Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 6, 2014, стр. 29-42.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ОБЩЕЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА НА R

Г. Г. ГЕВОРКЯН, К. А. КЕРЯН

Ереванский государственный университет, Армения[1]
E-mails: *ggg@ysu.am*; *karenkeryan@yahoo.com*

Аннотация. Определяется общая система Франклина на R, порожденная допустимой последовательностью $\mathcal{T}$. Для таких систем доказываются теоремы о локально равномерной сходимости рядов Фурье-Франклина на R и безусловная базисность системы в пространстве $L^p(R)$, $1 < p < \infty$.

MSC2010 numbers: 42C10; 42C25; 46E30.

Keywords: общая система Франклина; сходимость; безусловная базисность; пространства L^p.

1. Введение

Классическая система Франклина, как первый пример ортонормированного базиса в $C[0;1]$, была определена в [5].

Определение 1.1. *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ называется допустимой на $[0;1]$, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0;1)$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ всюду плотно в $[0;1]$ и каждая точка $t \in (0;1)$ встречается в $\mathcal{T}$ не более чем два раза.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Через S_n обозначим пространство функций определенных на $[0;1]$, непрерывных слева и линейных на $(\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и непрерывных в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Ясно, что $\dim S_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно существует единственная (с точностью до знака) функция $f \in S_n$, ортогональная S_{n-1} и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию называют n-ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Известно, что $f(t_n) \neq 0$. Поэтому полагается $f(t_n) > 0$.

Определение 1.2. *Общая система Франклина $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ соответствующая разбиению $\mathcal{T}$ определяется по правилу $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ и*

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-11A006.

для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

При $t_n = \frac{2m-1}{2^k}$, где $n = 2^k + m$, $k = 0, 1, ..., m = 1, ..., 2^k$, получается классическая система Франклина [5]. Общая система Франклина исследовалась во многих работах. О некоторых свойствах этой системы, полученных в работах [1]-[3], мы укажем по мере необходимости.

В настоящей работе мы введем и изучим одно обобщение этой системы на R. При определении этой системы мы используем те же буквы, что и при определении общей системы Франклина. Однако это не приведет к путанице, поскольку об общей системы Франклина на $[0;1]$ в буквенных обозначениях мы больше говорить не будем.

Определение 1.3. *Последовательность (разбиение) $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ назовем допустимой на R, если $\mathcal{T}$ всюду плотно в R и каждая точка $t \in R$ встречается в $\mathcal{T}$ не более одного раза.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n+1\}$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n < \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Через S_n обозначим пространство функций определенных и непрерывных на R, линейных на $[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n]$ и равных нулю вне $(\tau_0^n; \tau_{n+1}^n)$. Ясно, что $\dim S_n = n$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно, существует единственная (с точностью до знака) функция $f \in S_n$, ортогональная S_{n-1} и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию назовем n-ой функцией Франклина на R, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Для фиксированного n через N_i^n, $0 \leq i \leq n+1$, обозначим B-сплайны соответствующие π_n, т.е.

$$N_0^n(t) = \begin{cases} 1, \text{ когда } & t = \tau_0^n, \\ 0, \text{ когда } & t \in (-\infty; \tau_0^n) \cup [\tau_1^n; \infty), \\ \text{линейная на } & [\tau_0^n; \tau_1^n], \end{cases}$$

$$N_i^n(t) = \begin{cases} 1, \text{ когда } & t = \tau_i^n, \\ 0, \text{ когда } & t \in (-\infty; \tau_{i-1}^n] \cup [\tau_{i+1}^n; \infty), \\ \text{линейная на } & [\tau_{i-1}^n; \tau_i^n] \text{ и } [\tau_i^n; \tau_{i+1}^n], \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n.$$

$$N_{n+1}^n(t) = \begin{cases} 1, \text{ когда } & t = \tau_{n+1}^n, \\ 0, \text{ когда } & t \in (-\infty; \tau_n^n] \cup (\tau_{n+1}^n; \infty), \\ \text{линейная на } & [\tau_n^n; \tau_{n+1}^n]. \end{cases}$$

Ясно, что $N_i^n \in S_n$, $1 \leq i \leq n$, образуют базис этого пространства, причем $N_i^n \notin S_n$, когда $i = 0$ или $n+1$.

Определение 1.4. *Общая система Франклина* $\{f_n(x) : n \geq 1\}$ *соответствующая разбиению* $\mathfrak{T}$ *определяется по правилу* $f_1(x) = \frac{1}{\|N_1^1\|_2} N_1^1(x)$ *и для* $n \geq 2$ *функция* $f_n(x)$ *есть* n*-ая функция Франклина, соответствующая разбиению* $\mathfrak{T}$.

При исследовании общей системы Франклина на $[0;1]$ важную роль сыграли понятия регулярности последовательности $\mathfrak{T}$. Эти понятия нам нужны также при изучении системы Франклина на R. Введем понятия регулярности на R.

Определение 1.5. *Допустимая последовательность* $\mathfrak{T}$ *называется сильно регулярной с параметром* γ, *если*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+1}^n}{\lambda_i^n} \leq \gamma, \quad \textit{для всех} \;\; n \geq 2, \quad i = 1, ..., n,$$

здесь и далее $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$.

Определение 1.6. *Допустимая последовательность* $\mathfrak{T}$ *называется регулярной по парам с параметром* γ, *если*

$$\gamma^{-1} \leq \frac{\lambda_{i+2}^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_i^n} \leq \gamma, \quad \textit{для всех} \;\; n \geq 2, \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Так как последовательность $\mathfrak{T}$ всюду плотна на R, то система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной ортонормированной системой в $L^2(R)$. Введем обозначения.

Через $c, C, C_1, C_\gamma, ...$, обозначаются постоянные, зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными.

