Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 1, 2015, стр. 3-22.

О ПОВЕРХНОСТЯХ БОРА-РИМАНА, II

А. Ф. БЕКНАЗАРЯН, С. А. ГРИГОРЯН

Казанский государственный энергетический университет
E-mails: *abeknazaryan@yahoo.com*; *gsuren@inbox.ru*

Аннотация. В статье вводятся понятия аналитической кривой и эквивалентных точек на поверхностях Бора-Римана. Конструктивным и алгебраическим методами доказывается, что точки поверхности Бора-Римана локально имеют одинаковое число эквивалентных точек.

MSC2010 numbers: 14H30, 22B05, 43A40.

Keywords: поверхности Римана; обобщенный диск; аналитические кривые [1].

1. Введение

В работе продолжается исследование поверхностей Бора-Римана, начатое в статье [1]. Напомним, что поверхности Бора-Римана получаются вследствие накрытий обобщенной плоскости Δ – локально компактного пространства, полученного из декартова произведения $G \times [0, \infty)$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$, где G группа характеров всюду плотной в евклидовой топологии τ подгруппы Γ группы вещественных чисел $\mathbb{R}$. Элементами Δ будут точки (α, r) с $\alpha \in G, r > 0$ и $* = G \times \{0\}$. Отметим, что проколотая обобщенная плоскость $\Delta \backslash \{*\} := \Delta^0$ является группой относительно естественной операции покоординатного умножения. Конструкция пространства Δ восходит к Аренсу и Зингеру [2], и Δ очевидным образом канонически отождествляется с пространством $\mathfrak{C} = \{\alpha r : \alpha \in G, r \in [0, \infty)\}$ – аналогом комплексной плоскости $\mathbb{C}$, состоящим из гомоморфизмов $\alpha r : \Gamma \to \mathbb{C} : a \mapsto \alpha(a) r^a$. Топологией на Δ будет стандартная фактортопология $\tau_\Delta = \{U \subset \Delta : U \in k \times \tau_{[0,\infty)}\}$, где k – топология на G, а $\tau_{[0,\infty)}$ – сужение на $[0, \infty)$ евклидовой топологии τ. Аналогичным образом определяется топология $\tau_{\Delta^0} \cong k \times \tau_{(0,+\infty)}$ на Δ^0. На пространстве Δ развивается теория обобщенных аналитических функций, позволяющая получать новые результаты методами классической теории аналитических функций (см. [3], [4]).

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта No 12-01-97016 р-поволжье-а

Напомним теперь определения обобщенных аналитической функции и тонкого множества в Δ, с помощью которых определяется поверхность Бора-Римана. Пусть $\Gamma_+ = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$. Каждый характер $\chi^a, a \in \Gamma_+$, соответствующий элементу $a \in \Gamma_+$, можно расширить до непрерывной функции φ^a на Δ, полагая для $s = \alpha r$

$$\varphi^a(s) = \chi^a(\alpha) r^a$$

с $\chi^a(\alpha) = \alpha(a)$.

Определение 1.1. *Пусть D – открытое множество в Δ. Непрерывная на D функция f называется обобщенно аналитической, если для любого $s \in D$ найдется такая окрестность $U \subset D$, $s \in U$, что сужение f на U равномерно аппроксимируется линейными комбинациями функций $\varphi^a, a \in \Gamma_+$.*

Множество всех обобщенных аналитических функций на D обозначается $\mathcal{O}(D)$.

В следующем определении используется тот факт, что пространство $\Delta^0 = \Delta \backslash \{*\}$ локально имеет структуру вида $V \times W$, $V \subset G_a$, $W \subset \mathbb{C}$, где $G_a = \{\alpha \in G; \alpha(a) = 1\}$ с $a \in \Gamma$ (см. [3], стр. 10-11).

Определение 1.2. *Пусть D – открытое множество в Δ. Замкнутое подмножество $K \subset D$ назовем тонким если выполняются следующие условия:*

(1) *для каждой точки $s \in D, s \neq *$, существуют окрестность $U \subset D$, $U = V \times W$, и функция $f \in \mathcal{O}(U), f \neq 0$ обращающаяся в нуль на $K \cap U$,*
(2) *для каждого $\alpha \in V$ сужение f на $W_\alpha = \{\alpha\} \times W$ не равна тождественно нулю,*
(3) *если $* \in D$, то найдется нетривиальная функция $f \in \mathcal{O}(\Delta_r), \Delta_r \subset D$, обращающаяся в нуль на $\Delta_r \cap K$, где $\Delta_r = \{s \in \Delta;\ |s| \leq r\}$ – обобщенный диск радиуса r в Δ.*

Перейдем теперь к определению поверхности Бора-Римана. Как известно (см. [5], стр. 25) отображение топологических пространств $\pi : Y \to X$ называется (вообще говоря, разветвленным) *накрытием*, если оно непрерывно, открыто и дискретно, то есть для каждого $x \in X$ слой $\pi^{-1}(x)$ – дискретное множество в Y. Отображение топологических пространств $\pi : Y \to X$ называют *неразветвленным накрытием*, если каждая точка $x \in X$ имеет (так называемую ровно накрытую) окрестность U, такую, что

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in \mathcal{A}} U_i$$

– дизъюнктное объединение открытых множеств в Y и все сужения $\pi|_{U_i} : U_i \to U$ – гомеоморфизмы. Если множество $\mathcal{A}$ конечно (следовательно, все слои накрытия состоят из одного и того же числа точек), то (неразветвленное) накрытие называется *конечнолистным*, а число точек слоев называется его *числом листов.*

Определение 1.3. *Топологическое пространство X называется поверхностью Бора-Римана над Δ, если существует тонкое множество $K \subset \Delta$ и накрытие $\pi : X \to \Delta$, такие, что сужение π на множество $X^* = X \setminus \pi^{-1}(K)$ есть неразветвленное конечнолистное накрытие множества $\Delta^* = \Delta \setminus K$.*

Отметим, что вопросы групповых структур на поверхностях Бора-Римана рассмотрены в работах [1], [6] – [8]. Определим теперь понятие плоскости в пространстве Δ. Из плотности подгруппы Γ в $\mathbb{R}$ получаем, что отображение $\alpha : \mathbb{R} \to G : t \to \alpha_t$, с $\alpha_t(a) = e^{iat}, a \in \Gamma$, инъективно и образ $\alpha(\mathbb{R})$ плотен в G (см. [9], стр. 55). Отображение $\alpha : \mathbb{R} \to G$ порождает погружение

$$\varphi : \mathbb{C} \to \Delta^0 : z = t + iy \mapsto \varphi_z = \alpha_t e^{-y}.$$

Множество $\Delta^0 = G \times (0, +\infty)$, которое канонически отождествляется с пространством $\{\alpha r : \alpha \in G, r \in (0, \infty)\}$, является локально компактной группой относительно покоординатного умножения с единичным элементом $\alpha_0 = \alpha(0) = \varphi(0)$. Отметим, что образ $\varphi(\mathbb{C})$ плотен как в Δ^0 так и в Δ. Множество вида $\mathbb{C}_s = s\varphi(\mathbb{C})$ будем называть *плоскостью* в Δ^0 проходящей через точку $s \in \Delta^0$; $\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_{\varphi(0)} (= \varphi(\mathbb{C}))$. Далее в работе с помощью понятия плоскости в пространстве Δ вводятся понятия аналитической кривой и эквивалентных точек на поверхностях Бора-Римана.

2. Аналитические кривые

Пусть $\mathbb{C}_0$ – определенная выше плоскость в Δ^0, проходящая через единичный элемент α_0 группы Δ^0. Как мы уже видели, множество $\mathbb{C}_0$ есть всюду плотная подгруппа группы Δ^0, являющаяся образом аддитивной группы комплексных чисел $\mathbb{C}$ под действием группового гомоморфизма $\varphi : \mathbb{C} \to \Delta^0$. Так как $\alpha_0 \in \mathbb{C}_0$, то для любого $s \in \Delta^0$ множество $s\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_s$ есть плоскость в Δ^0 проходящая через s. Множество всех плоскостей такого вида распадается на классы смежности группы Δ^0 по подгруппе $\mathbb{C}_0$.

Рассмотрим кривую в Δ^0, то есть отображение $\gamma : I = [0,1] \to \Delta^0$, непрерывное относительно топологии τ_{Δ^0} в Δ^0.

