Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 1, 2015, стр. 51-64.

# ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРОДОЛЖЕНИИ КРАТНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ЗА ПРЕДЕЛЫ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

А. Д. МКРТЧЯН

*Ереванский государственный университет, Армения*
E-mail: *Alex0708@bk.ru*

Аннотация. В работе исследуются множества регулярности на границе области сходимости заданного кратного степенного ряда. В качестве таких множеств рассматриваются наборы полидуг на остовах поликругов сходимости ряда. В терминах свойств целой функции, интерполирующей коэффициенты ряда, находятся размеры полидуг, составляющих регулярное множество. Основную роль для вычисления размеров полидуг играет множество линейных мажорант для логарифма модуля интерполирующей целой функции.

**MSC2010 numbers:** 32A05; 30B30.

**Keywords:** [1] степенные ряды; аналитическое продолжение; преобразование Линделофа; многомерные вычеты.

## 1. Введение

Для степенных рядов одного переменного проблематика описания сингулярных точек на границе круга сходимости имеет давнюю историю, насыщенную значительными достижениями. Эта проблематика была предметом исследований К. Вейерштрасса, Ж. Адамара, Е. Фабри, Г. Полиа и многих других авторов (см., например, монографию Л. Бибербаха [1], а также статьи [2] – [4]).

Для кратных степенных рядов имеется гораздо меньше результатов об описании сингулярных подмножеств на границе области сходимости или, что то же самое, об описании подмножеств границы, через которые аналитически продолжаются такие ряды. В настоящей статье на случай кратных степенных рядов распространяется результат Н. Аракеляна [4]. В статье [4] был указан размер дуги регулярности (через которую аналитически продолжается ряд) на границе

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор 14.Y26.31.0006). Работа осуществлена также при частичной финансовой поддержке фонда "Династия".

круга сходимости в терминах индикатрисы роста целой функции экспоненциального типа, интерполирующей коэффициенты степенного ряда. Приведем точную формулировку этого результата. При этом мы будем следовать обозначениям и дословным формулировкам статьи Н. Аракеляна, В. Лу и Ю. Мюллера [5], где было приведено другое доказательство результата из [4], основанное на интегральном представлении Линделефа.

Итак, в [5] рассматривается одномерный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k z^k, \tag{1.1}$$

имеющий своей областью сходимости единичный круг $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, что, согласно теореме Коши-Адамара, означает

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|f_k|} = 1. \tag{1.2}$$

Пусть $\Delta_\sigma$– сектор $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| \leq \sigma, \ \sigma \in [0, \pi)\}$. Тогда теорема 2 из [5] гласит:

*Открытая дуга $\gamma = \partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ является дугой регулярности ряда (1.1) тогда и только тогда, когда существует целая функция экспоненциального типа $\varphi$, интерполирующая коэффициенты ряда: $\varphi(k) = f_k$, $k \in \mathbb{N}$, у которой индикатриса роста $h_\varphi(\theta)$ удовлетворяет условиям: $h_\varphi(0) = 0$ и*

$$\overline{\lim_{\theta \to 0}} \frac{h_\varphi(\theta)}{|\theta|} \leq \sigma.$$

Напомним, что индикатриса определяется пределом

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{log|\varphi(re^{i\theta})|}{r}, \ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Перейдем к многомерному случаю. Рассмотрим $n$-кратный степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} f_k z^k, \tag{1.3}$$

со свойством

$$\overline{\lim_{|k| \to \infty}} \sqrt[|k|]{|f_k| R^k} = 1, \tag{1.4}$$

где $R^k = R_1^{k_1} ... R_n^{k_n}$, а $|k| = k_1 + ... + k_n$. Согласно многомерной теореме Коши-Адамара ([6], раздел 7), указаное в (1.4) свойство выражает тот факт, что $R_j$ составляют набор *радиусов поликруга сходимости* ряда (1.3).

Множество $G$ назовем *множеством регулярности для ряда* (1.3), если сумма ряда аналитически продолжается через любую точку этого множества.

Пусть $D_\rho(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < \rho\}$ – открытый круг с центром $a \in \mathbb{C}$ и радиусом $\rho > 0$. Обозначим $D_\rho := D_\rho(0)$, а для $\sigma \in (0,\pi]$ через $\gamma_{\sigma,\rho}$ обозначим открытую дугу $\partial D_\rho \setminus \Delta_\sigma$.

