Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 6, 2014, стр. 83-108.

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В $\mathbb{R}^2$

Г. А. КАРАГУЛЯН, Д. А. КАРАГУЛЯН

Ереванский государственный университет, Армения
Институт Математики НАН Армении, Армения, Ереван
E-mails: *g.karagulyan@yahoo.com*; *davidkar89@yahoo.com*

Аннотация. В настоящей работе рассматривается вопрос характеризации множеств точек недифференцируемости интегралов по базисам прямоугольников и квадратов. В частности, дана полная характеризация множеств неопределенностей для интегралов функций из $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \le p \le \infty$, по базису квадратов.

MSC2010 numbers: 42B25; 32A40.

Keywords: множество расходимости; дифференцирование интегралов; множество типа $G_{\delta\sigma}$.

1. Введение

Вопросы характеризации экстремальных множеств актуальны во многих направлениях математического анализа. Экстремальные множества часто встречаются в теории ортогональных рядов и в исследованиях граничных поведений аналитических и гармонических функций. Этим вопросам посвящены много работ. Задачи характеризации множеств точек расходимости тригонометрических рядов рассматривались в работах [4, 5, 19, 10, 26, 27, 34]. Аналогичные вопросы для рядов по другим классическим ортогональным систем были рассмотрены в [2, 3, 6, 12, 14, 15, 21, 23, 30, 31]. Подробный обзор некоторых из этих результатов можно найти в статьях П. Л. Ульянова [28, 29]. Характеризациям предельных множеств аналитических функций посвящена монография Э. Коллингвуда и А. Ловатера [17].

Первоисточником для многих этих исследований является следующее утверждение.

Теорема A. [Хан-Серпинский, [8, 25]] *Для того, чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством расходимости (неограниченной расходимости) некоторой последовательности непрерывных функций на $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством $G_{\delta\sigma}(G_\delta)$.*

Одними из редких результатов, дающих полные характеризации экстремальных множеств являются следующие теоремы.

Теорема B. [Колесников [18], 1994] *Для того, чтобы множество $E \subset \mathbb{T}$ было множеством радиальной расходимости некоторой аналитической в единичном круге функции, необходимо и достаточно, чтобы E было бы объединением двух множеств, одно из которых G_δ, а другое – нуль множество типа $G_{\delta\sigma}$.*

Теорема C. [Загорский [33], 1946] *Для того чтобы множество $E \subset \mathbb{R}$ было множеством недифференцируемости некоторой непрерывной на $\mathbb{R}$ функции, необходимо и достаточно, что E было объединением множества типа G_δ и множества типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль.*

В работах [11, 13] установлены общие теоремы характеризации экстремальных множеств последовательностей операторов со свойством локализации, из которых, в частности, следуют некоторые результаты, упомянутых выше работ. С помощью этих теорем, получены также полные характеризации множеств точек расходимости (C, α) средних рядов Фурье по классическим ортонормированным системам, а также обычных частичных сумм рядов Хаара и Франклина.

В настоящей работе рассматривается вопрос характеризации множеств точек недифференцируемости интегралов функций из $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \le p \le \infty$. Пусть $\mathfrak{R}$ есть множество всех полуоткрытых прямоугольников (декартовы произведения двух интервалов вида $[a, b)$) в $\mathbb{R}^2$, а через $\mathfrak{Q}$ обозначим множество полуоткрытых квадратов на $\mathbb{R}^2$. Очевидно имеем $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{R}$. Длину большей стороны прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ обозначим через $\operatorname{diam}(R)$. Пусть $\mathfrak{M}$ есть один из базисов $\mathfrak{R}$ или $\mathfrak{Q}$. Для произвольной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ определим

$$\delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = \limsup_{\operatorname{diam}(R)\to 0:\, x\in R\in\mathfrak{M}} \left| \frac{1}{|R|} \int_R f(t)dt - f(x) \right| .$$

Говорят, что интеграл функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ в точке $x \in \mathbb{R}^2$ дифференцируем по базису $\mathfrak{M}$, если $\delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = 0$. Известны следующие классические теоремы о дифференцировании интегралов (см. [7]).

Теорема D. [Лебег, [20]] *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, то $\delta_{\mathfrak{Q}}(x, f) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$.*

Теорема E. [Йессен-Марцинкевич-Зигмунд, [9]] *Если $f \in L(1 + \log L)(\mathbb{R}^2)$, то $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^2$.*

Отметим, что класс $L(1 + \log L)(\mathbb{R}^2)$ представляет собою множество функций $f(x)$, удовлетворяющие условию

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(t)| \left(1 + \log^+ |f(t)|\right) dt < \infty,$$

и имеем
$$L^1(\mathbb{R}^2) \supset L(1+\log L)(\mathbb{R}^2) \supset L^p(\mathbb{R}^2), \quad 1 < p < \infty.$$
Согласно теореме E получаем, что интегралы функций класса $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 < p \leq \infty$, дифференцируемы почти всюду по базису $\mathfrak{R}$.

Теорема F. [Безикович, [1]] *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) < \infty$ на некотором множестве $E \subset \mathbb{R}^2$, то $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = 0$ почти всюду на E.*

Теорема G. [Сакс, [24]] *Существует функция $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, для которой $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty$ всюду на $\mathbb{R}^2$.*

Определение 1.1. *Множества*
$$C_{\mathfrak{M}}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = 0\},$$
$$B_{\mathfrak{M}}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < \delta_{\mathfrak{M}}(x, f) < \infty\},$$
$$U_{\mathfrak{M}}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathfrak{M}}(x, f) = \infty\}$$
назовем, соответственно, C, B и U множествами функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса $\mathfrak{M}$ (равного $\mathfrak{R}$ или Ω).

Следующие теоремы дают характеризации U, B и C множеств в некоторых пространствах $L^p(\mathbb{R}^2)$ по базисам $\mathfrak{R}$ и Ω.

Теорема 1.1. *Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было U-множеством некоторой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса $\mathfrak{R}$, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ.*

Теорема 1.2. *Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было B-множеством некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, относительно базиса Ω, необходимо и достаточно, чтобы оно было $G_{\delta\sigma}$-множеством меры нуль.*

Теорема 1.3. *Для того чтобы $E \subset \mathbb{R}^2$ было U-множеством некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$, относительно базиса Ω, необходимо и достаточно, чтобы оно было G_δ-множеством меры нуль.*

В теореме 1.3 случай $p = \infty$ не рассматривается, так как из $f \in L^\infty$ следует $U_\Omega(f) = \varnothing$. Из теорем 1.2 и 1.3 получаем следующий результат.

Следствие 1.1. *Для того, чтобы попарно непересекающиеся множества E_1, E_2, $E_3 \subset \mathbb{R}^2$ с $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \mathbb{R}^2$ являлись бы соответственно U, B и C множествами некоторой функции $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$, относительно базиса Ω,* *необходимо и достаточно, чтобы $|E_1| = |E_2| = 0$, E_1 имело тип G_δ, а E_2 было множеством $G_{\delta\sigma}$.*

Следствие 1.2. *Для того, чтобы попарно непересекающиеся множества E_1, E_2, $E_3 \subset \mathbb{R}^2$ являлись соответственно U, B и C множествами некоторой функции $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ относительно базиса Ω, необходимо и достаточно, чтобы $E_1 = \varnothing$, E_2 было $G_{\delta\sigma}$ множеством меры нуль.*

2. Развиения и ключевые функции

Через $\mathfrak{R}_d$ и Ω_d обозначим соответственно семейства двоичных прямоугольников и квадратов. Имеем $\mathfrak{R}_d \subset \mathfrak{R}$ и $\Omega_d \subset \Omega$. Через $\overline{E}$ и $\dot{E}$ обозначим соответственно замыкание и внутренность множества $E \subset \mathbb{R}^2$. Множество $E \subset \mathbb{R}^2$ называется множеством типа G_δ если оно представимо в виде счетного пересечения открытых множеств, а счетные объединения множеств типа G_δ называются $G_{\delta\sigma}$ множествами.