Определение 2.1. *Кривая $\gamma(I) \subset \Delta^0$ называется аналитической кривой, если она полностью содержится в плоскости $\mathbb{C}_{s_0}$, для некоторого $s_0 \in \Delta^0$.*

Пусть $\gamma(I)$ – некоторая аналитическая кривая в Δ^0 лежащая в плоскости $\mathbb{C}_{s_0}$, $s_0 \in \Delta^0$. Тогда для любого $s \in \Delta^0$ кривая $\gamma_s(I)$, $\gamma_s(t) = s\gamma(t)$, $t \in I$, лежит в плоскости $\mathbb{C}_{ss_0}$ и, следовательно, также является аналитической кривой.

Пусть X – поверхность Бора-Римана над Δ, K – тонкое множество критических точек накрытия $\pi : X \to \Delta$ в Δ. Определим теперь понятие аналитической кривой на подмножестве $X^* = \pi^{-1}(\Delta^*)$ пространства X, где $\Delta^* = \Delta \backslash K$ (мы считаем, что $* \in K$ и рассматриваем исходное накрытие над $\Delta^0 = \Delta \backslash \{*\}$).

По теореме о поднятии кривой (см. [5], §4), для каждой аналитической кривой $\gamma(I)$ в Δ^* и каждой точки $w \in \pi^{-1}(\gamma(0))$ существует единственная кривая $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$ с началом в точке w, накрывающая кривую $\gamma(I)$, то есть $\hat{\gamma}(0) = w$ и $\gamma(t) = \pi \circ \hat{\gamma}(t)$, $t \in I$. В этом случае кривая $\hat{\gamma}(I)$ называется поднятием кривой $\gamma(I)$.

Определение 2.2. *Кривая на X^* называется аналитической, если она представляет собой поднятие некоторой аналитической кривой из Δ^*.*

Таким образом, если $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$ – аналитическая кривая, то она является поднятием некоторой аналитической кривой $\gamma(I) \subset \mathbb{C}_s^*$, $s \in \Delta^0$, где $\mathbb{C}_s^* = \mathbb{C}_s \backslash K$.

Введем понятие эквивалентности на слоях $\pi^{-1}(s)$, $s \in \Delta^*$.

Определение 2.3. *Две точки $w_1, w_2 \in \pi^{-1}(s)$ назовем эквивалентными, если существует аналитическая кривая $\hat{\gamma}(I) \subset X^*$, такая что $w_1 = \hat{\gamma}(0)$ и $w_2 = \hat{\gamma}(1)$. Эквивалентность точек w_1 и w_2 будем обозначать $w_1 \sim w_2$.*

Нетрудно проверить, что если $w_1 \sim w_2$ и $w_2 \sim w_3$ то $w_1 \sim w_3$. Таким образом, множество $\pi^{-1}(s) = \{w_1, ..., w_n\}$ разбивается на конечное число классов эквивалентности. Определим на X^* функцию $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$, полагая для $w_0 \in X^*$

$$\nu(w_0) = card\{w \in \pi^{-1}(\pi(w_0)) : \ w \sim w_0\}.$$

То есть ν – функция действующая на множестве X^*, которая каждой точке $w_0 \in X^*$ ставит в соответствие число эквивалентных ей точек.

3. Локальное постоянство функции ν

Основным результатом этого параграфа является доказательство локального постоянства считающей функции $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$.

Сначала изучим поведение функции ν на множестве $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$, $s \in \Delta^*$. Пусть $s \in \Delta^*$. Обозначим через $\mu(s)$ число классов эквивалентности (в смысле определения 2.3) над s, то есть число классов эквивалентности в множестве $\pi^{-1}(s)$:

$$\mu(s) = card\{C(w) : w \in \pi^{-1}(s)\},$$

где

$$C(w) = \{u \in \pi^{-1}(\pi(w)) : u \sim w\}.$$

Таким образом, C есть отображение действующее на X^*, которое каждой точке $w \in X^*$ ставит в соответствие множество эквивалентных ей точек, и, следовательно, $cardC(w) = \nu(w)$. Перейдем к доказательству локального постоянства функции ν на $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$, $s \in \Delta^*$.

Лемма 3.1. *Пусть $s \in \Delta^*$. Тогда функция $\mu : \Delta^* \to \mathbb{Z}_+$ постоянна на $\mathbb{C}_s^*$, а функция $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$ постоянна на компонентах связности прообраза $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$.*

Доказательство. Прежде всего, отметим, что поскольку непрерывное отображение $\pi_s := \pi|_{\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)} : \pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*) \to \mathbb{C}_s^*$ является накрытием связного и локально линейно связного пространства $\mathbb{C}_s^*$, вообще говоря, несвязной римановой поверхностью $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$, то его сужение $\pi_s|_L$ на любую компоненту (линейной) связности L поверхности $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$ также является накрытием пространства $\mathbb{C}_s^*$. В частности, из конечнолистности накрытия π следует, что число таких компонент конечно и для любого $\sigma \in \mathbb{C}_s^*$ величина $m(L) = card(\pi^{-1}(\sigma) \cap L)$ является постоянной, не зависящей от σ, и равна числу листов накрытия пространства $\mathbb{C}_s^*$ отображением $\pi_s|_L$ (очевидно, сумма всех $m(L)$ по всем компонентам связности L даст n – число листов накрытия π).

Зафиксируем произвольное $\sigma \in \mathbb{C}_s^*$ и рассмотрим разбиение $\pi^{-1}(\sigma) = C(w_1) \cup \ldots \cup C(w_m)$ слоя $\pi^{-1}(\sigma)$ в дизъюнктное объединение классов эквивалентности над σ. По определению эквивалентных точек имеем, что для любого i, $1 \leq i \leq m$ все точки класса $C(w_i)$ соединены аналитическими кривыми, следовательно, для любого i, $1 \leq i \leq m$ класс $C(w_i)$ лежит в некоторой связной компоненте L_i пространства $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$, содержащей точку $w_i \in L_i$, причем $\pi^{-1}(\sigma) \cap L_i = C(w_i)$, потому как все точки слоя $\pi^{-1}(\sigma)$ находящиеся в одной связной компоненте с w_i очевидно эквивалентны w_i. Так как сужение накрытия π_s на каждую компоненту связности поверхности $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$ является накрытием пространства $\mathbb{C}_s^*$, то других компонент связности, кроме L_i, $i = \overline{1,m}$, у $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$ не будет, ибо существование еще одного компонента означало бы, что в $\mathbb{C}_s^*$ есть точки, которые покрываются большее число раз чем σ, что противоречит тому, что π является накрытием. Поэтому m совпадает с числом компонент связности $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$, то есть не зависит от σ. Таким образом, для любого $\sigma \in \mathbb{C}_s^*$ имеем, что $\mu(\sigma) = m$.

Далее, пусть $w \in \pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$ и L – компонента связности $\pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$, содержащая $w \in L$. Как показано выше, $C(w) = \pi^{-1}(\pi(w)) \cap L$. Поэтому $\nu(w) = cardC(w) = m(L)$. Лемма доказана. □

Для доказательства локального постоянства ν на X^* нам понадобится следующее утверждение, которое можно рассматривать как версию теоремы о накрывающей гомотопии для накрытия $\pi : X^* \to \Delta^*$.

Лемма 3.2. *Пусть даны точка $s \in \Delta^*$ и замкнутая кривая $\gamma \subset \Delta^*$ с началом и концом в точке s: $\gamma(0) = \gamma(1) = s$. Пусть $\pi^{-1}(s) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $\hat{\gamma} : I \to X^*$ – кривая в X^* с началом $\hat{\gamma}(0) = x_1$ и концом $\hat{\gamma}(1) = x_2$ с $x_1, x_2 \in \pi^{-1}(s), x_1 \neq x_2$, накрывающая кривую γ: $\gamma(t) = \pi \circ \hat{\gamma}(t), t \in I$. Пусть, далее, фиксировано разложение*

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i, \tag{3.1}$$

прообраза $\pi^{-1}(U)$ открытой ровно накрытой окрестности U точки s в дизъюнктное обведение открытых множеств V_i, гомеоморфных U при отображениях $\pi|_{V_i} : V_i \to U$ с обратными $\varphi_i = (\pi|_{V_i})^{-1} : U \to V_i$ причем $\varphi_i(s) = x_i, i = \overline{1,n}$, то есть нумерация в (3.1) выбрана так, чтобы $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$. Тогда существует открытая окрестность W_0 единичного элемента α_0 группы Δ^0, такая что $sW_0 \subset U$ и для любого $\sigma \in W_0$ поднятие $\hat{\gamma}_\sigma : I \to X^*$ кривой $\gamma_\sigma(t) = \sigma\gamma(t), t \in I$ с началом в точке $\varphi_1(\sigma s) \in V_1$ имеет конец в точке $\varphi_2(\sigma s) \in V_2$.

