. Следовательно $z = 2R(1-w)^{\frac{1}{2}}$ и $dz = -R(1-w)^{-\frac{1}{2}}dw$. Когда $z = 0$, то $w = 1$, а когда $w = 1 - (\frac{t}{2R})^2$, то $z = t$. Заменой переменной в определенном интеграле, из (5.6) получаем

$$\int_0^t F(u,z)dz = t - R\int_{1-(\frac{t}{2R})^2}^1 w^{\frac{n-1}{2}}(1-w)^{-\frac{1}{2}}dw = t - R\int_{1-(\frac{t}{2R})^2}^1 w^{\frac{n+1}{2}-1}(1-w)^{\frac{1}{2}-1}dw$$

откуда следует

$$\int_0^t F(u,z)dz = t - R\left[B(1, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) - B(1 - \left(\frac{t}{2R}\right)^2, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2})\right] \tag{5.7}$$

Подставляя (5.2), (5.5) и (5.7) в (2.1), для $t \in [0, l)$ получаем

$$F_{|L|}(u,t) = \frac{1}{RB(1, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}) + l}\left[t + \left(1 - \left[1 - \left(\frac{t}{2R}\right)^2\right]^{\frac{n-1}{2}}\right)(l-t) + \right.$$

$$\left. + R\left(B\left(1, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) - B\left(1 - \left(\frac{t}{2R}\right)^2, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right)\right]. \tag{5.8}$$

В частном случае, когда $l = 2R$, подставляя в (5.8) $t = 2R$, получаем

$$B\left(1, \frac{n+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$$

что совпадает с известной формулой связывающей гамма и бета функции.

Легко проверить, что $F_{|L|}(t) = F_{|L|}(u,t)$ для n мерного шара с радиусом R и с центром в начале координат.

Abstract. The paper considers a random segment $L(\omega)$ in R^n with fixed direction and length that intersects a given bounded convex body $\mathbf{D} \subset R^n$. We obtain a relationship between the covariogram of $\mathbf{D}$ and the distribution of the random variable $|L|$ - the length of $L \cap \mathbf{D}$. A relationship between the distribution of $|L|$ and the orientation-dependent chord length distribution is also obtained. As a consequence, we obtain a relationship between the chord length distribution function and the random segment distribution function for $\mathbf{D} \subset R^n$.

Список литературы

[1] L. A. Santalo, Integral Geometry and Geometric Probability Addision-Wesley, MA (2004).
[2] R. De-Lin, Topics in Integral Geometry, Utopia press, Singapore (1994).
[3] Ж. Матерон, Случайные Множества и Интегральная Геометрия, Мир, Москва (1978).
[4] G. Bianchi and G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body" Journal of the European Mathematical Society, 11, 1187 – 1202 (2009).
[5] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Восстановление треугольников по ковариограмме", Известия НАН Армении, серия Математика, 47, но. 3, 25 – 42 (2013).
[6] Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Зависящие от направления распределения сечений выпуклых тел", Известия НАН Армении, серия Математика, 49, но. 3, 3 – 24 (2014).
[7] А. Гаспарян и В. К. Оганян, "Ковариограмма параллелограмма", Известия НАН Армении, серия Математика, 49, но. 4, 17 – 34, (2014).
[8] Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян и В. К. Оганян, "Случайная копия отрезка внутри выпуклой области", Известия НАН Армении, серия Математика, 45, но. 5, 5 – 16 (2010).

Поступила 18 февраля 2014