В многомерной ситуации нет универсального определения индикатрисы роста целой функции. Более того, часто информацию о росте целой функции выражают в геометрических терминах. Следуя В. Иванову [7] (см. также [8], гл. 3, §3), введем следующее множество, в котором неявно отражается понятие индикатрисы целой функции $\varphi(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$:

$$T_\varphi(\theta) = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ln|\varphi(re^{i\theta})| \le \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n + C_{\nu,\theta}\},$$

где неравенство выполняется для любого $r \in \mathbb{R}^n_+$ при некоторой константе $C_{\nu,\theta}$. Здесь $re^{i\theta}$ – это вектор $(r_1 e^{i\theta_1}, ..., r_n e^{i\theta_n})$. Таким образом, $T_\varphi(\theta)$ – это множество линейных мажорант (с точностью до сдвига $C_{\nu,\theta}$)

$$\nu = \nu(r) = \nu_1 r_1 + ... + \nu_n r_n$$

для логарифма модуля функции $\varphi$. Определим множество

$$\mathcal{M}_\varphi(\theta) := \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ \nu + \varepsilon \in T_\varphi(\theta), \ \ \nu - \varepsilon \notin T_\varphi(\theta) \quad \text{для любого } \varepsilon \in \mathbb{R}^n_+\},$$

которое можно назвать *граничным множеством линейных мажорант.*

Скажем, что целая функция $\varphi$ интерполирует коэффициенты ряда (1.3), если

$$\varphi(k) = f_k \ \text{ для всех } \ k \in \mathbb{N}^n. \tag{1.5}$$

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область сходимости ряда (1.3). Введем семейство

$$G = \bigcup_R \gamma_{\sigma,R} = \bigcup_R (\gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}) \subset \partial D \tag{1.6}$$

полидуг $\gamma_{\sigma,R}$, где $R$ пробегает поверхность сопряженных радиусов сходимости ряда (1.3), а $\sigma = \sigma(R) = (\sigma_1(R), ..., \sigma_n(R))$.

**Теорема 1.1.** *Семейство $G$ полидуг (1.6) является множеством регулярности для ряда (1.3) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты $f_k$ целая функция $\varphi(z)$ такая, что:*

*1)* $0 \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(0)$,

*2) существует вектор-функция $\nu_R(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^z\varphi}(\theta)$, для которой*

$$\varlimsup_{(\theta_1,..\overset{j}{\vee}..,\theta_n)\to 0} \ \varlimsup_{\theta_j \to 0} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \le \sigma_j(R), \quad j = 1, ..., n. \tag{1.7}$$

Доказательство теоремы достаточно провести для полидуги $\gamma_{\sigma,R}$ из остова поликруга сходимости

$$\{|z_1| < R_1, ..., |z_n| < R_n\} = D_{R_1} \times ... \times D_{R_n}.$$

А именно, при фиксированных $R_1, ..., R_n$ мы будем доказывать следующее утверждение.

**Предложение 1.1.** *Полидуга $\gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}$ является множеством регулярности для ряда (1.3) тогда и только тогда, когда существует интерполирующая коэффициенты $f_k$ целая функция $\varphi(z)$ такая, что:*
*1) $0 \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(0)$,*
*2) существует вектор-функция $\nu(\theta)$ со значениями в $\mathcal{M}_{R^z\varphi}(\theta)$, для которой*

$$\overline{\lim_{(\theta_1,..\hat{j}..,\theta_n)\to 0}} \ \overline{\lim_{\theta_j\to 0}} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \le \sigma_j, \quad j = 1, ..., n. \tag{1.8}$$

Любопытно отметить, что для класса гипергеометрических функций (а такому классу принадлежит и общая алгебраическая функция, т.е. определенная полиномиальным уравнением с независимыми переменными коэффициентами) полидугу регулярности можно расширить до политопа регулярности (см. [9] и [10], гл. 4,7). Речь идет о продолжении ряда через кусок границы области сходимости, который в угловых координатах $\theta_1, ..., \theta_n$ определяется политопом, т.е. ограниченным многогранником.

## 2. Необходимость условия теоремы 1.1

Пусть сумма ряда (1.3) продолжается через полидугу $\gamma_{\sigma,R} = \gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}$. Покажем, что существует целая функция $\varphi(\zeta)$, которая интерполирует коэффициенты $f_k$ и удовлетворяет условиям 1) и 2).

Согласно предположению существует односвязная область $\Omega$, которая содержит $(D_{R_1} \times ... \times D_{R_n}) \cup \gamma_{\sigma,R}$ и в которой сумма ряда (1.3) голоморфна. По теореме Гартогса ([6], раздел 32) эта сумма голоморфно продолжается в область, содержащую

$$(D_{R_1} \cup \gamma_{\sigma_1,R_1}) \times ... \times (D_{R_n} \cup \gamma_{\sigma_n,R_n}).$$

Зафиксируем числа $r_o^j \in (0, R_j|1 - e^{i\sigma_j}|)$, $j = 1, ..., n$, так, что

$$(\bar{D}_{r_o^1}(-R_1)) \times ... \times (\bar{D}_{r_o^n}(-R_n)) \subset \Omega.$$

Обозначим $e^{\mu_o^j} := R_j + r_o^j \;\; j = 1, ..., n$. Для любых $\delta_j \in (0, \pi - \sigma_j)$ зафиксируем $\mu_j = \mu_{\delta_j}^j \in (\ln R_j, \mu_o^j)$ так, что

$$(\bar{D}_{e^{\mu_1}} \setminus \Delta^o_{\sigma_1+\delta_1}) \times ... \times (\bar{D}_{e^{\mu_n}} \setminus \Delta^o_{\sigma_n+\delta_n}) \subset \Omega.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$ область $\Omega_{\varepsilon,\delta} = \Omega^1_{\varepsilon_1,\delta_1} \times ... \times \Omega^n_{\varepsilon_n,\delta_n}$, где

$$\Omega^j_{\varepsilon_j,\delta_j} := (D_{r_o^j}(-R_j)) \cup (\bar{D}_{e^{\mu_j}} \setminus \Delta_{\sigma_j+\delta_j}) \cup D_{R_j e^{-\varepsilon_j}}, \;\; j = 1, ..., n,$$

удовлетворяет условию $\bar{\Omega}_{\varepsilon,\delta} \subset \Omega$.