Замечание: Иными словами, если имеется поднятие кривой γ с началом и концом на листах V_1 и V_2 соответственно, то поднятие "возмущенной" кривой γ_σ с началом на листе V_1 также заканчивается на листе V_2.

Доказательство. Воспользуемся стандартной схемой построения $\hat{\gamma}$ с $\hat{\gamma}(0) = x_1$, которую будем адаптировать к рассматриваемой ситуации.

Прежде всего, организуем для компакта $\gamma(I)$ открытое покрытие ровно накрытыми множествами специального вида. А именно, установим существование открытой окрестности $W \subset s^{-1}U$ единицы α_0 группы Δ^0, такой что для любого $t \in I$ множество $\gamma(t)W$ ровно накрыто.

Так как открытые ровно накрытые множества составляют базу пространства Δ^*, то существует конечное покрытие компакта $\gamma(I)$ такими множествами:

$$\gamma(I) \subset \bigcup_{i=1}^{l} U_i.$$

Пусть $\{W_j\}_{j \subset J}$ – открытая база локально компактного пространства Δ^0 в точке α_0, такая что для всякого $j \in J$ замыкание $\overline{W}_j$ компактно. Для каждого $j \in J$ определим множество

$$K_j = \{t \in I : \gamma(t)\overline{W}_j \subset U_i \textit{ для некоторого } i,\ 1 \le i \le l\}.$$

Так как все $\overline{W}_j$ замкнуты и каждое из множеств $U_i, i = \overline{1,l}$ открыто, то K_j также открыто, $j \in J$. Далее, имеем что $\gamma(I) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{l} U_i$, следовательно для любого $t \in I$ существует i такое что $\gamma(t) \subset U_i$, а так как $\{W_j\}_{j\in J}$ является базой в точке α_0, то существует $j \in J$, такое что $\gamma(t)\overline{W}_j \subset U_i$, откуда следует, что $t \in K_j$. Таким образом, семейство $\{K_j\}_{j\in J}$ образует открытое покрытие компакта I, следовательно мы можем выбрать конечное число индексов $j_1, .., j_d$, таких, что $I \subset \bigcup\limits_{k=1}^{d} K_{j_k}$.

Рассмотрим теперь множество $W = \bigcap\limits_{k=1}^{d} W_{j_k} \cap s^{-1}U \subset s^{-1}U$. Так как множества $\{W_{j_k}\}_{k=1}^{d}$ и $s^{-1}U$ являются открытыми окрестностями единичного элемента α_0, то множество W не пусто и тоже является открытой окрестностью α_0. Выберем теперь произвольную точку $t \in I$. Так как $I \subset \bigcup\limits_{k=1}^{d} K_{j_k}$, то существует такое j_m, что $t \in K_{j_m}$, что по определению множества K_{j_m} влечет существование $i, 1 \le i \le m$, такого что $\gamma(t)\overline{W}_{j_m} \subset U_i$, откуда, в силу того что все U_i ровно накрыты, следует ровно накрытость множества $\gamma(t)W \subset \gamma(t)\overline{W}_{j_m}$. Таким образом, существование множества W с требуемыми свойствами установлено.

Напомним теперь основные элементы конструкции поднятия кривой. Открытые множества $\gamma(t)W, t \in I$, очевидно, покрывают компакт $\gamma(I)$, следовательно, существует конечное число точек $\{t'_k\}_{k=1}^m$ таких, что множества $\gamma(t'_k)W, k = \overline{1,m}$ покрывают $\gamma(I)$ и пересечение "соседних" множеств $\gamma(t'_k)W \cap \gamma(t'_{k+1})W$, $k = \overline{1, m-1}$ непусто, причем ясно, что можно выбрать $\{t'_k\}_{k=1}^m$ такими, чтобы выполнялось $t'_1 = 0, t'_m = 1$. Тогда найдется разбиение отрезка $I = [0,1]$ точками $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$, такое что для любого k, $k \in \overline{1,m}$ образ $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ целиком содержится в открытом, ровно накрытом множестве $\gamma(t'_k)W$. Ясно что $\gamma(t_k) \in \gamma(t'_k)W \cap \gamma(t'_{k+1})W$, $k \in \overline{1, m-1}$. Обозначив $\gamma_k := \gamma(t'_k)$, $k = \overline{1,m}$, для прообраза открытого, ровно накрытого множества $\gamma_k W$ получим представление

$$\pi^{-1}(\gamma_k W) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i^k,$$

причем для каждого $i, i = \overline{1,n}$, сужение $\pi|_{V_i^k} : V_i^k \to \gamma_k W$ гомеоморфизм с обратным $\varphi_i^k := (\pi|_{V_i^k})^{-1} : \gamma_k W \to V_i^k$, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,m}$. Перейдем к поэтапному построению кривой $\hat{\gamma}$. Имеем, что $\gamma = \pi \circ \hat{\gamma}$, следовательно, на начальном отрезке $[t_0, t_1] = [0, t_1] \subset I$ имеются n возможностей построения начальной части кривой $\hat{\gamma}$, а именно: $\hat{\gamma}([0,t_1]) = \varphi_i^1 \circ \gamma([0,t_1])$, $i = \overline{1,n}$. Поскольку для поднятия $\hat{\gamma}$ имеем $\hat{\gamma}(0) = x_1$, то мы выбираем то i для которого $\varphi_i^1(\gamma(0)) = x_1$. Обозначим выбранное i через i_1. Построение непрерывной кривой $\hat{\gamma}$ продолжается путем сцепления непрерывных на $[t_{k-1}, t_k]$ кусков $\hat{\gamma} = \varphi_{i_k}^k \circ \gamma, k = \overline{1,m}$ в точках t_k за счет подбора следующего $\varphi_{i_k}^k$ по предыдущему $\varphi_{i_{k-1}}^{k-1}$ так, чтобы $\varphi_{i_k}^k(b_{k-1}) = \varphi_{i_{k-1}}^{k-1}(b_{k-1})$, где $b_{k-1} = \gamma(t_{k-1}) \in \gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W$. Цепочка гомеоморфизмов

$$\varphi_{i_k}^k : \gamma_k W \to V_{i_k}^k$$

обеспечивает непрерывность кривой $\hat{\gamma}$ на последовательности листов $V_{i_k}^k, k = \overline{1,m}$ на которых она лежит. Так как кривая $\hat{\gamma}, \hat{\gamma}(0) = x_1$ однозначно определяется по γ (единственность поднятия кривой), то она не зависит от представляющей ее конструкции, которую мы выбираем согласуясь с условиями леммы.

Далее, имеем что $\gamma_1 = \gamma(t'_1) = \gamma(0) = s = \gamma(1) = \gamma(t'_m) = \gamma_m$, следовательно, $\gamma_1 W = sW \subset U$ и полученный первым гомеоморфизм $\varphi_{i_1}^1 : sW \to V_{i_1}^1$ удовлетворяет условию $\varphi_{i_1}^1(\gamma(0)) = x_1 \in V_1$, следовательно $\varphi_{i_1}^1$ является сужением отображения $\varphi_1 : U \to V_1$ на множество sW: $\varphi_{i_1}^1 = \varphi_1|_{sW}$ (потому как и

φ_1 и $\varphi^1_{i_1}$ являются гомеоморфизмами, локально обратными к π). Тогда из данного в условии леммы соглашения о нумерации ($\hat{\gamma}(1) = x_2 \in V_2$) аналогичными рассуждениями получаем, что $\varphi^m_{i_m} = \varphi_2|_{sW}$.

Итак, мы представили построение поднятия кривой в нашем случае. Задача состоит в том, чтобы показать, что при малом возмущении начальной точки $x_1 \in V_1$ соответствующая (поднятая) кривая не сможет соскользнуть с указанных листов, и, следовательно, ее конец будет лежать на V_2. Для решения этой задачи обоснуем существование множеств U_k и $\tilde{U}_k$ со специальными свойствами.