Определение 2.1. *Семейства A и B двоичных прямоугольников из $\mathfrak{R}_d$ обладают соотношением $A \preceq B$, если для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется одно из условий $a \subset b$ или $a \cap b = \varnothing$. При этом если A состоит из единственного элемента a, то это соотношение можно записывать $a \preceq B$.*

Определение 2.2. *Семейство двоичных прямоугольников $A \subset \mathfrak{R}_d$ локально-конечно относительно некоторого открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2$, если любой компакт $K \subset G$ пересекается лишь с конечным числом элементов из A.*

Определение 2.3. *Семейство $\Omega \subset \Omega_d$ попарно непересекающихся двоичных квадратов назовем δ-разбиением открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2$, если оно локально-конечно относительно G и выполняются соотношения*

$$G = \bigcup_{\omega\in\Omega} \omega,$$

$$\delta > \frac{\operatorname{diam}(\omega)}{\operatorname{dist}(\omega, G^c)} \to 0, \text{ при } \operatorname{diam}(\omega) \to 0, \quad \omega \in \Omega. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Если $\delta > 0$, а $B \subset \mathfrak{R}_d$ есть любое семейство, локально-конечное относительно некоторого ограниченного открытого множества $G \subset \mathbb{R}^2$, то существует δ-разбиение Ω множества G, такое, что $\Omega \preceq B$.*

Доказательство. Пусть A_k, $k = 1, 2 \ldots$, есть семейство всевозможных двоичных квадратов, длины сторон которых равны 2^{-k} и выполняются соотношения

$$\omega \preceq B, \quad \operatorname{diam}(\omega) < \frac{\delta \cdot \operatorname{dist}(\omega, G^c)}{k}, \quad \omega \in A_k.$$

Заметим, что A_k будет не пустым при $k > k_0$. Обозначим

$$A'_k = \left\{ \omega \in A_k : \omega \not\subset \bigcup_{\omega \in A_{k-1}} \omega \right\}, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Легко проверить, что семейство квадратов

$$\Omega = A_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} A'_k \right)$$

удовлетворяет условиям леммы. □

Для данного квадрата $\omega \in \Omega$ определим пирамидообразную функцию

$$\lambda_\omega(x) = \operatorname{dist}(x, \omega^c), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

которая очевидно является непрерывной. Рассматриваются функции

$$u(x,n) = 3 \cdot (n+1) 2^{n-2} \big(\lambda_{[0,2^{-n}) \times [0,2^{-n})}(x) + \lambda_{[1/2,1/2+2^{-n}) \times [1/2,1/2+2^{-n})}(x)$$

$$- \lambda_{[0,2^{-n}) \times [1/2,1/2+2^{-n})}(x) - \lambda_{[1/2,1/2+2^{-n}) \times [0,2^{-n})}(x) \big), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$v(x) = \lambda_{[0,1/2) \times [0,1/2)}(x) + \lambda_{[1/2,1) \times [1/2,1)}(x) - \lambda_{[0,1/2) \times [1/2,1)}(x) - \lambda_{[1/2,1) \times [0,1/2)}(x).$$

Определим четыре множества

$$E_{ij}(n) = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{i}{2}, \frac{i}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} \right] \times \left[\frac{j}{2}, \frac{j}{2} + \frac{1}{2^{n-k}} \right], \quad i, j = 0, 1, \tag{2.2}$$

и обозначим

$$E(n) = E_{00}(n) \cup E_{01}(n) \cup E_{10}(n) \cup E_{11}(n). \tag{2.3}$$

Пусть $\omega \in \Omega$ есть произвольный квадрат, а ϕ_ω линейное преобразование в $\mathbb{R}^2$, отображающее ω на единичный квадрат $[0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Обозначим

$$u_\omega(x,n) = u(\phi_\omega(x), n), \quad v_\omega(x) = v(\phi_\omega(x)), \quad E_\omega(n) = (\phi_\omega)^{-1}(E(n)).$$

Простые вычисления показывают, что

$$\|u_\omega(x,n)\|_1 = |E_\omega(n)| = |E(n)||\omega| = \frac{n+1}{2^n}|\omega|, \quad \|v_\omega(x)\|_1 = |\omega|/3. \tag{2.4}$$

Далее, заметим, что если $\omega \in \Omega_d$ есть двоичный прямоугольник, то для любой точки $x \in E_\omega(n)$ существует двоичный прямоугольник $R(x)$ для которого имеем

$$\frac{1}{|R(x)|}\left|\int_{R(x)} u_\omega(x,n)dx\right| = \frac{n+1}{2}, \quad x \in R(x) \subset E_\omega(n), \tag{2.5}$$

и этот прямоугольник совпадает с одним из прямоугольников, участвующих в объединениях (2.2). Аналогично, если вновь $\omega \in \Omega_d$, то

$$\frac{1}{|R(x)|}\left|\int_{R(x)} v_\omega(x)dx\right| = \frac{1}{3}, \quad x \in R(x) \subset \omega \tag{2.6}$$

для некоторого квадрата $R(x)$ с $|R(x)| = |\omega|/4$. На этот раз $R(x)$ просто совпадает с одним из четырех квадратов, составляющих ω. При этом отметим, что в обоих случаях $R(x)$ выбирается из конечного набора прямоугольников.

3. Доказательство теоремы 1.1

Для данного прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ обозначим через $\operatorname{vert}(R)$ множество четырех вершин прямоугольника R.

Лемма 3.1. *Если $Q \in \Omega$ и функция $f(x) = f(x_1, x_2) \in L(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условиям $\operatorname{supp} f(x) \subset Q$ и*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x_1,t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t,x_2)dt = 0, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

то для любого прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ с условием $Q \cap \operatorname{vert}(R) = \varnothing$ имеем

$$\int_R f(x)dx = 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Если $R \cap Q = \varnothing$, то (3.2) тривиально. Предположим, что

$$Q = [\alpha_1, \beta_1) \times [\alpha_2, \beta_2), \quad R = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2).$$

С учетом условия $Q \cap \operatorname{vert}(R) = \varnothing$, остается лишь рассмотреть случаи $[\alpha_1, \beta_1) \subset [a_1, b_1)$ или $[\alpha_2, \beta_2) \subset [a_2, b_2)$. Если имеем первое соотношение, то с учетом (3.1), легко усмотреть, что

$$\begin{aligned}\int_R f(x)dx &= \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_{a_2}^{b_2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x_1,x_2)dx_1dx_2\\ &= \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2)dx_1\right)dx_2 = 0.\end{aligned}$$

Второй случай рассматривается аналогичным образом. □

Лемма 3.2. *Если $Q \in \Omega$ и функция $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условию*

$$\operatorname{supp} f \subset Q, \tag{3.3}$$

то для любого прямоугольника $R \in \mathfrak{R}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(x)|dx \le \frac{\|f\|_\infty \cdot \operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(R)}.$$

Доказательство. Покажем неравенство

$$\frac{|Q\cap R|}{|R|} \le \frac{\operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(R)}. \tag{3.4}$$

Параллельным переносом квадрат Q можно переставить так, чтобы его вершина совпадала бы с одной из вершин прямоугольника. Заметим, что тогда величина $|Q\cap R|$ принимает наибольшее значение, а все остальные величины в неравенстве (3.4) сохраняются. Поэтому без потери общности можно рассматривать только следующие случаи взаимного расположения Q и R (см. Рис. 1).

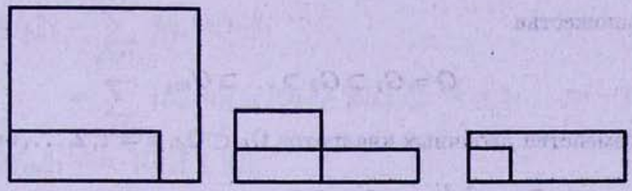

Рис. 1

Пусть сторона квадрата равна c, а стороны прямоугольника равны a, b ($a \le b$). В первом случае имеем

$$\frac{|Q\cap R|}{|R|} = 1 \le \frac{c}{b} = \frac{\operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(R)},$$

во втором имеем

$$\frac{|Q\cap R|}{|R|} = \frac{a\cdot c}{a\cdot b} = \frac{c}{b} = \frac{\operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(R)},$$

а в третьем случае

$$\frac{|Q\cap R|}{|R|} = \frac{c^2}{a\cdot b} \le \frac{c}{b} = \frac{\operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(R)}.$$

Из (3.3) и (3.4) вытекает

$$\frac{1}{|R|}\int_R |f(x)|dx \le \frac{\|f\|_\infty |Q\cap R|}{|R|} \le \frac{\|f\|_\infty \cdot \operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(R)}.$$

□

Лемма 3.3. *Если $L > 1$, а $Q \in \Omega_d$ есть произвольный двоичный квадрат, то существует функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и число $c(L) > 0$ такие, что*

$$\operatorname{supp} f \subset Q, \tag{3.5}$$

$$\|f\|_\infty \le c(L), \tag{3.6}$$

$$\|f\|_1 \le 2|Q|, \tag{3.7}$$

$$\int_R f(x)dx = 0, \quad R \in \mathfrak{R}, \quad Q \cap \operatorname{vert}(R) = \varnothing, \tag{3.8}$$

и для любой точки $x \in Q$ существует двоичный прямоугольник $R(x) \subset Q$ такой, что

$$\frac{1}{|R(x)|}\left|\int_{R(x)} f(t)dt\right| \ge L, \quad x \in Q, \tag{3.9}$$

при этом семейство $\{R(x) : x \in Q\}$ состоит из конечного числа элементов.