Обозначим $\Gamma_{\varepsilon,\delta} := \partial\Omega^1_{\varepsilon_1,\delta_1} \times ... \times \partial\Omega^n_{\varepsilon_n,\delta_n}$ – остов $\Omega_{\varepsilon,\delta}$. Так как $f \in \mathcal{O}(\bar{\Omega}_{\varepsilon,\delta})$, то, применяя интегральную формулу Коши для коэффициентов степенного ряда (1.3), получим

$$f_k = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} \zeta^{-k-I} f(\zeta) d\zeta, \;\; k \in \mathbb{N}^n,$$

где $I = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^n$, а $d\zeta = d\zeta_1 ... d\zeta_n$. В качестве искомой интерполирующей функции $\varphi$ возьмем тот же самый интеграл, но с комплексным параметром $z$ вместо целочисленного $k$:

$$\varphi(z) = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Gamma_{\varepsilon,\delta}} \zeta^{-z-I} f(\zeta) d\zeta, \quad \text{где } \zeta_j^{z_j} = e^{z_j \log \zeta_j}. \tag{2.1}$$

Функция $\varphi(z)$ целая так как является интегралом по компакту от функции, непрерывной вплоть до границы по совокупности переменных $(\zeta, z) \in (\Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)^n) \times \mathbb{C}^n$ и голоморфной всюду по параметру $z$ (здесь $R_-$ – отрицательная вещественная полуось) [11].

Теперь нам нужно получить оценку для функции $\varphi$. Для этого произведем деформацию остова $\Gamma_{\varepsilon,\delta}$ следующим образом. Куски дуг из $\partial D_{r_o^j}(-R_j)$, изображенные на рис. 1 пунктиром, заменяем двумя дугами на $\partial D_{e_j^\mu}$ и на пару противоположно ориентированных отрезков $[-e^{\mu_o^j}, -e^{\mu_j}]$ и $[-e^{\mu_j}, -e^{\mu_o^j}]$. Полученный для каждого $j = 1, ..., n$ контур обозначим $L^j_{\varepsilon_j,\delta_j}$. Весь остов $\Gamma_{\varepsilon,\delta}$ деформируется в $n$-мерный цикл $L_{\varepsilon,\delta} = L^1_{\varepsilon_1,\delta_1} \times ... \times L^n_{\varepsilon_n,\delta_n}$. Заметим, что при фиксированном $r_0 \in \mathbb{R}^n_+$ и выбранном $\sigma \in \mathbb{R}^n_+$ кривые $L^j_{\varepsilon_j,\delta_j}$ и $L^j_{\acute{\varepsilon}_j,\acute{\delta}_j}$ ограничивают цепь, где подынтегральное выражение в (2.1) однозначно и голоморфно по $\zeta_j$, поэтому задание $\varphi(z)$ интегралом (2.1) не зависит от $\varepsilon$ и $\delta$.

Обозначая $z_j = \xi_j + i\eta_j, \quad j = 1, ..., n$, и

$$M_{\varepsilon,\delta} := \sup_{\zeta \in L_{\varepsilon,\delta}} |f(\zeta)|,$$

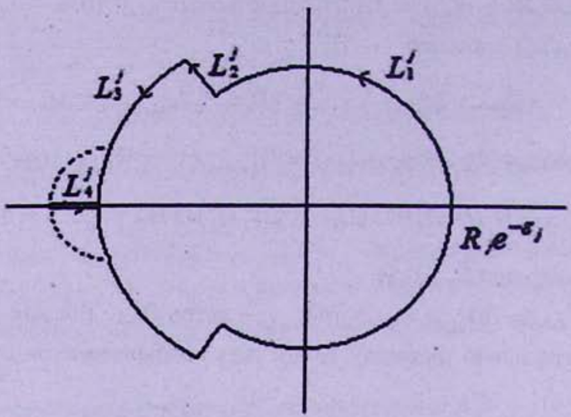


Рис. 1

из (2.1) получаем оценку

$$|\varphi(z)| \le M_{\varepsilon,\delta}\mathfrak{I}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \tag{2.2}$$

где

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{(\pi)^n} \int\limits_{L_1^+\times\ldots\times L_n^+} |\zeta_1|^{-\xi_1-1} e^{|\eta_1|\arg\zeta_1} \ldots |\zeta_n|^{-\xi_n-1} e^{|\eta_n|\arg\zeta_n} |d\zeta_1|\ldots|d\zeta_n|.$$

Здесь $L_j^+$ – это часть $L^j_{\varepsilon_j,\delta_j}$, лежащая в верхней полуплоскости, т.е.