Во первых, для любого k, $1 \le k \le m$ существует открытая окрестность U_k единицы α_0, такая, что $U_k\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma_k W$, доказательство которого следует из компактности $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset \gamma_k W$ и открытости $\gamma_k W$. Во вторых, для любого k, $2 \le k \le m$, найдется окрестность $\tilde{U}_k$ единицы α_0, такая, что $\varphi^k_{i_k}(\beta) = \varphi^{k-1}_{i_{k-1}}(\beta)$ при всех $\beta \in b_{k-1}\tilde{U}_k$. В самом деле, имеем, что $b_{k-1} = \gamma(t_{k-1}) \in \gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W$ и $\varphi^{k-1}_{i_{k-1}}(b_{k-1}) = \varphi^k_{i_k}(b_{k-1})$. Так как $\gamma_{k-1}W$ и $\gamma_k W$ открыты, то множество $\gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W \ni b_{k-1}$ также открыто, следовательно существует окрестность $\tilde{U}_k$ единичного элемента α_0, такая что $b_{k-1}\tilde{U}_k \subset \gamma_{k-1}W \cap \gamma_k W$, откуда следует равенство $\varphi^{k-1}_{i_{k-1}}(\beta) = \varphi^k_{i_k}(\beta), \beta \in b_{k-1}\tilde{U}_k$, потому как $\varphi^{k-1}_{i_{k-1}}$ и $\varphi^k_{i_k}$ являются гомсоморфизмами, локально обратными к π.

Наконец, докажем, что при выполнении установленных выше условий, для любого σ из открытой окрестности $W_0 = \bigcap\limits_{k=2}^{m} (U_k \cap \tilde{U}_k) \cap U_1$ единицы α_0 поднятие $\hat{\gamma}_\sigma$ кривой γ_σ с началом в точке $\varphi_1(\sigma s)$ имеет конец в точке $\varphi_2(\sigma s)$. Для этого рассмотрим отображение

$$v(t) = \varphi^k_{i_k}(\sigma\gamma(t)),\ t \in [t_{k-1}, t_k],\ k = \overline{1, m},$$

и покажем, что v есть непрерывная кривая, совпадающая с $\hat{\gamma}_\sigma$. Ясно, что достаточно доказать непрерывность v в точках $t_k, k = \overline{1, m-1}$. Имеем

$$v(t) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi^k_{i_k}(\sigma\gamma(t)), t \in [t_{k-1}, t_k], \\ \varphi^{k+1}_{i_{k+1}}(\sigma\gamma(t)), t \in [t_k, t_{k+1}] \end{array} \right.$$

Так как $\sigma \in W_0 \subset \tilde{U}_{k+1}$, то $b_k\sigma \in b_k\tilde{U}_{k+1}$, следовательно $\varphi^k_{i_k}(b_k\sigma) = \varphi^{k+1}_{i_{k+1}}(b_k\sigma)$, то есть $\varphi^k_{i_k}(\gamma(t_k)\sigma)) = \varphi^{k+1}_{i_{k+1}}(\gamma(t_k)\sigma)$ и тем самым доказана непрерывность v в t_k, то есть $v(t), t \in I$ – непрерывная кривая. Так как каждый гомеоморфизм $\varphi^k_{i_k}$, $k = \overline{1, m}$, в своей области определения является обратным к π, то из определения отображения v получаем $\pi \circ v(t) = \sigma\gamma(t) = \gamma_\sigma(t), t \in I$, следовательно, v является поднятием кривой γ_σ. Имеем, далее, $v(0) = \varphi^1_{i_1}(\sigma\gamma(0)) = \varphi^1_{i_1}(\sigma s)$. Так как

$\sigma \in W_0 \subset U_m$, то из определения множества U_m получаем, что $\sigma\gamma([t_{m-1}, t_m]) \subset \gamma_m W = sW$, то есть, в частности, $\sigma s = \sigma\gamma(t_m) \in sW$, откуда, пользуясь тем, что $\varphi^1_{i_1} = \varphi_1|_{sW}$, получаем $v(0) = \varphi^1_{i_1}(\sigma s) = \varphi_1(\sigma s)$. Таким образом v действительно есть поднятая кривая $\hat{\gamma}_\sigma$ о которой говорится в лемме. Покажем теперь, что конец кривой $\hat{\gamma}_\sigma$ лежит на листе V_2. Имеем $\hat{\gamma}_\sigma(1) = v(1) = \varphi^m_{i_m}(\sigma\gamma(1)) = \varphi^m_{i_m}(\sigma s)$, и, так как $\sigma s \in sW$ и $\varphi^m_{i_m} = \varphi_2|_{sW}$, получаем, что $\hat{\gamma}_\sigma(1) = \varphi^m_{i_m}(\sigma s) = \varphi_2(\sigma s) \in V_2$. Лемма 3.2 доказана. □

Следствие 3.1. *У каждого элемента $w \in X^*$ найдется такая окрестность V, что для любого $z \in V$ имеет место неравенство $\nu(z) \geq \nu(w)$.*

Доказательство. Пусть $w \in X^*$ и $\pi(w) = s \in \Delta^*$. Пусть U ровно накрытая окрестность точки s, такая что $\pi^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} V_i$ и все $\pi : V_i \to U$ – гомеоморфизмы, с обратными $\varphi_i : U \to V_i$. Предположим, что $w \in V_1$. Выберем некоторое $u \neq w$ из $C(w)$. Тогда $\pi(u) = s$ и из гомеоморфности π на каждом V_i получаем что $u \notin V_1$. Пусть, скажем, $u \in V_2$. Так как $u \in C(w)$ то по определению множества $C(w)$ существует аналитическая кривая с началом и концом в w и u соответственно, то есть существует аналитическая кривая $\gamma \subset \Delta^*$ с $\gamma(0) = \gamma(1) = s$, такая, что для ее поднятия $\hat{\gamma} \subset X^*$ имеем $\hat{\gamma}(0) = w, \hat{\gamma}(1) = u$. Пусть теперь $W_0^{(2)}$ есть множество W_0 из предыдущей леммы для рассматриваемого случая (мы добавляем индекс 2 так как предполагаем, что $u \in V_2$). Обозначим $V_1^{(2)} = V_1 \cap \pi^{-1}(sW_0^{(2)}) = \varphi_1(sW_0^{(2)})$. Тогда, согласно предыдущей лемме, для любого $x \in V_1^{(2)}$ существует аналитическая кривая с началом в точке x и концом в множестве $\varphi_2(sW_0^{(2)}) \subset V_2$. Следовательно, точки из $V_1^{(2)}$ имеют на листе V_2 столько же эквивалентных точек сколько w(а именно, по одной эквивалентной точке). Далее поочередно рассматривая листы $V_3, ..., V_n$ и учитывая, что w может иметь эквивалентные точки только на листах $V_i, i = \overline{2, n}$ (причем не более одной эквивалентной точки на каждом листе), получаем множества $V_1^{(3)}, ..., V_1^{(n)}$. Определив теперь $V = \bigcap\limits_{i=2}^{n} V_1^{(i)}$ получим множество V, которое, очевидно, будет удовлетворять требованию следствия. Следствие 3.1 доказано. □

Теперь все готово для формулировки и доказательства основного утверждения.

Теорема 3.1. *Функция $\nu : X^* \to \mathbb{Z}_+$ локально постоянна на X^*.*

Доказательство. Сначала докажем, что функция $\mu : \Delta^* \to \mathbb{Z}_+$ является постоянной на Δ^*. Имеем $\mu(\sigma) = card\{C(w),\ w \in \pi^{-1}(\sigma)\}$. Согласно следствию 3.1 для $w_1 \in \pi^{-1}(\sigma)$ существует окрестность V_1 такая что $\nu(z) \geq \nu(w_1), z \in V_1$, то есть у точки z число эквивалентных точек не меньше чем у w_1. Пусть $\pi^{-1}(\sigma) = (w_1, ..., w_n)$ и пусть $V_1, ..., V_n$ – соответствующие окрестности этих точек. Определим $U = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \pi(V_i)$. Предположим, что $\xi \in U$ и рассмотрим $\mu(\xi) = card\{C(z),\ z \in \pi^{-1}(\xi)\}$. Выберем произвольное $z \in \pi^{-1}(\xi)$ и предположим что $z \in V_i$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$. Тогда по определению множества V_i имеем, что у точки $z \in \pi^{-1}(\xi)$ число эквивалентных точек не меньше чем у $w_i \in \pi^{-1}(\sigma)$: $\nu(z) \geq \nu(w_i)$, и, следовательно, число классов эквивалентности точек из $\pi^{-1}(\xi)$ не больше числа классов эквивалентности точек из $\pi^{-1}(\sigma)$, то есть $\mu(\xi) \leq \mu(\sigma)$.