Доказательство. Пусть $n = [3L] + 1$ и m есть некоторое натуральное число. Определим множества

$$Q = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_m, \tag{3.10}$$

и конечные семейства двоичных квадратов $\Omega_k \subset \Omega_d$, $k = 1, 2, \ldots, m$, такие, что

$$G_k = \bigcup_{\omega \in \Omega_k} \omega, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.11}$$

$$G_k = G_{k-1} \setminus \bigcup_{\omega \in \Omega_{k-1}} E_\omega(n), \quad k = 2, \ldots, m, \tag{3.12}$$

где множества $E_\omega(n)$ определены в (2.3). Воспользуемся математической индукцией. В качестве первого шага возьмем просто $G_1 = Q$ и $\Omega_1 = \{Q\}$. Ясно, что условия (3.10) – (3.12) выполняются. Предположим, что уже определены множества G_k и семейства Ω_k при $k = 1, 2, \ldots, p$, удовлетворяющие условиям (3.10)-(3.12). Определим множество

$$G_{p+1} = G_p \setminus \bigcup_{\omega \in \Omega_p} E_\omega(n).$$

Очевидно, оно представимо в виде конечного объединения двоичных квадратов, составляющих Ω_{p+1}. В итоге получаем

$$G_{p+1} = \bigcup_{\omega \in \Omega_{p+1}} \omega.$$

Очевидно G_{p+1} и Ω_{p+1} удовлетворяют условиям (3.10)-(3.12) при $k = p+1$. Учитывая (2.4), (3.11) и (3.12), имеем

$$|G_k| = |G_{k-1}| - \left|\bigcup_{\omega\in\Omega_{k-1}} E_\omega(n)\right| = |G_{k-1}| - \frac{n+1}{2^n}|G_{k-1}| = \left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right)|G_{k-1}|$$

и, следовательно, получаем

$$|G_m| = \left(1 - \frac{n+1}{2^n}\right)^m |Q| < \frac{|Q|}{n}, \tag{3.13}$$

при достаточно большом $m = m(n)$. Обозначим

$$f_k(x) = \sum_{\omega\in\Omega_k} u_\omega(x,n), \quad k = 1,2,\dots,m-1, \tag{3.14}$$

$$f_m(x) = n\sum_{\omega\in\Omega_m} v_\omega(x). \tag{3.15}$$

Учитывая (2.4), (3.11) – (3.15), легко проверить, что

$$\operatorname{supp} f_k \subset G_k \setminus G_{k+1} = \bigcup_{\omega\in\Omega_k} E_\omega(n), \quad k = 1,2,\dots,m, \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned}\|f_k\|_1 &= \sum_{\omega\in\Omega_k} \|a_\omega(x,n)\|_1 \\ &= \sum_{\omega\in\Omega_k} |E_\omega(n)| = |G_k| - |G_{k+1}|, \quad k = 1,\dots,m-1,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\|f_m\|_1 = n\cdot|G_m| \le |Q|, \tag{3.18}$$

$$\|f_k\|_\infty = 3(n+1)2^{n-2} = c(L). \tag{3.19}$$

Определим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x).$$

Очевидно $f \in C(\mathbb{R}^2)$ и имеют место (3.5) и (3.6). Далее, с учетом (3.10), (3.17) и (3.18), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|dt = \sum_{k=1}^{m-1}(|G_k| - |G_{k+1}|) + |Q| = 2|Q| - |G_m| \le 2|Q|,$$

откуда следует (3.7). Условие (3.8) немедленно следует из леммы 3.2. Чтобы показать (3.9), возьмем любую точку $x \in Q$. Имеем $x \in G_k \setminus G_{k+1}$ при некотором $k = 1,2,\dots,m$, где предполагается $G_{m+1} = \varnothing$. Из (3.16) получаем, что $x \in E_\omega(n)$ для некоторого квадрата $\omega \in \Omega_k$. Если $k < m$, то согласно (2.5) существует прямоугольник $R = R(x)$, $x \in R \subset E_\omega(n)$, такой что

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f(t)dt\right| = \frac{1}{|R|}\left|\int_R a_\omega(t,n)dt\right| = \frac{n+1}{2} > L.$$

Если же $k = m$, то из (2.6) вытекает

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f(t)dt\right| = \frac{n}{|R|}\left|\int_R b_\omega(t)dt\right| = \frac{n}{3} > L$$

для некоторого квадрата $R = R(x)$, $x \in R \subset \omega$. При этом семейство $\{R(x),\ x \in Q\}$ составляет конечный набор. □

Лемма 3.4. *Если $G \subset \mathbb{R}^2$–ограниченное открытое множество, а семейство двоичных прямоугольников $A \subset \mathfrak{R}_d$ локально-конечно относительно G, то для любых чисел $L > 1$, $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ такая, что*

$$\operatorname{supp} f \subset G, \tag{3.20}$$

$$\|f\|_1 \le 1, \tag{3.21}$$

$$\int_R f(x)dx = 0, \quad R \in A, \tag{3.22}$$

$$\delta_{\mathfrak{R}}(f,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.23}$$

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f(x)dx\right| < \varepsilon, \quad R \in \mathfrak{R},\ R \not\subset G, \tag{3.24}$$

и для любой точки $x \in G$ существует двоичный прямоугольник $R = R(x) \subset G$, такой что

$$\frac{1}{|R(x)|}\left|\int_{R(x)} f(t)dt\right| \ge L, \quad x \in R(x) \subset G, \tag{3.25}$$

при этом семейство $\{R(x) : x \in G\}$ локально-конечно относительно G.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ есть некоторое число. Согласно лемме 2.1 существует δ-разбиение Ω для множества G, такое что

$$\Omega \preceq A. \tag{3.26}$$

Применив лемму 3.3 над каждым квадратом $Q \in \Omega$, мы получим функции $f_Q(x)$, $Q \in \Omega$, удовлетворяющие условиям (3.5)-(3.9). Обозначим

$$f(x) = \frac{1}{2|G|}\sum_{Q\in\Omega} f_Q(x). \tag{3.27}$$

Ясно, что имеет место (3.20) и

$$\|f\|_\infty \le \frac{c(L)}{2|G|}. \tag{3.28}$$

Далее, в силу (3.7) (для функций f_Q), имеем

$$\|f\|_1 \le \frac{1}{2|G|}\sum_{Q\in\Omega}\|f_Q\|_1 \le \frac{1}{2|G|}\sum_{Q\in\Omega} 2|Q| = 1,$$

и получим (3.21). Из (3.8), в частности, имеем

$$\int_Q f_Q(t)dt = 0. \tag{3.29}$$

Из условия (3.26) следует, что для любых $R \in A$ и $Q \in \Omega$ имеем $Q \subset R$ или $Q \cap R = \varnothing$, и поэтому, с учетом (3.29), получаем

$$\int_R f_Q(x)dx = 0, \quad Q \in \Omega,$$

откуда следует (3.22). Если $x \in G$, то $x \in Q$ при некотором $Q \in \Omega$. Согласно (3.9), существует прямоугольник $R = R(x) \subset Q$, удовлетворяющий условию

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f_Q(t)dt\right| \geq 2L|G|.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f(t)dt\right| = \frac{1}{2|G||R|}\left|\int_R f_Q(t)dt\right| \geq L,$$