$$L_+^j = L_1^j \cup L_2^j \cup L_3^j \cup L_4^j,$$

где

$$L_1^j = \{R_j e^{-\varepsilon_j + i\omega_j} : \omega_j \in [0, \sigma_j + \delta_j)\}, \quad L_2^j = \{t_j e^{i(\sigma_j+\delta_j)} : t_j \in [R_j e^{-\varepsilon_j}, e^{\mu_j})\},$$

$$L_3^j = \{e^{\mu_j + i\omega_j} : \omega_j \in [\sigma_j + \delta_j, \pi)\}, \quad L_4^j = \{t_j e^{i\pi} : t_j \in [e^{\mu_j}, e^{\mu_0^j}]\}.$$

Следовательно, $\mathfrak{I}$ можно представить как сумму интегралов $\mathfrak{I}_{p_1,\ldots,p_n}$ по цепям $L^1_{p_1}\times\ldots\times L^n_{p_n}$, $p_1,\ldots,p_n = 1,2,3,4$. Каждая такая цепь есть прямое произведение *дуг* (с центрами в нуле) и *отрезков* прямых (проходящих через нуль). Это позволяет сделать эффективные оценки интегралов $\mathfrak{I}_{p_1,\ldots,p_n}$. Например,

$$\mathfrak{I}_{1\ldots1} = \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{L_1^1\times\ldots\times L_1^n} |\zeta_1|^{-\xi_1} e^{|\eta_1|\arg\zeta_1} \ldots |\zeta_n|^{-\xi_n} e^{|\eta_n|\arg\zeta_n} \left|\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\right| \ldots \left|\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}\right| =$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_0^{\sigma_1+\delta_1}\dots\int\limits_0^{\sigma_n+\delta_n}\prod_{j=1}^n(R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j+|\eta_j|\omega_j})d\omega_1\dots d\omega_n=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^n\left(R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\ \frac{e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|}-1}{|\eta_j|}\right).$$

С учетом того, что $\sigma_j+\delta_j\leq\pi$, мы из очевидного неравенства $e^{ax}-1\leq ae^{ax}$, где $a\geq 0,\ x\geq 0$, получаем оценку

$$\mathfrak{I}_{1\dots 1}\leq\prod_{j=1}^n\left(R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\ e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|}\right).$$

Аналогичное вычисление дает:

$$\mathfrak{I}_{2\dots 2}=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{L_2^1\times\dots\times L_2^n}|\zeta_1|^{-\xi_1}e^{|\eta_1|\arg\zeta_1}\dots|\zeta_n|^{-\xi_n}e^{|\eta_n|\arg\zeta_n}|\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}|\dots|\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}|=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{R_1e^{-\varepsilon_1}}^{e^{\mu_1}}\dots\int\limits_{R_je^{-\varepsilon_n}}^{e^{\mu_n}}\prod_{j=1}^n\left(t_j{}^{-\xi_j-1}e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}\right)dt_1\dots dt_n=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^n\left(e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}\left(\frac{e^{-\mu_j\xi_j}-R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}}{-\xi_j}\right)\right).$$

Следовательно, при $\xi_j\geq 1$ получаем оценку

$$\mathfrak{I}_{2\dots 2}\leq\prod_{j=1}^n\left(e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\right).$$

Далее, имеем

$$\mathfrak{I}_{3\dots 3}=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\sigma_1+\delta_1}^{\pi}\dots\int\limits_{\sigma_n+\delta_n}^{\pi}\prod_{j=1}^n\left(e^{-\mu_j\xi_j}e^{\omega_j|\eta_j|}\right)d\omega_1\dots d\omega_n=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^n\left(e^{-\mu_j\xi_j}\left(\frac{e^{|\eta_j|\pi}-e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}}{|\eta_j|}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^n\left(e^{-\mu_j\xi_j}e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}\left(\frac{e^{|\eta_j|(\pi-\sigma_j-\delta_j}-1}{|\eta_j|}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^n\left((\pi-\sigma_j-\delta_j)e^{-\mu_j\xi_j}e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}\left(\frac{e^{|\eta_j|(\pi-\sigma_j-\delta_j)}-1}{|\eta_j|(\pi-\sigma_j-\delta_j)}\right)\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^n\left(\pi e^{-\mu_j\xi_j}e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}e^{|\eta_j|(\pi-\sigma_j-\delta_j)}\right)\leq\prod_{j=1}^n e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}.$$

Наконец,

$$\mathfrak{I}_{4\ldots4}=\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{e^{\mu_1}}^{e^{\mu_0^1}}\ldots\int\limits_{e^{\mu_n}}^{e^{\mu_0^n}} t_1{}^{-\xi_1-1}e^{\pi|\eta_1|}\ldots t_n{}^{-\xi_n-1}e^{\pi|\eta_n|}dt_1\ldots dt_n=$$

$$=\frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n}\left(e^{\pi|\eta_j|}\left(\frac{e^{-\mu_j\xi_j}+e^{-\mu_0^j\xi_j}}{\xi_j}\right)\right),$$