Итак, для любого $\sigma \in \Delta^*$ существует окрестность U точки σ, такая что

$$\mu(\xi) \leq \mu(\sigma), \xi \in U. \tag{3.2}$$

Положим $\mu = \min_{\sigma \in \Delta^*} \mu(\sigma)$ и $D = \{\sigma \in \Delta^* : \mu(\sigma) = \mu\}$. Так как функция μ принимает значения из $\mathbb{Z}_+$, то, очевидно, $D \neq \varnothing$. Покажем, что $D = \Delta^*$, то есть $\mu(s) = \mu$ на Δ^*.

Зафиксируем произвольное $s \in \Delta^*$ и любое $\sigma \in D$. Тогда, согласно (3.2), найдется окрестность $U \ni \sigma$, такая, что $\mu|_U \leq \mu(\sigma) = \mu \leq \mu(s)$. Поскольку множество $\mathbb{C}_s^*$ всюду плотно в Δ^*, то $U \cap \mathbb{C}_s^* \neq \varnothing$, и, по лемме 3.1 получаем, что

$$\mu|_{\mathbb{C}_s^*} = \mu|_{U \cap \mathbb{C}_s^*} \leq \mu(\sigma) = \mu \leq \mu(s) = \mu|_{\mathbb{C}_s^*},$$

то есть $\mu(s) = \mu(\sigma) = \mu$, и, следовательно, $s \in D$. Таким образом, $D = \Delta^*$ и функция μ постоянна на Δ^*.

Постоянство μ на Δ^* немедленно влечет за собой равенство $\nu(z) = \nu(w)$ для любого z из окрестности V точки w (см. Следствие 3.1), так как противное – существование $z \in V$ с $\nu(z) > \nu(w)$ – приводит, согласно первой части доказательства, к строгому неравенству $\mu(\pi(z)) < \mu(\pi(w))$, что является противоречием. Тем самым показано локальное постоянство функции ν на X^*. Теорема 3.1 доказана. □

4. Локальное постоянство функции ν: алгебраическая версия

В предыдущей части было показано, что из Следствия 3.1 следует локальное постоянство функции ν на X^* (Теорема 3.1), причем Следствие 3.1 было получено путем конструктивного поднятия кривых из Δ^* (Лемма 3.2). В данной части алгебраическим методом доказывается результат Следствия 3.1 для алгебраической версии теории. Вначале докажем один технический результат.

Лемма 4.1. *Пусть K – компактное множество и $p(t,x) = x^n + g_1(t)x^{n-1} + ... + g_{n-1}(t)x + g_n(t)$, $t \in K$ полином с непрерывными коэффициентами: $g_i \in C(K), i = \overline{1,n}$. Пусть, далее, функция $f \in C(K)$ удовлетворяет условию $p(t, f(t)) = 0$, $t \in K$ и пусть $C = \max_{1\le i\le n}\{||g_i||\}$. Тогда $||f|| := \sup_{t\in K}|f(t)| < 1 + C$.*

Доказательство. Если $C = 0$, то все g_i равны 0. Это означает, что $p(x,t) = x^n$, откуда $f = 0$. Таким образом, $||f|| = 0 < 1 + 0 = 1 + C$. При $C > 0$ и $||f|| \le 1$ заключение тривиально: $||f|| < 1 + C$.

Пусть теперь $C > 0$ и $||f|| > 1$. Тогда существует $t_0 \in K$, такое что $|f(t_0)| = ||f|| > 1$. Так как $f(t_0)^n = -g_1(t_0)f(t_0)^{n-1} - ... - g_n(t_0)$, то

$$|f(t_0)| \le C(1 + \frac{1}{|f(t_0)|} + ... + \frac{1}{|f(t_0)|^{n-1}}) < C\frac{|f(t_0)|}{|f(t_0)| - 1},$$

следовательно $||f|| = |f(t_0)| < 1 + C$. Лемма 4.1 доказана. □

Отметим, что как показывает пример многочлена $q(x) = x^2 - C$ при достаточно малом C ($C < 1/4$), только что установленную оценку нельзя улучшить до $||f|| \le 2C$. Следующий результат, по видимому, относится к математическому фольклору, поэтому мы приведем его с полным доказательством.

Лемма 4.2. *Пусть $K = [0,1]$, $p(t,x) = x^n + g_1(t)x^{n-1} + ... + g_n(t)$ – полином с непрерывными коэффициентами: $g_i \in C(K), i = \overline{1,n}$, и с дискриминантом всюду отличным от нуля: $d_p(t) \ne 0, t \in K$. Тогда существуют ровно n функций $h_i \in C(K), i = \overline{1,n}$, попарно не совпадающих ни в одной точке K и представляющих множество решений уравнения $p(t,x) = 0$ над K, т.е.*

$$p(t, h_i(t)) = 0, t \in K, i = \overline{1,n}.$$

Замечание: Отметим, что поскольку для каждой точки $t_0 \in K$ уравнение $p(t_0, x) = 0$ имеет ровно n решений, то попарно различные значения $h_i(t_0), i =$

$\overline{1,n}$, будут представлять собой *все* решения уравнения $p(t_0,x)=0$, то есть значениями $\{h_i(t)\}_{i=1}^n$, $t\in K$, исчерпывается *все* множество решений уравнений $p(t,x)=0$, $t\in K$. *Доказательство леммы 4.2.* Определим множество

$$K_p=\{(t,x)\in K\times\mathbb{C}:p(t,x)=0\}.$$

Нам нужно найти непрерывные, попарно несовпадающие функции $h_i\in C(K), i=\overline{1,n}$, такие что

$$K_p=\{(t,x)\in K\times\mathbb{C}:p(t,x)=0\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{(t,h_i(t)):t\in K\}.$$

Проекция $\pi:K_p\to K:(t,x)\mapsto t$ на первую координату по теореме Гурвица-Руше будет неразвлетвленным n-листным накрытием, а в силу непрерывности функций $g_i\in C(K), i=\overline{1,n}$ проекция на вторую координату $\eta:K_p\to\mathbb{C}:(t,x)\mapsto x$ будет непрерывным отображением.

Рассмотрим кривую $u:I\to K$, $u(t)=t$, $t\in I(=K)$ и слой $\pi^{-1}(0)=\{(0,x_1),...,(0,x_n)\}$ над точкой $0\in K$. По теореме о поднятии кривой существуют n поднятий $\hat{u}_i:I\to K_p, i=\overline{1,n}$, кривой u, таких что $u=\pi\circ\hat{u}_i$ и $\hat{u}_i(0)=(0,x_i)$, $i=\overline{1,n}$. Положим $h_i=\eta\circ\hat{u}_i$, $i=\overline{1,n}$, и покажем, что это и есть требуемые функции. Прежде всего заметим, что функции h_i непрерывны как суперпозиции непрерывных функций η и $\hat{u}_i$, $i=\overline{1,n}$. Далее, по определению отображения η имеем, что $h_i(t)$ – вторая "координата" точки $\hat{u}_i(t)$. Из соотношения $\pi\circ\hat{u}_i(t)=u(t)=t$ получаем, что первой "координатой" точки $\hat{u}_i(t)$ является t. Таким образом,

$$\hat{u}_i(t)=(t,h_i(t)),t\in K,\tag{4.1}$$

то есть $(t,h_i(t))\in K_p, t\in K, i=\overline{1,n}$.

Покажем теперь, что для любого $t\in K$ точки $h_i(t)$ попарно различны. Предположим противное, то есть существование элемента $t_0\subset K$ и индексов $i\neq j$, таких, что $h_i(t_0)=h_j(t_0)$.

Рассмотрим множество $T=\{t\in K:h_i(t)=h_j(t)\}$. Согласно сделанному предположению T – не пусто. Из непрерывности функций h_i и h_j следует, что T является замкнутым множеством. Покажем, что T также открыто в K.