которое дает (3.25). Согласно лемме 3.3 семейство $\{R(x) : x \in Q\}$ состоит из конечного числа прямоугольников. С учетом (3.26), легко заметить, что $\{R(x) : x \in G\}$ будет локально-конечным относительно G. Теперь рассмотрим любые $Q \in \Omega$ и $R \in \mathfrak{R}$. Если имеет место $Q \cap \operatorname{vert}(R) = \varnothing$, то согласно лемме 3.1, получим

$$\int_R f_Q(x)dx = 0.$$

Если же имеем

$$R \not\subset G, \quad Q \cap \operatorname{vert}(R) \neq \varnothing, \tag{3.30}$$

то легко усмотреть, что $\operatorname{diam}(R) \geq \operatorname{dist}(Q, G^c)/2$. Отсюда, применив лемму 3.2 и соотношения (2.1), (3.28), заключаем

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f_Q(x)dx\right| \leq \frac{\|f\|_\infty \cdot \operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{diam}(R)} \leq \frac{c(L)}{|G|} \cdot \frac{\operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{dist}(Q, G^c)} \to 0, \tag{3.31}$$

при $\operatorname{diam}(R) \to 0$. Отметим, что при фиксированном R количество таких квадратов $Q \in \Omega$, удовлетворяющих (3.30) не превосходит 4. Отсюда и из (3.27) вытекает

$$\begin{aligned}
\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) &= \lim_{\operatorname{diam}(R)\to 0:\, x\in R\in\mathfrak{R}} \frac{1}{|R|}\left|\int_R f(t)dt - f(x)\right| \\
&= \lim_{\operatorname{diam}(R)\to 0:\, x\in R\in\mathfrak{R}} \frac{1}{|R|}\left|\int_R f(t)dt\right| = 0, \quad x \in G^c,
\end{aligned}$$

т.е. имеет место (3.23) при $x \in G^c$. Если же $x \in G$, то любой прямоугольник R у которого величина $\operatorname{diam}(R)$ достаточно мала пересекается лишь конечным числом квадратов из Ω. С другой стороны, $\delta_{\mathfrak{R}}(x, f_Q) = 0$, так как каждая из f_Q является непрерывной функцией. Отсюда легко следует

$$\delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = 0, \quad x \in G,$$

и мы получаем (3.23). Аналогичными рассуждениями, при условиях (3.30), из (2.1) и (3.31) заключаем

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f(x)dx\right| \le 4 \cdot \frac{c(L)}{|G|} \cdot \frac{\operatorname{diam}(Q)}{\operatorname{dist}(Q, G^c)} \le \frac{4c(L)\delta}{|G|}, \tag{3.32}$$

которое дает (3.24) при достаточно малом δ. □

Доказательство теоремы 1.1. Необходимость: Для данной функции $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ рассмотрим множества

$$A_n(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \exists R \in \mathfrak{R},\, x \in R,\, \operatorname{diam}(R) < 1/n, \left|\frac{1}{|R|}\int_R f(t)dt\right| > n\right\},$$

которые очевидно являются открытыми. Докажем, что

$$A(f) = \bigcap_{n\ge1} A_n(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty\}. \tag{3.33}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} x \in A(f), &\Leftrightarrow x \in A_n(f), \text{ при любом } n = 1, 2, \ldots \\ &\Leftrightarrow \exists R_k \in \mathfrak{R},\, x \in R_k,\, \operatorname{diam}(R_k) \to 0, \left|\frac{1}{|R_k|}\int_{R_k} f(t)dt\right| \to \infty, \\ &\Leftrightarrow \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty. \end{aligned}$$

Из соотношения (3.33) вытекает, что $\{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_{\mathfrak{R}}(x, f) = \infty\}$ является множеством типа G_δ.

Достаточность: Пусть E есть некоторое множество типа G_δ. Сначала предположим, что $E \subset Q$, где Q есть некоторый квадрат. Тогда имеем

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

где, без ограничения общности, можно предполагать, что множества $G_k \subset 2Q$ и $G_{k+1} \subset G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Докажем, что существует последовательность функций $f_k \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, $k = 1, 2, \ldots$, для которых имеют место соотношения

$$\operatorname{supp} f_k \subset G_k, \quad \|f_k(t)\|_1 = 1, \tag{3.34}$$

$$\delta_{\mathfrak{R}}(x, f_k) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{3.35}$$

$$\frac{1}{|R|}\left|\int_R f_k(x)dx\right| < 2^{-k}, \quad R \in \mathfrak{R},\, R \not\subset G_k, \tag{3.36}$$

и для любой точки $x \in G_k$ существует двоичный прямоугольник $R_k(x)$, такой что

$$\frac{1}{|R_k(x)|}\left|\int_{R_k(x)} f_k(t)dt\right| \geq 2^k + \sum_{j=1}^{k-1}\|f_j\|_\infty, \quad x \in R_k(x) \subset G_k, \quad k \geq 1, \tag{3.37}$$

$$\int_{R_j(x)} f_k(t)dt = 0, \quad x \in G_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{3.38}$$

при этом семейство $\{R_k(x) : x \in G_k\}$ является локально-конечным относительно G_k. Воспользуемся индукцией. Случай $k = 1$ вытекает из леммы 3.4 при $G = G_1$ и $A = \varnothing$. Предположим, что уже определены функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, p$ со свойствами (3.34)-(3.38). Обозначим

$$A = \bigcup_{k=1}^{p}\{R_k(x) : x \in G_k\}. \tag{3.39}$$

По предположению индукции, каждое из семейств $\{R_k(x) : x \in G_k\}$, $k = 1, 2, \ldots p$, является локально-конечным относительно G_k. Отсюда, очевидно, что множество прямоугольников A будет локально-конечным относительно G_{p+1}. Тогда применив лемму 3.4 для A определенного в (3.39) и

$$G = G_{p+1}, \quad \delta = 2^{-p-1}, \quad L = 2^{p+1} + \sum_{j=1}^{p}\|f_j\|_\infty,$$

можно определить функцию $f_{p+1}(x)$, удовлетворяющую условиям леммы 3.4. Обозначим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Возьмем любую точку $x \in E$. Имеем $x \in G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $R_k(x)$ есть последовательность прямоугольников, удовлетворяющих условиям (3.37) и (3.38). Имеем

$$\frac{1}{|R_k(x)|}\left|\int_{R_k(x)} f(t)dt\right| = \frac{1}{|R_k(x)|}\left|\int_{R_k(x)} \sum_{j=1}^{k} f_j(t)dt\right|$$

$$\geq \frac{1}{|R_k(x)|}\left|\int_{R_k(x)} f_k(t)dt\right| - \sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{|R_k(x)|}\left|\int_{R_k(x)} f_j(t)dt\right|$$

$$\geq \frac{1}{|R_k(x)|}\left|\int_{R_k(x)} f_k(t)dt\right| - \sum_{j=1}^{k-1}\|f_j\|_\infty \geq 2^k,$$

и следовательно $\delta_{\mathfrak{R}}(x,f)=\infty$. Теперь предположим, что $x\in E^c$. Тогда имеем $x\in G_{k-1}\setminus G_k$ при некотором $k=1,2,\ldots$, где предполагается $G_0=\mathbb{R}$ и имеем

$$f_j(x)=0,\quad j\geq k. \tag{3.40}$$

Если $m\geq k$, то, с учетом (3.35), (3.36) и (3.40), получаем

$$\begin{aligned}\delta_{\mathfrak{R}}(x,f)=\delta_{\mathfrak{R}}\left(x,\sum_{j=m}^{\infty}f_j\right)&\leq\limsup_{\operatorname{diam}(R)\to 0,\, x\in R\in\mathfrak{R}}\sum_{j=m}^{\infty}\left|\frac{1}{|R|}\int_R f_j(t)dt-f_j(x)\right|\\&=\limsup_{\operatorname{diam}(R)\to 0,\, x\in R\in\mathfrak{R}}\sum_{j=m}^{\infty}\left|\frac{1}{|R|}\int_R f_j(t)dt\right|\leq\sum_{j=m}^{\infty}2^{-j}.\end{aligned}$$