откуда при $\xi_j\geq 1$ приходим к оценке

$$\mathfrak{I}_{4\ldots4}\leq\prod_{j=1}^{n}e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}.$$

Полученные результаты показывают, что при повторном вычислении интеграла $\mathfrak{I}_{p_1\ldots p_n}$ в зависимости от значения $p_j$ (показывающего, что интегрирование по переменной $\zeta_j$ ведется по куску $L^j_{p_j}$), вклад в оценку этого интеграла дают выражения:

$$R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\ e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|},\ \text{если}\ \ p_j=1,$$

$$e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j},\ \text{если}\ p_j=2\ \text{и}\ \xi_j\geq 1,$$

$$e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|},\ \text{если}\ p_j=3,$$

$$e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|},\ \text{если}\ p_j=4\ \text{и}\ \xi_j\geq 1.$$

Каждый набор $p_1,\ldots,p_n$ разобьем на 4 группы: $A_1,A_2,A_3,A_4$, где $A_j$ – это номера $k\in\{1,\ldots,n\}$, для которых $p_k=j$. Тогда при $\xi_l\geq 1,\ j=1,\ldots n$, получим:

$$\mathfrak{I}_{p_1,\ldots,p_n}\leq\prod_{j\in A_1}R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\ e^{(\sigma_j+\delta_j)|\eta_j|}\prod_{j\in A_2}e^{|\eta_j|(\sigma_j+\delta_j)}R_j^{-\xi_j}e^{\varepsilon_j\xi_j}\times$$

$$\times\prod_{j\in A_3}e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}\prod_{j\in A_4}e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}.$$

При $\pi|\eta_j|\leq\mu_j\xi_j$ выполняется неравенство $e^{-\mu_j\xi_j+\pi|\eta_j|}\leq 1$, поэтому из предыдущей оценки получаем следующую оценку для суммарного интеграла:

$$\mathfrak{I}<C_{\varepsilon,\delta}R_1^{-\xi_1}\ldots R_n^{-\xi_n}e^{|\eta_1|(\sigma_1+\delta_1)+\varepsilon\xi_1}\ldots e^{|\eta_n|(\sigma_n+\delta_n)+\varepsilon\xi_n}.$$

Таким образом, в обозначениях $\zeta_j=r_je^{i\theta_j}$ и $\alpha_j=\arctan(\mu_j/\pi)$ неравенство (2.2) дает нам оценку для функции $\varphi$:

(2.3) $$|\varphi(re^{i\theta})|\leq cR^{-r\cos\theta}e^{((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|+\varepsilon_1\cos\theta_1)r_1+\ldots+((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|+\varepsilon_n\cos\theta_n)r_n},$$

если $|\theta_j| \le \alpha_j, \ \ j = 1, ..., n.$

Неравенство (2.3) можно переписать в следующем виде

$$R^{r\cos\theta}|\varphi(re^{i\theta})| \le ce^{((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|+\varepsilon_1\cos\theta_1)r_1+...+((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|+\varepsilon_n\cos\theta_n)r_n}.$$

Логарифмируя последнее неравенство, получим при $|\theta_j| \le \alpha_j, \ j = 1, ..., n$

$$\ln(R^{r\cos\theta}|\varphi(re^{i\theta}|) \le c + \sum_{j=1}^{n}(((\sigma_j+\delta_j)|\sin\theta_j| + \varepsilon_j\cos\theta_j)r_j). \tag{2.4}$$

Взяв $\theta = 0$ в неравенстве (2.4), получим

$$\ln(R^r|\varphi(r)|) \le c + <\varepsilon, r> \tag{2.5}$$

для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$. Это означает, что $0 \in T_{R^z\varphi}(0)$.

С помощью равенств (1.4) и (1.5) заключаем, что

$$\ln(R^k|\varphi(k)|)^{\frac{1}{|k|}} = 0, \quad \text{при} \quad |k| \to \infty, \tag{2.6}$$

то есть для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$ вектор $-\varepsilon \notin T_{R^z\varphi}(0)$. Следовательно, из (2.5) и (2.6) получаем $0 \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(0)$.

Также из неравенства (2.4) следует, что для любого $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$

$$((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1| + \varepsilon_1\cos\theta_1, ..., (\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n| + \varepsilon_n\cos\theta_n) \in T_{R^z\varphi}(\theta),$$

если $|\theta_j| \le \alpha_j, \ j = 1, ..., n.$

Следовательно существует $\nu(\theta) = (\nu_1(\theta), ..., \nu_n(\theta)) \in \mathcal{M}_{R^z\varphi}(\theta)$ со свойством

$$\nu_j(\theta) \le (\sigma_j+\delta_j)|\sin\theta_j| \text{ при } |\theta_j| \le \alpha_j, \ j = 1, ..., n.$$

Для компонент $\nu(\theta)$ получаем

$$\varlimsup_{(\theta_1,..\hat{j}..,\theta_n)\to 0} \ \varlimsup_{\theta_j\to 0} \frac{\nu_j(\theta)}{|\theta_j|} \le \sigma_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Тем самым необходимость условия Предложения 1.1, следовательно и Теоремы 1.1, доказана.