Пусть $t'\in T$. Тогда в силу (4.1) имеем, что $\hat{u}_i(t')=\hat{u}_j(t')$. Так как π – накрытие, то существует открытое множество $U\ni\pi(\hat{u}_i(t'))=t'$ в K, для которого найдется открытое множество $V\ni\hat{u}_i(t')=\hat{u}_j(t')$ в K_p, такое что $\pi:V\to U$ –

гомеоморфизм, а значит, биекция на V. С другой стороны, так как $\hat{u}_i, \hat{u}_j$ непрерывны, то существует $\delta > 0$, такое, что из $t \in K$ и $|t - t'| < \delta$ следует, что $\hat{u}_i(t)$ и $\hat{u}_j(t)$ принадлежат V. Так как на множестве V π является биекцией, то соотношение $\pi(\hat{u}_i(t)) = t = \pi(\hat{u}_j(t))$ приводит к тому, что при $t \in K, |t - t'| < \delta$ имеет место равенство поднятий

$$\hat{u}_i(t) = \hat{u}_j(t), \tag{4.2}$$

то есть $h_i(t) = h_j(t)$, откуда следует, что $K \cap (t' - \delta, t' + \delta) \subset T$, то есть множество T открыто. Так как K связно, получаем что $T = K$. Это означает, что равенство 4.2 выполняется на всем K, что заведомо невозможно, ибо $\hat{u}_i(0) = (0, x_i) \neq (0, x_j) = \hat{u}_j(0)$. Итак, установлено попарное различие точек $h_i(t), i = \overline{1, n}$ на $t \in K$. Лемма 4.2 доказана. □

Отметим, что последнее доказанное в лемме утверждение можно переформулировать как несуществование непрерывной на K функции $g \neq h_i, i = \overline{1, n}$ в каждой точке из K совпадающей с одной из функций h_i. Нашим основным инструментом в этой части работы является следующая лемма.

Лемма 4.3. *В условиях предыдущей леммы для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, такое что для всякого набора функций $\varepsilon_i \in C(K), \varepsilon_i : K \to \mathbb{C}$ с $||\varepsilon_i|| < \varepsilon, i = \overline{1, n}$ найдутся n функций $\tilde{h}_i \in B_\delta(h_i), i = \overline{1, n}$ для которых при каждом $t \in K$ точки $\tilde{h}_i(t), i = \overline{1, n}$, представляют собой n различных нулей "возмущенного" полинома*

$$p_\varepsilon(t, x) := x^n + \sum_{i=1}^{n} (g_i(t) + \varepsilon_i(t)) x^{n-k}. \tag{4.3}$$

Здесь $B_\delta(h) = \{f \in C(K) : ||f - h|| < \delta\}$.

Доказательство. Вначале установим существование такого $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ любой полином вида (4.3) с $||\varepsilon_i|| < \varepsilon, i = \overline{1, n}$, удовлетворяет условиям леммы 4.2, то есть имеет всюду отличный от нуля дискриминант на K. Для этого воспользуемся известной интерпретацией $\mathbb{C}^n$ как пространства коэффициентов полиномов над полем $\mathbb{C}$. Пусть $D = \{w \in \mathbb{C}^n : d(w) = 0\}$ – множество нулей дискриминантного отображения $d : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, сопостовляющего вектору $w \in \mathbb{C}^n$ коэффициентов полинома значение $d(w)$ его дискриминанта.

Рассмотрим отображение

$$G : K \to \mathbb{C}^n : t \mapsto (g_1(t), ..., g_n(t)) \cong x^n + g_1(t) x^{n-1} + ... + g_n(t) = p(t, x).$$

Тогда образ $G(K) = g_1(K) \times ... \times g_n(K)$ есть компакт, и, по условию, $G(K) \cap D = \varnothing$ так как дискриминант полинома $p(t, x)$ отличен от нуля всюду на K. Обозначим через $d_0 = d(G(K), D)$ – расстояние между множествами $G(K)$ и D. Так как эти множества замкнуты, а первое из них, кроме того, компактно, то $d_0 > 0$. Покажем, что в качестве ε_0 можно взять постоянную $d_0/2\sqrt{n}$. Действительно, для любого набора $\tilde{G} = (\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n)$ с $||\tilde{g}_i - g_i|| < \varepsilon \le \varepsilon_0, i = \overline{1,n}$, расстояние $d(\tilde{G}(t), G(t)) < \varepsilon_0\sqrt{n} = d_0/2$ для любого $t \in K$. В силу неравенства $|d(G(t), D) - d(\tilde{G}(t), D)| < d(G(t), \tilde{G}(t)), t \in K$ (см. напр. [10], стр. 377), отсюда следует, что для любого $t \in K$ имеет место цепочка неравенств $d(\tilde{G}(t), D) \ge d(G(t), D) - d(\tilde{G}(t), G(t)) > d_0 - d_0/2 > 0$, которая и обеспечивает выполнение утверждаемого условия: $\tilde{G}(K) \cap D = \varnothing$.

Таким образом, при установленных выше условиях, для любого полинома вида (4.3) в силу леммы 4.2 существуют n функций $\tilde{h}_i, i = \overline{1,n}$, представляющих его нули при каждом фиксированном $t \in K$, с $\varepsilon_i = \tilde{g}_i - g_i$. Покажем теперь существование $\varepsilon > 0$, такого что при $||\varepsilon_i|| < \varepsilon$, $i = \overline{1,n}$ непрерывные решения уравнений $p_\varepsilon(t, x) = 0$ содержатся в $B_\delta(h_i), i = \overline{1,n}$.

Во первых, для любого выбора $\tilde{G}$, с $||\tilde{g}_i - g_i|| < \varepsilon_0$ имеем $||\tilde{g}_i|| < ||g_i|| + \varepsilon_0, i = \overline{1,n}$. Тогда $\tilde{C} := \max_i ||\tilde{g}_i|| < C + \varepsilon_0$, где $C = \max_i ||g_i||$. По лемме 4.1 будем иметь $||\tilde{h}_i|| < 1 + \tilde{C} < 1 + C + \varepsilon_0$, для всех $i = 1, .., n$.

Пусть, далее, $\delta_0 = \min\limits_{1 \le i < j \le n} \inf\limits_{t \in K} |h_i(t) - h_j(t)|$. По лемме 4.2 имеем, что $\delta_0 > 0$. Так как при $\delta_1 < \delta_2$ очевидно $B_{\delta_1}(h) \subset B_{\delta_2}(h)$, то, не умаляя общности, можем предположить, что наше произвольное δ удовлетворяет условию $\delta < \delta_0/2$. Тогда, по теореме Гурвица-Руше, существует постоянная $\varepsilon_1 > 0$, такая, что при $|b_i - g_i(0)| < \varepsilon_1, i = \overline{1,n}$ полином $P(x) = x^n + b_1x^{n-1} + .. + b_n$ в каждом из кругов $|x - h_i(0)| < \delta, i = \overline{1,n}$, имеет ровно по одному нулю (кратности 1).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ со следующими условиями:

а) $\varepsilon < \varepsilon_0$; тогда, по определению ε_0, из $||\tilde{g}_i - g_i|| < \varepsilon$ следует существование попарно несовпадающих функций $\tilde{h}_i \in C(K), i = \overline{1,n}$, представляющих собой нули полинома (4.3),

б) $\varepsilon < \varepsilon_1$; тогда, по определению ε_1, если $|\tilde{g}_i(0) - g_i(0)| < \varepsilon$, то можно так перенумеровать $\tilde{h}_i$, чтобы $|\tilde{h}_i(0) - h_i(0)| < \delta, i = \overline{1,n}$, и наконец,

в) $\varepsilon[(1 + C + \varepsilon_0)^n - 1]/(C + \varepsilon_0) < \delta^n$; тогда для любого $i \in \{1, .., n\}$, пользуясь равенством $p_\varepsilon(t, \tilde{h}_i(t)) = 0$ получим, что

$$|p(t,\tilde{h}_i(t))| = |p(t,\tilde{h}_i(t)) - p_\varepsilon(t,\tilde{h}_i(t))| =$$

$$= |(\tilde{h}_i(t)^n + g_i(t)\tilde{h}_i(t)^{n-1} + .. + g_n(t)) - (\tilde{h}_i(t)^n + \bar{g}_i(t)\tilde{h}_i(t)^{n-1} + .. + \bar{g}_n(t))| =$$

$$= |\varepsilon_1(t)\tilde{h}_i(t)^{n-1} + ... + \varepsilon_n(t)| < \delta^n \tag{4.4}$$

на K при $||\varepsilon_i|| < \varepsilon$, где $\varepsilon_i = \bar{g}_i - g_i$.