Так как $m\in\mathbb{R}$–произвольное число, то отсюда получаем $\delta_{\mathfrak{R}}(x,f)=0$, что и доказывает достаточность в случае когда E содержится в некотором квадрате Q. Дополнительно отметим, что построенная функция f удовлетворяет условию $\operatorname{supp}f\subset 2Q$. Теперь предположим, что E есть произвольное множество типа G_δ. Пусть Q_k есть последовательность квадратов с

$$\operatorname{diam}(Q_k)=1,\quad \cup_k Q_k=\mathbb{R}^2.$$

Очевидно, что каждое множество $E_k=E\cap Q_k$ имеет тип G_δ. Применив доказанное для каждого множества E_k, найдем функции $F_k(x)$, с условиями

$$\operatorname{supp}F_k\subset 2Q_k,\quad \delta_{\mathfrak{R}}(x,F_k)=0,\quad x\in(E_k)^c,\quad \delta_{\mathfrak{R}}(x,F_k)=\infty,\quad x\in E_k.$$

Функция

$$F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(x)$$

будет искомой. Действительно, если $x\in E^c$, то имеем

$$\lim_{\operatorname{diam}(R)\to 0,\, x\in R\in\mathfrak{R}}\frac{1}{|R|}\int_R F_k(t)dt=F_k(x),\quad k=1,2,\ldots.$$

Так как каждый прямоугольник $R\in\mathfrak{R}$ пересекается лишь с конечным числом квадратов $2Q_k$, то получим

$$\lim_{\operatorname{diam}(R)\to 0,\, x\in R\in\mathfrak{R}}\frac{1}{|R|}\int_R F(t)dt=\sum_k\lim_{\operatorname{diam}(R)\to 0,\, x\in R\in\mathfrak{R}}\frac{1}{|R|}\int_R F_k(t)dt=F(x).$$

Если же $x\in E$, то имеем $x\in E_k$, при некотором k и $x\notin E_j$, $j\neq k$. Отсюда, аналогичным образом, легко получить $\delta_{\mathfrak{R}}(x,F)=\infty$. Теорема 1.1 доказана. $\square$

4. Доказательства теорем 1.2 и 1.3

Для измеримого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ обозначим

$$\lambda(A) = A \cup \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_\Omega(x, \mathbb{I}_A) > 0\right\}.$$

Так как по теореме D имеем $\delta_\Omega(x, \mathbb{I}_A) = 0$ п.в., то получим

$$|\lambda(A) \setminus A| = 0. \tag{4.1}$$

Легко проверить также следующие свойства

$$\lambda(A \cup B) \subset \lambda(A) \cup \lambda(B), \tag{4.2}$$

$$\lambda(A) \subset \lambda(B), \text{ при } A \subset B. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Если $\delta > 0$, G есть открытое множество, а $E \subset G$ имеет меру нуль, то существует открытое множество U такое, что*

$$E \subset U \subset G, \tag{4.4}$$

$$|Q \cap U| < \delta|Q|, \quad Q \in \Omega, \quad \overline{Q} \not\subset G, \tag{4.5}$$

$$\lambda(U) \subset G. \tag{4.6}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.1, существует разбиение Ω множества G, такое, что

$$\frac{1}{5} > \frac{\operatorname{diam}(\omega)}{\operatorname{dist}(\omega, G^c)} \to 0, \text{ при } \operatorname{diam}(\omega) \to 0, \quad \omega \in \Omega. \tag{4.7}$$

Очевидно, можно выбрать открытое множество U такое, что

$$E \subset U, \quad |\omega \cap U| < \min\{\delta/4, \operatorname{dist}(\omega, G^c)\}|\omega|.$$

Пусть Q есть произвольный квадрат, такой что $\overline{Q} \not\subset G$. Тогда, если $\omega \in \Omega$ и $\omega \cap Q \neq \varnothing$, то согласно (4.7) имеем

$$\operatorname{diam}(\omega) < \frac{\operatorname{dist}(\omega, G^c)}{5} \le \frac{\sqrt{2} \cdot \operatorname{diam}(Q)}{5} < \frac{\operatorname{diam}(Q)}{2}.$$

Отсюда, с учетом соотношения $\omega \cap Q \neq \varnothing$, легко следует $\omega \subset 2Q$ и, следовательно, имеем

$$\operatorname{dist}(\omega, G^c) \le \sqrt{2} \cdot \operatorname{diam}(2Q) = 2\sqrt{2} \cdot \operatorname{diam}(Q) < 4 \cdot \operatorname{diam}(Q).$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
|Q\cap U| &\le \sum_{\omega\in\Omega:\,\omega\cap Q\neq\varnothing} |\omega\cap U|\\
&\le \sum_{\omega\in\Omega:\,\omega\cap Q\neq\varnothing} \min\{\delta/4, \operatorname{dist}(\omega, G^c)\}|\omega|\\
&\le \min\{\delta/4, 4\cdot\operatorname{diam}(Q)\} \sum_{\omega\in\Omega:\,\omega\cap Q\neq\varnothing} |\omega| \qquad (4.8)\\
&\le \min\{\delta/4, 4\cdot\operatorname{diam}(Q)\} \sum_{\omega\in\Omega:\,\omega\subset 2Q} |\omega|\\
&\le \min\{\delta, 4\cdot\operatorname{diam}(Q)\}|Q|,
\end{aligned}
$$

откуда немедленно следует (4.5). Чтобы установить (4.6) возьмем любую точку $x\in G^c$. Из (4.8) следует

$$\lim_{\operatorname{diam}(Q)\to 0:\, x\in Q\in\Omega} \frac{1}{|Q|}\int_Q \mathbb{I}_U(t)dt = \lim_{\operatorname{diam}(Q)\to 0:\, x\in Q\in\mathfrak{R}} \frac{|Q\cap U|}{|Q|} = 0,$$

и следовательно получим $\delta_\Omega(x, \mathbb{I}_U) = 0$ при $x\in G^c$. Это значит, что $\lambda(U)\subset G$. Лемма 4.1 доказана. □

Лемма 4.2. *Если $A\subset B\subset \mathbb{R}^2$ есть открытые множества, то существует открытое множество G, такое, что*

$$A\subset G\subset B, \tag{4.9}$$

$$|G| = \frac{|A|+|B|}{2}, \tag{4.10}$$

$$\lambda(G\setminus A)\subset B. \tag{4.11}$$

Доказательство. Если $|A| = |B|$, то возьмем $G = A$ и утверждение очевидно. Так что, предположим $|A| < |B|$. Пусть $\Omega = \{\omega_k\}$ есть произвольное разбиение множества B. Существует число $p\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=1}^{p} |\omega_k| > \frac{|A|+|B|}{2}. \tag{4.12}$$

Обозначим

$$G(t) = A\cup\left(\bigcup_{k=1}^{p}(t\mathring{\omega}_k)\right),\quad 0\le t\le 1, \tag{4.13}$$

и рассмотрим функцию $f(t) = |G(t)|$. Из (4.12) и (4.13) следует

$$f(0) = |A| < \frac{|A|+|B|}{2},\quad f(1) \ge \sum_{k=1}^{p}|\omega_k| > \frac{|A|+|B|}{2}.$$

Отсюда и из непрерывности $f(t)$ следует, что для некоторого $t_0 \in (01,1)$ имеет место равенство

$$|G(t_0)| = \frac{|A|+|B|}{2}.$$

Легко видеть, что $G = G(t_0)$ удовлетворяет условиям (4.9) и (4.10). Для проверки (4.11), заметим, что согласно (4.13) имеем соотношение

$$G \setminus A \subset \bigcup_{k=1}^{p} (t_0 \dot{\omega}_k),$$

из которого легко вытекает (4.11). □

Лемма 4.3. *Если $B \subset \mathbb{R}^2$ есть открытое, а $A \subset B$ измеримое множества, с $\lambda(A) \subset B$, то существует открытое множество $G \subset B$ такое, что*

$$\lambda(A) \subset G, \quad \lambda(G) \subset B, \quad |G| = \frac{|A|+|B|}{2}. \tag{4.14}$$

Доказательство. Так как $|\lambda(A) \setminus A| = 0$, то используя лемму 4.1, найдем открытое множество C такое, что $\lambda(A) \setminus A \subset C, \quad \lambda(C) \subset B$. Далее, согласно лемме 4.2, существует открытое множество G такое, что

$$A \cup C \subset G \subset B, \quad \lambda(G \setminus (A \cup C)) \subset B, \quad |G| = \frac{|A|+|B|}{2}.$$

Отсюда и из (4.1)-(4.3) получаем

$$\begin{aligned} &\lambda(A) \subset A \cup C \subset G, \\ &\lambda(G) \subset \lambda(G \setminus (A \cup C)) \cup \lambda(A \cup C) \\ &\qquad \subset \lambda(G \setminus (A \cup C)) \cup \lambda(A) \cup \lambda(C) \subset B. \end{aligned}$$

□

Рассмотрим семейство открытых множеств $\{G_r : r \in E\}$, где $E \subset \mathbb{R}$-некоторое множество индексов. Будем говорить, что это семейство является цепью, если $\lambda(G_r) \subset G_{r'}$ при любых $r, r' \in E$, с $r < r'$.