## 3. Достаточность условия теоремы 1.1

Пусть $\varphi$ целая функция, которая удовлетворяет условиям 1) и 2) Предложения 1.1. Покажем, что ряд (1.3) продолжается через полидугу $\gamma_{\sigma_1,R_1} \times ... \times \gamma_{\sigma_n,R_n}$. Из условия 2) следует, что для любого $\delta_j \in (0, \frac{\pi-\sigma_j}{2})$ существует $\alpha_j$ такое, что

$$\nu_j(\theta) \le (\sigma_j+\delta_j)|\sin\theta_j|, \ \text{ если } \ |\theta_j| \le \alpha_j, \ \ j = 1, ..., n.$$

Поскольку $\nu(\theta) \in \mathcal{M}_{R^s\varphi}(\theta)$, выполняется неравенство

$$\ln\left(R^{r\cos\theta}|\varphi(re^{i\theta})|\right) \le ((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|)r_1 + \dots + ((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|)r_n + c,$$

из которого вытекает следующая оценка

$$(3.1) \qquad |\varphi(re^{i\theta})| \le e^c R_1^{-r_1\cos\theta_1} \dots R_n^{-r_n\cos\theta_n} e^{((\sigma_1+\delta_1)|\sin\theta_1|)r_1+\dots+((\sigma_n+\delta_n)|\sin\theta_n|)r_n}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$g(\zeta, z) = \prod_{j=1}^{n} \frac{z_j^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i\zeta_j}-1)},$$

где $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$. Эта функция является мероморфной функцией по переменным $\zeta$ из $\mathbb{C}^n$ и голоморфной по переменным $z$ из $(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+)^n$.

Обозначим $D^* = \cup_{m\in\mathbb{Z}} D_{1/4}(m)$. Заметим, что существует константа $C > 0$ такая, что выполняется неравенство

$$(3.2) \qquad |e^{2\pi i w} - 1| > \frac{e^{\pi(|\operatorname{Im} w| - \operatorname{Im} w)}}{C} \quad \text{при} \quad w \in \mathbb{C}\setminus D^*.$$

Из него легко получается оценка

$$(3.3) \qquad |g(\zeta, z)| < Ce^{<\xi, \log|z|> - <(\pi - |\pi - \arg z|), |\eta|>}$$

при $\zeta \in (\mathbb{C}\setminus D^*)^n$ и $z \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+)^n$.

Используя (3.1) и (3.3) для $\zeta \in (\Delta_{\sigma_1}\setminus D^*) \times \dots \times (\Delta_{\sigma_n}\setminus D^*)$ и $z \in (\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+)^n$, получим

$$|\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)| < cR^{-\xi}e^{<\sigma+\delta, \eta>}e^{<\xi, \log|z|> - <(\pi - |\pi - \arg z|), |\eta|>} =$$

$$= cR^{-\xi}e^{<\xi, \log|z|> - <(\pi - |\pi - \arg z| - \sigma - \delta), |\eta|>}.$$

Обозначая

$$d(z) = (d_1(z_1), \dots, d_n(z_n)), \quad d_j(z_j) = \pi - |\pi - \arg z_j| - \sigma_j - \delta_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

получим

$$(3.4) \qquad |\varphi(\zeta)||g(\zeta, z)| < cR^{-\xi}e^{<\xi, \log|z|> - <d(z), |\eta|>}.$$

Введем множества

$$K_j = \bar{D}_{R_j e^{\varepsilon_j}} \setminus (\Delta^o_{\sigma_j+2\delta_j} \cup D_{R_j/2}), \quad \varepsilon_j > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Покажем, что

$$(3.5) \qquad d_j(z_j) \ge \delta_j \quad \text{при} \quad z_j \in K_j \quad j = 1, \dots, n.$$

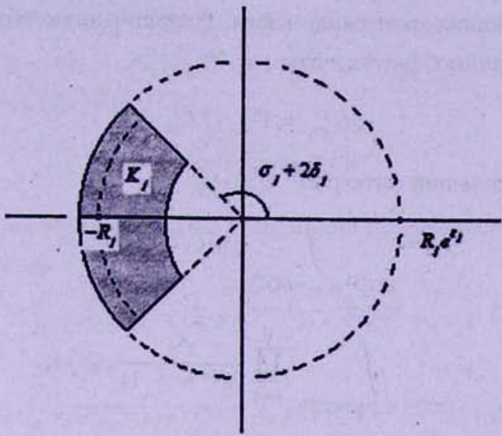


Рис. 2

Действительно,

$$d_j(z_j) = \pi - \sigma_j - \delta_j - |\pi - \arg z_j|, \quad j = 1, ..., n.$$

Поскольку $z_j \in K_j$, то

1) $\sigma_j + 2\delta_j < \arg z_j < \pi$, $=>$ $d_j(z_j) = \pi - \sigma_j - \delta_j - \pi + \sigma_j + 2\delta_j \geq \delta_j$,

2) $\pi < \arg z_j < 2\pi - \sigma_j - 2\delta_j$, $=>$ $d_j(z_j) = 2\pi - \sigma_j - \delta_j - 2\pi + \sigma_j + 2\delta_j \geq \delta_j$.