Покажем теперь, что для таких ε выполняется импликация

$$||\varepsilon_i|| < \varepsilon \Rightarrow \tilde{h}_i \in B_\delta(h_i),\ i = 1,...,n.$$

Выберем произвольное $i_0 \in \{1,...,n\}$ и рассмотрим величину

$$t_0 := \sup\{\tau \in [0,1] : |h_{i_0}(t) - \tilde{h}_{i_0}(t)| < \delta \text{ при } t \in [0,\tau]\}.$$

Число $t_0 > 0$, так как модуль $r(t) = |h_{i_0}(t) - \tilde{h}_{i_0}(t)|$ непрерывен и строго меньше δ при $t = 0$ (см. п. (б)). Очевидно, $t_0 \leq 1$. Предположим, что $t_0 < 1$. По определению t_0 имеем $r(t) < \delta$ при $t \in [0,t_0)$. Далее, имеем что $r(t_0) = \delta$. Действительно, предположение $r(t) < \delta$ противоречит точности верхней грани $t_0 < 1$, а $r(t) > \delta$ – непрерывности функции $r(t)$. Наконец, для любого $j \neq i_0$ пользуясь определением δ_0 получаем

$$|h_j(t_0) - \tilde{h}_{i_0}(t_0)| = |h_j(t_0) - h_{i_0}(t_0) + h_{i_0}(t_0) - \tilde{h}_{i_0}(t_0)| \geq$$

$$\geq |h_j(t_0) - h_{i_0}(t_0)| - r(t_0) \geq \delta_0 - \delta > 2\delta - \delta = \delta. \tag{4.5}$$

Так как пары $(t_0, h_j(t_0)), j = \overline{1,n}$, являются корнями полинома $p(t,x)$, то можем записать $p(t_0,x) = \prod_{j=1}^{n}(x - h_j(t_0))$, откуда, в силу (4.4) и (4.5), получаем

$$\delta^n > |p(t_0,\tilde{h}_{i_0}(t_0))| = r(t_0) \prod_{j=1, j\neq i_0}^{n} |\tilde{h}_{i_0}(t_0) - h_j(t_0)| > \delta\delta^{n-1} = \delta^n. \tag{4.6}$$

Полученное противоречие показывает, что t_0 должно быть единицей.

Однако, подстановка $t_0 = 1$ в (4.5) и (4.6) демонстрирует также и противоречивость предположения $r(1) = \delta$. Таким образом, $|h_{i_0}(t) - \tilde{h}_{i_0}(t)| < \delta$ при $t \in K$, а поскольку функции h_{i_0} и $\tilde{h}_{i_0}$ непрерывны, то $||\tilde{h}_{i_0} - h_{i_0}|| < \delta$, то есть $\tilde{h}_{i_0} \in B_\delta(h_{i_0})$. В силу произвольности i_0 лемма 4.3 доказана. □

Перейдем теперь к рассмотрению алгебраической версии теории развиваемой в работе. Пусть

$$p(s,x) = x^n + f_1(s)x^{n-1} + ... + f_n(s)$$

– полином с обобщенными аналитическими коэффициентами $f_i \in \mathcal{O}(\Delta^0), i = \overline{1,n}$ и дискриминантом d_p. Тогда, очевидно, d_p также является обобщенной аналитической функцией: $d_p \in \mathcal{O}(\Delta^0)$. Обозначим $N_p = N(d_p)$ – множество нулей дискриминанта d_p. Тогда либо N_p нигде не плотно (дискретно) в Δ^0, либо $N_p = \Delta^0$. Мы предполагаем что имеет место первое: N_p нигде не плотно в Δ^0, и нуль множество N_p будет играть роль тонкого множества. Рассмотрим пространство

$$\Delta_p^0 = \{(s,x) \in \Delta^0 \times \mathbb{C} : p(s,x) = 0\},$$

и накрытие

$$\pi : \Delta_p^0 \to \Delta^0 : (s,x) \mapsto s.$$

Сужение $\pi|_{\Delta_p^*} : \Delta_p^* = \pi^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ будет неразвлетвленным накрытием над $\Delta^* = \Delta^0 \setminus N_p$, которое мы также будем обозначать через π. Таким образом, Δ_p^0 становится поверхностью Бора-Римана. Обозначим $\mathbb{C}_s^* = \mathbb{C}_s \cap \Delta^* = \mathbb{C}_s \setminus N_p$, $\mathbb{C}_{p,s}^* = \pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*)$ и $\mathbb{C}_{p,s} = \pi^{-1}(\mathbb{C}_s)$. Напомним, что кривая $u : I \to \Delta^0$ называется аналитической, если $u(I) \subset \mathbb{C}_s$ для некоторого $s \in \Delta^0$ (это s можно взять равным $u(0)$).

Определение 4.1. *Кривая $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ в Δ_p^* называется аналитической, если аналитической будет ее проекция $u = \pi \circ \hat{u}$ при накрытии π.*

Лемма 4.4. *Следующие два условия эквивалентны:*

(1) *$\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ – аналитическая кривая, и*
(2) *существует $s \in \Delta^0$, такое что $\hat{u}(I) \subset \mathbb{C}_{p,s}^*$.*

Доказательство. Предположим $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ – аналитическая кривая. Тогда существуют $s \in \Delta^0$ и кривая $u(I) \subset \mathbb{C}_s$, такая что $u = \pi \circ \hat{u}$. Так как $\hat{u}(I) \subset \Delta_p^* = \pi^{-1}(\Delta^*)$ то $u(I) = \pi \circ \hat{u}(I) \subset \Delta^*$, то есть $u(I) \subset \mathbb{C}_s \cap \Delta^* = \mathbb{C}_s^*$ следовательно $\hat{u}(I) \subset \pi^{-1}(\mathbb{C}_s^*) = \mathbb{C}_{p,s}^*$.

Теперь предположим, что существует $s \in \Delta^0$, такое что $\hat{u}(I) \subset \mathbb{C}_{p,s}^*$. Тогда кривая $u(I) = \pi \circ \hat{u}(I) \subset \mathbb{C}_s^*$, то есть u – аналитическая кривая, и, следовательно, кривая $\hat{u}$ также аналитическая. Эквивалентность условий доказана. □

Как мы уже видели, имеющаяся на Δ^0 структура локально компактной абелевой группы дает возможность для каждых $s \in \Delta^0$ и аналитической кривой $u : I \to \Delta^0$ определить кривую $u_s : I \to \Delta^0$, полагая $u_s(t) = su(t), t \in I$, которая также будет аналитической.

Лемма 4.5. *Пусть $u : I \to \Delta^*$ – (аналитическая) кривая. Тогда найдется такая окрестность U единичного элемента группы Δ^0, что для всякого $s \in U$ (аналитическая) кривая $u_s(I)$ содержится в Δ^*.*

Доказательство. Имеем, что $u(I) \subset \Delta^*$, следовательно $u(I)$ не содержит точек из N_p. Так как множество N_p дискретно, то найдется окрестность кривой $u(I)$ не прересекающаяся с N_p, то есть найдется окрестность U единичного элемента α_0, такая что $u(I)U \cap N_p = \varnothing$. Тогда, очевидно, для любого $s \in U$ кривая $u_s(I) = su(I)$ не пересекается с N_p, то есть $u_s(I) \subset \Delta^*$. Лемма 4.5 доказана. □

Аналогично прежнему определению, две точки $w, w' \in \Delta_p^*$ назовем *эквивалентными* ($w \sim w'$), если $\pi(w) = \pi(w')$ и существует аналитическая кривая $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$, такая что $\hat{u}(0) = w, \hat{u}(1) = w'$. Опять же, если $w \sim w'$ и $w' \sim w''$, то $w \sim w''$. Пусть, как и прежде, $C(w)$ множество всех точек (включая w), эквивалентных w. Из n-листности накрытия имеем, что $cardC(w) \le n$. Также, из транзитивности отношения эквивалентности следует, что для всякого $w \in \Delta_p^*$ существует аналитическая кривая $\hat{u}(I)$, такая что $\hat{u}(0) = w$ и $C(w) \subset \hat{u}(I)$. Перейдем теперь к вопросу локального поведения на Δ_p^* функции $\nu : \Delta_p^* \to \mathbb{Z}_+$, $\nu(w) = cardC(w)$. Как уже отмечалось, Следствие 3.1 влечет за собой доказательство локального постоянства функции ν на поверхности Бора-Римана (Теорема 3.1). В следующей теореме алгебраическим методом доказывается утверждение Следствия 3.1 для нашего случая, которое опять же приведет к локальному постоянству функции ν на Δ_p^*.

Теорема 4.1. *У каждого элемента $w \in \Delta_p^*$ найдется такая окрестность V, что для любого $z \in V$ имеет место неравенство $\nu(z) \ge \nu(w)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $w_0 \in \Delta_p^*$ с $\pi(w_0) = s_0 \in \Delta^*$. Пусть $\nu(w_0) = k$. Пусть, далее, $C(w_0) = (w_0, w_1, ..., w_{k-1})$ и $\hat{u} : I \to \Delta_p^*$ аналитическая кривая с $\hat{u}(0) = w_0$ и $C(w_0) \subset \hat{u}(I)$. Тогда найдутся $0 = t_0 < t_1 < ... < t_{k-1} \le 1$ такие, что $\hat{u}(t_i) = w_i, i = \overline{0, k-1}$ и $\pi \circ \hat{u}(t_i) = \pi(w_i) = s_0, i = \overline{0, k-1}$. Положим $u(t) = \pi \circ \hat{u}(t), t \in I$ – проекция аналитической кривой $\hat{u} \subset \Delta_p^*$. Имеем, что $u(I) \subset \Delta^*$ и $u(t_i) = \pi \circ \hat{u}(t_i) = s_0, i = \overline{0, k-1}$.