Лемма 4.4. *Если A и B-открытые множества в $\mathbb{R}^2$, с условиями $\lambda(A) \subset B$ и $\alpha = |A| < |B| = \beta$, то существует цепь открытых множеств*

$$G_r, \quad r \in \mathcal{D} = \left\{ \alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{2^k}, 0 \le i \le 2^k, k = 0, 1, \dots \right\}$$

такая, что

$$G_\alpha = A, G_\beta = B, \quad |G_r| = r, \quad r \in [\alpha, \beta]. \tag{4.15}$$

Доказательство. Определим $G_\alpha = A$, $G_\beta = B$ и применим лемму 4.3 для пары открытых множеств G_α, G_β. Этим определяется открытое множество $G = G_{(\alpha+\beta)/2}$, с условиями (4.14), что означает множества G_α, $G_{(\alpha+\beta)/2}$, G_β образуют цепь. Далее, продолжим рассуждения по индукции. Обозначим

$$\mathcal{D}_k[\alpha,\beta] = \left\{\alpha + \frac{i(\beta-\alpha)}{2^k},\ 0 \le i \le 2^k\right\},$$

и предположим, что уже выбраны множества G_r, для всех $r \in \mathcal{D}_k[\alpha,\beta]$, при этом они образуют цепь и $|G_r| = r$. Применив лемму 4.3 для каждой пары множеств $G_{i/2^k}$, $G_{(i+1)/2^k}$, получим множества $G_{(2i+1)/2^{k+1}}$, $0 \le i \le 2^k - 1$. Ясно, что полученное таким путем семейство $\{G_r,\ r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]\}$ тоже будет цепью. При этом сохраняется свойство $|G_r| = r$ теперь уже при $r \in \mathcal{D}_{k+1}[\alpha,\beta]$. В самом деле, имеем

$$|G_{(2i+1)/2^{k+1}}| = \frac{1}{2}(|G_{i/2^k}| + |G_{(i+1)/2^k}|) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{2^k} + \frac{i+1}{2^k}\right) = \frac{2i+1}{2^{k+1}}.$$

Продолжив этот процесс, получим семейство множеств G_r, определенных при всех $r \in \mathcal{D}$, которое будет цепью и $|G(r)| = r$. Лемма 4.4 доказана. □

Лемма 4.5. *Если $\varepsilon > 0$, $G \subset \mathbb{R}^2$ есть открытое множество, а $E \subset G$ имеет меру нуль, то существуют открытое множество A, с $E \subset A \subset G$, и функция $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, такие, что*

$$\operatorname{supp} h \subset G, \quad h(x) = 1,\ x \in A, \tag{4.16}$$

$$0 \le h(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q h(t)dt\right| \le \varepsilon, \quad Q \in \Omega, \quad \overline{Q} \not\subset G, \tag{4.18}$$

$$\delta_\Omega(x,h) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{4.19}$$

Доказательство. Применив лемму 4.1, получим открытое множество B с условиями

$$E \subset B \subset G, \tag{4.20}$$

$$|Q \cap B| < \varepsilon|Q|, \quad Q \in \Omega, \quad \overline{Q} \not\subset G, \tag{4.21}$$

$$\lambda(B) \subset G. \tag{4.22}$$

Далее, применив лемму 4.3, получим открытое множество A, с условиями $E \subset A$, $|A| < |B|$ и $\lambda(A) \subset B$. Пусть $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$. Согласно лемме 4.4, существует цепь открытых множеств $\{G(r) : r \in \mathcal{D}\}$, удовлетворяющая условиям

$$G_\alpha = A,\ G_\beta = B, \quad |G_r| = r.$$

Обозначим $\tau(x) = \inf\{r : x \in G_r\}$, $\quad x \in B \setminus A$. Отметим, что $\tau(x)$ отображает множество $B \setminus A$ в $[\alpha, \beta]$. Определим непрерывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in [0,\alpha], \\ 0 & \text{при} \quad x \in [\beta, 1], \\ & \text{линейна на} \quad [\alpha, \beta], \end{cases}$$

и функцию

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in A, \\ 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus B, \\ f(\tau(x)) & \text{при} \quad x \in B \setminus A. \end{cases} \tag{4.23}$$

Очевидно $\operatorname{supp} h(x) \subset B \subset G$ и выполняются условия (4.16) и (4.17). Из (4.21) следует

$$\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q h(t)dt\right| \le \frac{|Q \cap B|}{|Q|} < \varepsilon, \quad Q \in \Omega, \quad \overline{Q} \not\subset G$$

и получаем (4.18). Остается проверить условие (4.19). Рассмотрим функцию

$$p(x) = \mathbb{I}_{G_{r_0}}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f(r_k)\mathbb{I}_{G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k}}(x), \tag{4.24}$$

где числа $r_k \in \mathcal{D}$ удовлетворяют неравенству

$$\alpha = r_0 < r_1 < \ldots < r_m = \beta.$$

Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать r_k такими, что

$$|h(x) - p(x)| < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^2. \tag{4.25}$$

В самом деле, имеем

$$h(x) = p(x) = 1, \quad x \in G_\alpha, \tag{4.26}$$

$$h(x) = p(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus G_\beta. \tag{4.27}$$

Если же $x \in G_\beta \setminus G_\alpha$, то имеем $x \in G_{r_{k+1}} \setminus G_{r_k}$ при некотором $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда из определения отображения τ следует, что $r_k \le \tau(x) \le r_{k+1}$. Учитывая (4.23), получаем

$$\inf_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t) \le h(u) \le \sup_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t), \quad u \in G_{r_{i+1}} \setminus G_{r_i}. \tag{4.28}$$

Имеем также

$$\inf_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t) \le f(r_i) \le \sup_{t \in [r_i, r_{i+1}]} f(t). \tag{4.29}$$

Из непрерывности функции f следует, что при достаточно малом

$$\delta = \max_{0 \le i < m} (r_{i+1} - r_i)$$

имеем

$$\sup_{t,t'\in[r_i,r_{i+1}]} |f(t)-f(t')|<\varepsilon, \quad i=0,1,\dots,m-1. \tag{4.30}$$

Комбинируя (4.26)-(4.30), получаем (4.25). Из (4.25), (4.24) следует

$$\delta_\Omega(x,h)\le\delta_\Omega(x,h-p)+\delta_\Omega(x,p)\le\varepsilon+\delta_\Omega(x,p). \tag{4.31}$$

Для доказательства (4.19) рассмотрим три случая.

Случай 1: $x\in G_\alpha$. Имеем, что G_α-открытое множество и $h(t)=1$ при $t\in G_\alpha$. Отсюда следует (4.19) при таких x.

Случай 2: $x\in G_\beta\setminus G_\alpha$. В этом случае имеем

$$x\in G_{r_{k+1}}\setminus G_{r_k} \tag{4.32}$$

при некотором $k=0,1,\dots,m-1$. Тогда из открытости множеств G_{r_i} следует

$$\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_{G_{r_i}})=0, \quad i\ge k+1.$$

С другой стороны, учитывая соотношения $\lambda(G_{r_i})\subset G_{r_{i+1}}$, имеем

$$\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_{G_{r_i}})=0, \quad i\le k-1, \quad k>0.$$

В итоге получаем

$$\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}\setminus G_{r_i}})\le\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}})+\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_{G_{r_i}})=0, \quad i\in\mathbb{N}, \quad i\ne k,k-1. \tag{4.33}$$

Из (4.24) и (4.32) вытекает $p(x)=f(r_k)$. Имеем также $\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_B)=0$. Отсюда следует

$$\delta_\Omega(x,p)=\delta_\Omega\left(x,p-f(r_k)\mathbb{I}_B\right). \tag{4.34}$$

Имеем

$$p(x)-f(r_k)\mathbb{I}_B(x)=(1-f(r_k))\mathbb{I}_{G_{r_0}}(x)+\sum_{i=0}^{m}(f(r_i)-f(r_k))\mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}\setminus G_{r_i}}(x).$$

Далее, имея в виду (4.30) и (4.33), получим

$$\delta_\Omega\left(x,p-f(r_k)\mathbb{I}_B\right)\le\sum_{i\in\mathbb{N}\cap\{k-1,k\}}(f(r_i)-f(r_k))\delta_\Omega\left(x,\mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}\setminus G_{r_i}}(x)\right)\le 2\varepsilon$$

Комбинируя это с (4.31) и (4.34), получим $\delta_\Omega(x,h)=0$.