Таким образом, для $(z_1, ..., z_n) \in (K_1 \times ... \times K_n)$ и $(\zeta_1, ..., \zeta_n) \in (\partial\Delta_{\alpha_1} \setminus D^*) \times ... \times (\partial\Delta_{\alpha_n} \setminus D^*)$ получим

$$|g(\zeta, z)||\varphi(\zeta)| < cR^{-\xi}e^{<\xi, \log|z|> - <\delta, |\eta|>} \leq$$
$$\leq cR^{-\xi}e^{<\xi, \log(Re^{\varepsilon})> - <\delta, |\eta|>} = ce^{<\xi, \varepsilon> - <\delta, |\eta|>}.$$

Взяв $2\varepsilon_j = \delta_j \sin\alpha_j$, $j = 1, ..., n$, получим

$$|g(\zeta, z)||\varphi(\zeta)| < ce^{<-\varepsilon, |\zeta|>}. \tag{3.6}$$

Для каждого $j \in \{1, ..., n\}$ рассмотрим область $G_j = D_{R_j} \cup \Delta^o_{\alpha_j}$, и пусть $\Gamma_j = \partial G_j$ – граница этой области, положительно ориентированная относительно нуля. Для каждого натурального $m_j$ рассмотрим следующий кусок $\Gamma_j$ :

$$\Gamma^j_{m_j} = \{\zeta_j = \xi_j + i\eta_j \in \Gamma_j : \xi_j \leq m_j + \frac{1}{2}\}.$$

Обозначим через $I^j_m$– вертикальный отрезок с вершинами (см. рис. 3)

$$(m_j + \frac{1}{2})(1 \pm i \tan\alpha_j) \text{ для } m_j \in \mathbb{N},$$

ориентированный движением снизу вверх. Ограниченную объединением $\Gamma^j_{m_j} \cup L^j_{m_j}$ область обозначим $G^j_{m_j}$ так, что

$$\partial G^j_{m_j} = \Gamma^j_{m_j} \cup L^j_{m_j}.$$

Рассмотрим следующий интеграл

$$I_m = \int\limits_{\partial G_1^{m_1} \times \ldots \times \partial G_n^{m_n}} g(\zeta, z)\varphi(\zeta)d\zeta = \tag{3.7}$$

$$= \int\limits_{\partial G_1^{m_1} \times \ldots \times \partial G_n^{m_n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{z^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)} \varphi(\zeta)d\zeta.$$

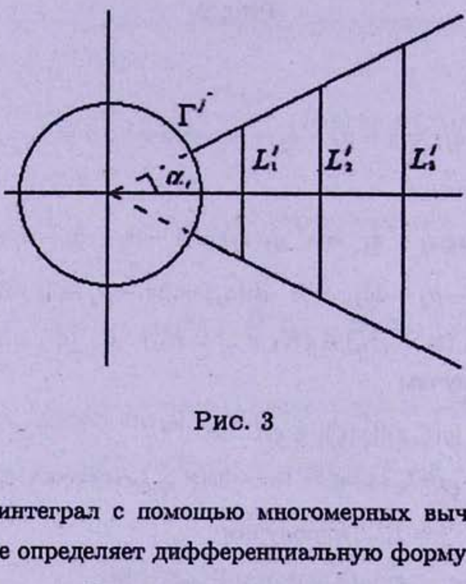


Рис. 3

Вычислим этот интеграл с помощью многомерных вычетов. Его подынтегральное выражение определяет дифференциальную форму

$$\omega = \prod_{j=1}^{n} \frac{z^{\zeta_j}}{(e^{2\pi i \zeta_j} - 1)} \varphi(\zeta) d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

с полюсами на дивизорах

$$Q_1 = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) : f_1 = e^{2\pi i \zeta_1} - 1 = 0\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{n-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Q_n = \{(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) : f_n = e^{2\pi i \zeta_n} - 1 = 0\} = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{Z}.$$

Так как пересечение $Z = Q_1 \cap ... \cap Q_n = \mathbb{Z}^n$ дискретно и якобиан $\partial(f)/\partial(\zeta) = (2\pi i)^n \neq 0$ в точках $k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$, то для каждой точки $k \in \mathbb{Z}^n$ определяется локальный вычет (см. [12], [13]) :

$$\text{(3.8)} \qquad res_k\omega = \frac{z^k\varphi(k)}{\frac{\partial(f)}{\partial(\zeta)}(k)} = \varphi(k)z^k.$$

Остов интегрирования в (3.7) связан с полярными дивизорами $Q_1, ..., Q_n$ следующими соотношениями:

$$Q_1 \cap (\partial G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^{n-1}) \cap (\partial G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}) = \emptyset,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_n \cap (G_1^{m_1} \times ... \times \partial G_n^{m_n}) = (\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{Z}) \cap (G_1^{m_1} \times ... \times \partial G_n^{m_n}) = \emptyset.$$