Ясно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой последовательности $w_\lambda \to w_0$ существует λ_0, такое что при $\lambda > \lambda_0$ выполняется $\nu(w_\lambda) \ge \nu(w_0) = k$.

Из сходимости $w_\lambda \to w_0$ следует сходимость $s_\lambda := \pi(w_\lambda) \to s_0$. Обозначим $s^0_\lambda = s_0^{-1}s_\lambda$. Тогда $s^0_\lambda \to \alpha_0$, где α_0 – единица группы Δ^0. Определим кривые $u_\lambda : I \to \Delta^0$ как $u_\lambda(t) = s^0_\lambda u(t), t \in I$. Тогда, по лемме 4.5 найдется λ_1 такое, что при $\lambda > \lambda_1$ кривые $u_\lambda(I)$ содержатся в Δ^*.

Рассмотрим теперь полиномы

$$p(u(t), x) = x^n + f_1(u(t))x^{n-1} + ... + f_n(u(t))$$

и

$$p(u_\lambda(t), x) = x^n + f_1(u_\lambda(t))x^{n-1} + ... + f_n(u_\lambda(t)).$$

Так как кривая $u(t), t \in I$ принадлежит множеству Δ^* то по лемме 4.2 уравнение $p(u(t), x) = 0, t \in I$ имеет ровно n непрерывных попарно не совпадающих решений. Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется λ_ε, такое что при $\lambda \geq \lambda_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\max_{1\leq i\leq n} ||f_i(u(t)) - f_i(u_\lambda(t))||_{C(I)} < \varepsilon.$$

Применяя лемму 4.3, получим, что при $\lambda > \max\{\lambda_1, \lambda_\varepsilon\}$ уравнение $p(u_\lambda(t), x) = 0$, $t \in I$ также имеет ровно n различных непрерывных решений, близких (равномерно на [0,1]) к решениям уравнения $p(u(t), x) = 0, t \in I$.

Пусть $\hat{u}(t) = (\hat{s}(t), \hat{x}(t)), t \in I$. Из определения накрытия π имеем $u(t) = \pi \circ \hat{u}(t) = \hat{s}(t), t \in I$, то есть $\hat{u}(t) = (u(t), \hat{x}(t)), t \in I$, и, в частности, $w_i = \hat{u}(t_i) = (u(t_i), \hat{x}(t_i)) = (s_0, \hat{x}(t_i)), i = \overline{0, k-1}$. Так как $\hat{u}(t) \subset \Delta^*_p, t \in I$ то из определения множества Δ^*_p получаем, что

$$\hat{x}^n(t) + f_1(u(t))\hat{x}^{n-1}(t) + ... + f_n(u(t)) = 0, t \in I,$$

то есть функция $\hat{x}(t)$ является одним из решений уравнения $p(u(t), x) = 0$. Поэтому, согласно лемме 4.3, при $\lambda > \lambda_{\varepsilon(\delta)}$ среди решений уравнения $p(u_\lambda(t), x) = 0$ найдется $\hat{x}_\lambda(t)$, такое что

$$||\hat{x}_\lambda - \hat{x}||_{C(I)} < \delta, \tag{4.7}$$

где

$$\delta < \min_{1\leq i<j\leq k-1} |\hat{x}(t_i) - \hat{x}(t_j)|/2, \tag{4.8}$$

с $w_i = (s_0, \hat{x}(t_i)), i = \overline{0, k-1}$. Так как кривая u аналитическая, то аналитической является и кривая u_λ, следовательно из соотношения $u_\lambda = \pi(u_\lambda, \hat{x}_\lambda)$ получаем, что аналитической будет также кривая $\hat{u}_\lambda : I \to \Delta^*_p$ с $\hat{u}_\lambda(t) = (u_\lambda(t), \hat{x}_\lambda(t)), t \in I$.

По построению имеем $u_\lambda(t_i) = s_\lambda^0 u(t_i) = s_0^{-1} s_\lambda s_0 = s_\lambda, i = \overline{0, k-1}$. Таким образом, точки $\hat{u}_\lambda(t_i) = (s_\lambda, \hat{x}_\lambda(t_i)), i = \overline{0, k-1}$ лежат на кривой $\hat{u}_\lambda(I)$. Так как $\pi(\hat{u}_\lambda(t_0)) = s_\lambda = \pi(w_\lambda)$ и $w_\lambda \to w_0 = (s_0, \hat{x}(t_0))$, $s_\lambda \to s_0$, то выбирая δ в (4.7) достаточно маленьким а λ достаточно большим ($\lambda > \lambda_0 > \max\{\lambda_1, \lambda_{\varepsilon(\delta)}\}$), получим что $w_\lambda = \hat{u}_\lambda(t_0)$. Кроме того, используя (4.7) и (4.8), для $i \neq j$ получаем $|\hat{x}_\lambda(t_i) - \hat{x}_\lambda(t_j)| = |(\hat{x}(t_i) - \hat{x}(t_j)) - (\hat{x}(t_i) - \hat{x}_\lambda(t_i)) - (\hat{x}_\lambda(t_j) - \hat{x}(t_j))| \geq |(\hat{x}(t_i) - \hat{x}(t_j))| - |(\hat{x}(t_i) - \hat{x}_\lambda(t_i))| - |\hat{x}_\lambda(t_j) - \hat{x}(t_j)| > 2\delta - \delta - \delta = 0$, то есть $\hat{x}_\lambda(t_i) \neq \hat{x}_\lambda(t_j)$, и, следовательно, $\hat{u}_\lambda(t_i) \neq \hat{u}_\lambda(t_j), i \neq j$. Таким образом, мы построили аналитическую кривую $\hat{u}_\lambda$ в Δ_p^*, для которой $\hat{u}_\lambda(0) = \hat{u}_\lambda(t_0) = w_\lambda$, $\pi(\hat{u}_\lambda(t_i)) = s_\lambda, i = \overline{0, k-1}$, и $\hat{u}_\lambda(t_i) \neq \hat{u}_\lambda(t_j), i \neq j$. Это означает, что у w_λ есть минимум k эквивалентных точек $\hat{u}_\lambda(t_i), i = \overline{0, k-1}$, то есть $\nu(w_\lambda) \geq k = \nu(w_0)$. Теорема 4.1 доказана. □

Следствие 4.1. *Функция $\nu : \Delta_p^* \to \mathbb{Z}_+$ локально постоянна на Δ_p^*.*

Abstract. In this paper we introduce the notions of an analytic curve and equivalent points on the Bohr-Riemann surfaces. By means of constructive and algebraic methods we prove that the points of the Bohr-Riemann surfaces locally have the same number of equivalent points.

Список литературы

[1] А. Ф. Бекназарян, С. А. Григорян, "О поверхностях Бора-Римана", Известия НАН Армении, сер. Математика, **49**, no. 5, 76 – 88 (2014).

[2] R. Arens, I. M. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., **81**, no. 2, 379 – 393 (1956) .

[3] С. А. Григорян, "Обобщенные аналитические функции", Успехи Мат. Наук, **49**, вып. 2, 3 – 43 (1994).

[4] С. А. Григорян, "Дивизор обобщенной аналитической функции", Матем. заметки, **61**, вып. 5, 655 – 661 (1997).

[5] О. Форстер, Римановы Поверхности, М., Мир (1980).

[6] S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, A. V. Kazantsev, "Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups", Lobachevskii Journal of Mathematics, **6**, 39 – 46 (2000).

[7] S. A. Grigorian, R. N. Gumerov, "On the structure of finite coverings of compact connected groups", Topology and Its Applications, **153**, 3598 – 3614 (2006).

[8] Р. Н. Гумеров, "Многочлены Вейерштрасса и накрытия компактных групп", Сиб. матем. журн., **54**, вып. 2, 320 – 324 (2013).

[9] С. Моррис, "Двойственность Понтрягина и Строение Локально Компактных Абелевых Групп, М., Мир (1980).

[10] Р. Энгелькинг, Общая Топология, М., Мир (1986).

Поступила 8 апреля 2014