Случай 3: $x\in\mathbb{R}^2\setminus B$. Из соотношений $\lambda(G_{r_i})\subset G_{r_m}=B$, $i=1,2,\dots,m-1$, следует

$$\lim_{n\to\infty}\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_{G_{r_{i+1}}\setminus G_{r_i}})=0, \quad i=1,2,\dots,m-2,$$

и следовательно, с учетом (4.24), (4.30) и равенства $f(r_m)=0$, получим

$$\delta_\Omega(x,p)=|f(r_{m-1})|\delta_\Omega(x,\mathbb{I}_{G_{r_m}\setminus G_{r_{m-1}}})<\varepsilon.$$

Это завершает доказательство (4.19). Лемма 4.5 доказана. □

Лемма 4.6. *Для любого нуль-множества $E \subset \mathbb{R}^2$ типа G_δ, существует функция $g(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющая условиям*

a) $0 \le g(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^2$,

b) $\delta_\Omega(x, g) = 0$ *в каждой точке* $x \in E^c$,

c) $\delta_\Omega(x, g) = 1$ *в каждой точке* $x \in E$.

Доказательство. Имеем

$$E = \cap_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где E_k–некоторые открытые множества. Построим функции $g_k \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, открытые множества G_k, $k = 1, 2, \ldots,$, удовлетворяющие условиям

1) $E \subset G_k \subset E_k$, $G_k \subset G_{k-1}$, $k \ge 1$ $(G_0 = \mathbb{R}^2)$,

2) $g_k(x) = 1$, $x \in G_k$, $k \ge 1$,

3) $g_k(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus G_{k-1}$, $k \ge 1$,

4) $0 \le g_k(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}^2$, $k \ge 1$,

5) $\frac{1}{|Q|}\int_Q g_k(t)dt < 2^{-k}$, $Q \in \Omega$, $\overline{Q} \not\subset G_{k-1}$,

6) $\delta_\Omega(x, g_k) = 0$, $x \in \mathbb{R}^2$,

Сделаем эти построения по индукции. Возьмем $G_0 = \mathbb{R}^2$. Применив лемму 4.5 при $G = G_0$ и $\varepsilon = 1/2$, найдем функцию $h(x)$, и открытое множество A, удовлетворяющие условиям леммы. Обозначим $g_1(x) = h(x)$ и $G_1 = A \cap E_1$. Легко проверить, что тогда будут выполнены условия 1)-6) при $k = 1$. Предположим, что уже выбрали множества G_k и функции $g_k(x)$, с условиями 1)-6) при $k = 1, 2, \ldots, p$. Далее, вновь применив лемму 4.5 при $G = G_p$ и $\varepsilon = 2^{-p-1}$, найдем функцию $h(x)$ и открытое множество A, удовлетворяющие условиям той же леммы. Обозначив $g_{p+1}(x) = h(x)$ и $G_{p+1} = A \cap E_{p+1}$ мы получим

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp} g_{p+1} \subset G_p,\\
&g_{p+1}(x) = 1,\ x \in G_{p+1},\\
&0 \le g_{p+1}(x) \le 1, \quad x \in \mathbb{R}^2,\\
&\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q g_{p+1}(t)dt\right| < 2^{-p-1}, \quad Q \in \Omega, \quad \overline{Q} \not\subset G_p,\\
&\delta_\Omega(x, g_{p+1}) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что тогда будут выполнены также условия 1)-6) при $k = p+1$, что и завершает процесс индукции. Из 1) следует, что

$$E = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i.$$

Определим

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}g_k(x), & \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus E, \\ 0, & \text{при} \quad x \in E, \end{cases} \tag{4.35}$$

Отметим, что ряд в (4.35) сходится если $x \notin E$. Из соотношений 1), 2) и 3) легко следует условие a) леммы, Если $x \notin E$, то имеем

$$x \in G_{k-1} \setminus G_k, \tag{4.36}$$

для некоторого $k = 1, 2, \ldots$, а это значит, что

$$g_i(x) = 0, \quad i > k. \tag{4.37}$$

Возьмем любую точку x с условием (4.36) и пусть $Q \ni x$ есть произвольный квадрат. Из соотношения 5) и (4.37) следует

$$\frac{1}{|Q|}\left|\int_Q g_i(t)dt - g_i(x)\right| = \frac{1}{|Q|}\left|\int_Q g_i(t)dt\right| < 2^{-i}, \quad i > k,$$

откуда, с учетом 6), легко получить

$$\delta_Q(x, g) = \delta_Q\left(x, \sum_{i=m}^{\infty}(-1)^i g_i\right) < \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}, \text{ при } m > k. \tag{4.38}$$

Так как $m \in \mathbb{N}$ может быть произвольным числом, то получим условие b) леммы.

Чтобы установить условие c), предположим $x \in E$. Тогда имеем $x \in G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Очевидно, что существует последовательность квадратов Q_k таких, что

$$\mathring{Q}_k \subset G_k, \quad \overline{Q_k} \not\subset G_k.$$

Отсюда, с учетом 2) и 5), получим

$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} g_i(t)dt = 1, \quad i \le k,$$
$$\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} g_i(t)dt < 2^{-i}, \quad i > k.$$

Отсюда получим

$$\left|\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} g(t)dt - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\right|$$
$$\le \sum_{i=1}^{k}\left|\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} g_i(t)dt - 1\right| + \sum_{i=k+1}^{\infty}\left|\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} g_i(t)dt\right| \le k\cdot 2^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-k}.$$

Так как сумма $\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k+1}$ принимает значения 0 и 1 по очереди, то получаем условие c) для любой точки $x \in E$. Лемма 4.6 доказана. □

Доказательство теоремы 1.2. Очевидно, что достаточно установить часть необходимости в случае $p = 1$, а часть достаточности в случае $p = \infty$.

Необходимость: Пусть $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ есть произвольная функция. Во первых отметим, что совершенно аналогично доказательству необходимой части теоремы 1.1 можно установить, что $U_\Omega(f)$ является множеством типа G_δ. Далее, рассмотрим множества

$$A_{n,m}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists Q, Q' \in \Omega,\, x \in Q \cap Q',$$

$$\operatorname{diam}(Q) < 1/n, \operatorname{diam}(Q') < 1/n, \left|\frac{1}{|Q|}\int_Q f(t)dt - \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f(t)dt\right| > \frac{1}{m}\right\}.$$

Из соображений непрерывности, легко проверить, что они являются открытыми. Докажем, что

$$A(f) = \bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 1} A_{n,m}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_\Omega(x, f) > 0\}. \tag{4.39}$$

Для этого проверим эквивалентность следующих соотношений:

$$\begin{aligned} x \in A(f), &\Leftrightarrow \exists m_0, \text{ так что } x \in A_{n,m_0}(f), \text{ при любом } n = 1, 2, \ldots \\ &\Leftrightarrow \exists Q_k,\, Q'_k \in \Omega,\, \operatorname{diam}(Q_k) \to 0,\, \operatorname{diam}(Q_k) \to 0, \\ &\quad \left|\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(t)dt - \frac{1}{|Q'_k|}\int_{Q'_k} f(t)dt\right| > \frac{1}{m_0}, \\ &\Leftrightarrow \delta_\Omega(x, f) > 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из(4.39) получим,что $\{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_\Omega(x, f) > 0\}$ является множеством типа $G_{\delta\sigma}$. Имеем

$$B_\Omega(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \delta_\Omega(x, f) > 0\} \setminus U_\Omega(f),$$

и $U_\Omega(f)$ является множеством типа G_δ. Отсюда следует, что $B_\Omega(f)$ есть множество типа $G_{\delta\sigma}$. То, что оно имеет меру нуль, следует из теоремы D.