Согласно терминологии [12], это означает, что полиэдр $G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}$ согласован с дивизорами $Q_1, ..., Q_n$. Поэтому, согласно принципу разделяющих циклов, интеграл (3.7) после умножения на $(2\pi i)^{-n}$ равен сумме вычетов по всем точкам

$$k \in (G_1^{m_1} \times ... \times G_n^{m_n}) \cap (\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}).$$

С учетом формулы (3.8) получаем

$$\text{(3.9)} \qquad I_m = \sum_{k_1=0}^{m_1} ... \sum_{k_n=0}^{m_n} \varphi(k_1, ..., k_n) z_1^{k_1} ... z_n^{k_n}.$$

Представим интеграл (3.7) как сумму $2^n$ интегралов по цепям

$$\Gamma_{m_1}^1 \times ... \times \Gamma_{m_n}^n, ..., L_{m_1}^1 \times ... \times L_{m_n}^n.$$

Для каждой такой цепи переменные интегрирования $\zeta_1, ..., \zeta_n$ разобьем на 2 группы: $B_1, B_2$, где $B_1$ – это номера $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $\zeta_j \in L_{m_j}^j$, а $B_2$ – это номера $j \in \{1, ..., n\}$, для которых $\zeta_j \in \Gamma_{m_j}^j$. Тогда, используя (3.4), получим

$$\text{(3.10)} \qquad |g(\zeta, z)||\varphi(\zeta)| < C \prod_{j \in B_1} e^{m_j \log \frac{|z_j|}{R_j}} \prod_{j \in B_2} e^{-\varepsilon_j |\zeta_j|},$$

где $z \in (D_{R_1} \cap K_1^o) \times ... \times (D_{R_n} \cap K_n^o)$.

Из (3.10) видно, что, если $B_1 \neq \emptyset$, то интеграл по соответствующей цепи стремится к нулю, когда $m_j \to \infty$, $j \in B_1$. Рассмотрим интеграл

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{\Gamma_1 \times ... \times \Gamma_n} g(\zeta, z)\varphi(\zeta) d\zeta.$$

Из оценки (3.6) следует, что интеграл $I$ сходится равномерно для $z$ из компакта $(K_1 \times ... \times K_n)$, определяя голоморфную функцию на внутренности этого компакта. Поскольку $I_m \to \mathfrak{I}$ при $m_j \to \infty$, $j = 1, ..., n$, получаем $\mathfrak{I}(z) = f(z)$ при $z \in (D_{R_1} \cap K_1^o) \times ... \times (D_{R_n} \cap K_n^o)$. Это означает, что полидуга $\gamma_{\sigma \mid 2\delta, R}$ является полидугой регулярности для $f$, если $\delta$ достаточно близок к нулю. Таким образом, $\gamma_{\sigma,R}$ – полидуга регулярности для $f$, что и требовалось доказать.

**Abstract.** In this paper we study the sets of regularity on the boundary of the domain of convergence for a given multiple power series. As such sets we consider collections of polyarcs on the frames of polydisk of convergence of the series. In terms of an entire function, interpolating the coefficients of series, we find the sizes of polyarcs, constituting the regular set. To compute the sizes of polyarcs we essentially use the set of linear majorants for the logarithm of the interpolating entire function.

## Список литературы

[1] Л. Бибербах, Аналитическое Продолжение, Москва, Наука (1967).
[2] Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация сингулярностей степенных рядов на границе круга сходимости", Изв. АН Армении, серия Математика, **22**, но. 1, 3-21 (1987).
[3] Н. У. Аракелян, В. А. Мартиросян, "Локализация особенностей степенных рядов на границе круга сходимости. II", Изв. АН Армении, серия Математика, **23**, но. 2, 123 – 137, (1988).
[4] N. U. Arakelian, "Approximation by entire functions and analytic continuation", Progress in approximation theory (FL: Tampa, 1990); Computational Mathematical Series, **19**, New York, Springer, 295 -Џ 313 (1992).
[5] N. Arakelian, W. Luh, J. Muller, "On the localization of singularities of lacunar power series", Complex Variables and Elliptic Equations, **52**, no. 7, 561 – 573 (2007).
[6] Б. В. Шабат, "Введение в комплексный анализ", **2**, М., Наука (1987).
[7] В. К. Иванов, "Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных степенных рядов", Мат. сборник, **47(89)**, но. 1, 4 – 5 (1959).
[8] Л. И. Ронкин, Введение в Теорию Целых Функций Многих Переменных, Москва, Наука (1971).
[9] И. А. Антипова, "Обращение многомерных преобразований Меллина и решение алгебраических уравнений", Матем. сб., **198**, вып. 4, 3 – 20 (2007).
[10] Т. М. Садыков, А. К. Цих, Гипергеометрические и Алгебраические Функции Многих Переменных, М., Наука (2014).
[11] Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, Лекции по Теории Функций Комплексного Переменного, Наука (1989).
[12] A. K. Tsikh, Multidimensional Residues and Their Applications, AMS. **103**, Providence (1992).
[13] О. Н. Жданов, А. К. Цих, "Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов", Сиб. мат. журн., **39:2**, 281 – 298 (1998).

Поступила 8 сентября 2014