Достаточность: Предположим, что E есть множество типа $G_{\delta\sigma}$ меры нуль и представим его в виде

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

где E_k-множества типа G_δ меры нуль. Очевидно можно предполагать, что $E_k \subset E_{k+1}$. В противном случае могли бы рассматривать множества

$$E_k' = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$$

которые тоже являются множествами типа $G_{\delta\sigma}$ и их объединение равно E. Применив лемму 4.6, найдем функции $g_k(x)$, такие, что

a) $0 \le g_k(x) \le 1$,

b) $\delta_\Omega(x, g_k) = 0$ в каждой точке $x \notin E_k$,

c) $\delta_\Omega(x, g_k) = 1$ для любой точки $x \in E_k$.

Обозначим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} g_k(x)$$

Из свойства a) следует, что $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Пусть $x \in E$. Для некоторого k имеем $x \in E_k \setminus E_{k-1}$. Отсюда вытекает

$$\delta_\Omega\left(x, \sum_{i=1}^{k-1} 4^{-i} g_i\right) = 0, \quad \delta_\Omega(x, g_k) = 1.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\delta_\Omega(x, f) = \delta_\Omega\left(x, \sum_{i=k}^{\infty} 4^{-i} g_i\right) &\ge 4^{-k}\delta_\Omega(x, g_k) - \delta_\Omega\left(x, \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-i} g_i\right)\\ &\ge 4^{-k} - \sum_{i=k+1}^{\infty} 4^{-i} > 0.\end{aligned}$$

Если же $x \notin E$, то имеем $x \notin E_i$, $i = 1, 2, \ldots$. При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$, с учетом свойств a)-c), следует

$$\delta_\Omega(x, f) = \delta\left(x, \sum_{i=k}^{\infty} 4^{-i} g_i\right) \le \sum_{i=k}^{\infty} 4^{-i}.$$

Так как последнее имеет место при любом k, то получим $\delta_\Omega(x, f) = 0$. Теорема доказапа. □

Доказательство теоремы 1.3. Необходимость утверждения аналогично доказательству необходимости предыдущей теоремы. Приступим к доказательству достаточности. Будем воспользоваться функциями $g_k(x)$, построенные в начале доказательства леммы 4.6. Пе трудно выяснить, что в месте условиями 1)-6) можно также гарантировать условие $|G_k| < 4^{-k}$. Определим функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x).$$

Очевидно, что она принадлежит всем пространствам $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p < \infty$. Из соотношения 2) сразу же следует, что $\delta_{\mathfrak{Q}}(x, f) = \infty$ при $x \in E$. Если же $x \notin E$, то имеем (4.36) и (4.37). Возьмем любую точку x с условием (4.36) и пусть $Q \ni x$ есть произвольный квадрат. Из соотношения 5) и (4.37) следует

$$\frac{1}{|Q|} \left| \int_Q g_i(t)dt - g_i(x) \right| = \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q g_i(t)dt \right| < 2^{-i}, \quad i > k,$$

откуда, с учетом 6), легко получить

$$\delta_{\mathfrak{Q}}(x, f) = \delta_{\mathfrak{Q}}\left(x, \sum_{i=m}^{\infty} g_i\right) < \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}, \text{ при } m > k,$$

которое устанавливает $\delta_{\mathfrak{Q}}(x, f) = 0$. Теорема 1.3 доказана. □

Abstract. The paper considers a question of characterization of the sets of points of differentiation of integrals by bases of rectangles and squares. In particular, a complete characterization of the sets of ambiguous points for integrals of functions from $L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq p \leq \infty$, by the basis of squares is obtained.

Список литературы

[1] Besicovitch A. S., On differentiation of Lebesgue double integrals, Fund. Math., **25**, 209–216 (1935).

[2] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Уолша ограниченных функций на множествах меры нуль, Мат. сборник, **185**, no. 7, 119–127 (1994).

[3] Бугадзе В. М., О расходимости рядов Фурье-Хаара ограниченных функций на множествах меры нуль, Мат. заметки, **51** , по. 5, 20–26.(1992)

[4] Буздалин В. В., О неограниченно расходящихся тригонометрических рядах Фурье от непрерывных функций, Мат. заметки, **7**, no. 1, 7–18 (1970).

[5] Буздалин В. В., Тригонометрические ряды Фурье непрерывных функций, расходящиеся на заданном множестве, Математический сборник, **95(137)**, no. 1(9), 84–107 (1974).

[6] Goginava U., On devergence of Walsh-Fejer means of bounded functions on sets of measure zero, Acta Math. Hungarica, **121**, no. 3, 359–369 (2008).

[7] М. Гусман, Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$, Мир, Москва (1978).

[8] Hahn H., Ueber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge, Arch. d. Math. u. Phys., **28**, 34–45 (1919).

[9] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, Note of differentiability of multiple integrals, Fund. Math., **25**, 217–237 (1935).

[10] Kahane J-P., Katznelson Y., Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques, Studia math., **XXVI** , 305–306 (1966).

[11] Karagulyan G. A., Divergence of general localized operators on the sets of measure zero, Colloq. Math., **121**, no. 1, 113–119 (2010).

[12] Карагулян Г. А., Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара, Известия НАН Армении, сер. Математика, **45**, no. 6, 33–50 (2010).

[13] Карагулян Г. А., О характеризации множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации, Матем. сб., **202**, no. 1, 11–36 (2011).
[14] Карагулян Д. А., О харакеризации множеств точек неограниченной расходимости рядов по системе Франклина, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **47**, no. 1, 23–30 (2012).
[15] Карагулян Д. А., О множествах точек неограниченной расходимости рядов по отонормированным базисам, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **47**, no. 5, 39–48 (2012).
[16] Kolesnikov S. V., On the sets of n on-existence of radial limits of bounded analytical functions, Math. Sbornik, **185**, no. 4, 91–100 (1994).
[17] Коллингвуд Э. , Ловатер А. , Теория предельных множеств, М., Мир (1971).
[18] Kolmogoroff A. N.. Une serie de Fourier-Lebesque divergente presgue partout, Fund. Math., no. 4, 324–328 (1923).
[19] Korner T. W., Sets of divergence for Fourier series, Bull. Lond. Math. Soc., no. 3, 152 154 (1971).
[20] Lebesgue H., Sur l'intégration des functions discontinues, Ann. Ecole Norm., **27**, 361–450 (1910).
[21] Лукашенко С. Ю., О структуре множеств расходимости тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша, Докл. АН СССР, **253**, no. 3, 528–529 (1980).
[22] Лунина М. А., О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара, Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат. мех., no. 4, 13–20 (1976).
[23] Прохоренко В. И., О расходящихся рядах по системе Хаара, Изв. вузов. Мат., no. 1, 62–68 (1971).
[24] S. Saks , Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral, Fund. Math., **22**, 257–261 (1934).
[25] Sierpinski W., Sur Tensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues, Fund. Math., no. 2, 41–49 (1921).
[26] Стечкин В. С., О сходимости и расходимости тригонометрических рядов, Успехи матем. наук, VI, **42**, no. 2, 148–149 (1951).
[27] Тайков Л. В.,О расходимости рядов Фурье по переставленной тригонометрической системе, Успехи матем. наук, XVIII, **113**, no. 5, 191–198 (1963).
[28] Ульянов П. Л., О расходимости рядов Фурье, Успехи Мат. Наук, **12**, no. 3, 75–132 (1957).
[29] Ульянов П. Л., А. А. Колмогоров и расходящиеся ряды фурье, Успехи мат. наук, **38**, no. 4, 57–100 (1983).
[30] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье по ограниченным системам Виленкина, Труды Тбилисского матем. института АН Груз. ССР, **58**, 225–242 (1978).
[31] Хеладзе Ш. В., О расходимости всюду рядов Фурье-Уолша, Сообщ. АН Груз, ССР, **77**, no. 2, 305–307 (1975).
[32] Wade W. R., Resent development in the theory of Walsh series, Internat. Journ. of Math. and Math, Sci., **5**, no. 4, 625–673 (1982).
[33] Zahorski Z., Sur l'ensemble des points des non-derivative d'une function continue, Bulletin de la S. M. F., **74**, 147–178 (1946).
[34] Zeller K., Ueber Konvergenzmengen von Fourierreihen, Arch. Math., **6**, 335 340 (1955).

Поступила 30 января 2014 года