$|I|$ – длина отрезка I.

$\rho(t, I)$ – расстояние между точкой t и интервалом I.

Через $d_n(t, x)$ обозначим количество точек из $\mathfrak{T}_n$, которые находятся между точками t и x. В случае $x = t_n$, вместо $d_n(t, t_n)$ будем писать $d_n(t)$, т.е. $d_n(t)$-количество точек из $\mathfrak{T}_n$, которые находятся между точками t_n и t. Запись $a \sim b$ означает, что существуют положительные постоянные c и C, такие что $c \cdot a \leq b \leq C \cdot a$, а запись $a \sim_\gamma b$ означает, что эти постоянные могут зависеть от γ.

Через $\chi_A(x)$, $\mu(A)$ и A^c будем обозначать характеристическую функцию, лебегову меру и дополнение множества A, соответственно.

Статья имеет следующую структуру: В §2 получены некоторые оценки для ядра Дирихле общей системы Франклина. В §3 доказаны теоремы о локально равномерной сходимости рядов Фурье-Франклина. В §4 изучаются свойства функции Франклина и безусловная базисность системы Франклина.

2. Оценки для ядра Дирихле общей системы Франклина

Через $K_n(t,\tau)$ обозначим ядро Дирихле общей системы Франклина, т.е. $K_n(t,\tau) = \sum_{k=1}^{n} f_n(t)f_n(\tau)$. В этом разделе изучим ядро $K_n(t,\tau)$ и применяя полученные оценки для $K_n(t,\tau)$, докажем теоремы о равномерной локальной сходимости рядов Фурье-Франклина. Нам пригодятся следующие свойства, легко проверяемые прямыми вычислениями.

Свойство 2.1. *Для всех n, $0 \le i \le j \le n+1$ имеем*

$$\int_R N_i^n(t)N_j^n(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{когда } j > i+1, \\ \frac{\lambda_{i+1}^n}{6}, & \text{когда } j = i+1, \\ \frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{3}, & \text{когда } j = i, \end{cases}$$

где полагается $\lambda_0^n = \lambda_{n+2}^n = 0$.

Свойство 2.2. *Пусть $f \in S_n$ и $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i N_i^n(t)$. Тогда для всех $1 \le p < \infty$ выполняются*

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \nu_i^n\right)^{1/p} \le \|f\|_p \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \nu_i^n\right)^{1/p},$$

где $\nu_i^n = (\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n)/2$.

Прежде чем изучать n-ую функцию Франклина f_n, получим основные свойства ядра $K_n(t,\tau)$.

Лемма 2.1. *Для всех n и t имеем $\int_R |K_n(t,\tau)|d\tau \le 3$.*

Доказательство. Дословно применим метод из [6] для оценивания нормы проектора из $L^\infty(R)$ в S_n. Пусть $g \in L^\infty(R)$ и $P \in S_n$ ее проекция, т.е. $P(t) = \int_R K_n(t,\tau)g(\tau)d\tau$. Допустим $P(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i N_i^n(t)$ и $|b_j| = \max_{1\le i\le n} |b_i| = \|P\|_\infty$. Тогда

$$\frac{\lambda_j^n + \lambda_{j+1}^n}{2} \cdot \|g\|_\infty \ge \left|\int_R g(t)N_j^n(t)dt\right| = \left|\int_R P(t)N_j^n(t)dt\right| =$$
$$\left|b_{j-1}\frac{\lambda_j^n}{6} + b_j\frac{\lambda_j^n + \lambda_{j+1}^n}{3} + b_{j+1}\frac{\lambda_{j+1}^n}{6}\right| \ge \frac{\lambda_j^n + \lambda_{j+1}^n}{6} \cdot \|P\|_\infty.$$

Отсюда, учитывая, что норма проектора равна $\sup_t \int_R |K_n(t,\tau)|d\tau$, получим утверждение леммы 2.1.

Ясно, что если $g \in S_n$, то $g(t) = \int_R K_n(t,\tau)g(\tau)d\tau$. Поэтому имеем

$$\int_R K_n(t,\tau)N_i^n(\tau)d\tau = N_i^n(t),\ i = 1, 2, ..., n,$$

которое, с учетом линейности функции $K_n(t,\tau)$ по каждой переменной на отрезках $[\tau_i^n;\tau_{i+1}^n]$, равносильно

$$\int_R K_n(\tau_k^n,\tau)N_i^n(\tau)d\tau = N_i^n(\tau_k^n) = \delta_{ik}, \text{ когда } i=1,2,...,n,\ k=1,2,...,n. \tag{2.1}$$

Учитывая линейность функции $K_n(\cdot,\tau)$ на интервалах $[\tau_i^n;\tau_{i+1}^n]$, получим

$$K_n(t,\tau) = \sum_{k=1}^n N_k^n(t)K_n(\tau_k^n,\tau).$$

В доказательстве следующей леммы вместо K_n, τ_i^n, λ_i^n будем писать K, τ_i, λ_i.

Лемма 2.2. *Для фиксированного k обозначим $\alpha_i = K(\tau_k,\tau_i)$. Тогда для α_i имеют место*

$$\alpha_i\cdot\alpha_{i+1} < 0, \text{ для } i=1,2,...,n-1, \tag{2.2}$$

$$|\alpha_i|\left(2+\frac{3}{2}\cdot\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right) < |\alpha_{i+1}| < |\alpha_i|\left(2+2\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right), \text{ для } i=1,...,k-1, \tag{2.3}$$

$$|\alpha_i|\left(2+\frac{3}{2}\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right) < |\alpha_{i-1}| < |\alpha_i|\left(2+2\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right), \text{ для } i=k+1,...,n-1 \tag{2.4}$$

$$\frac{3}{\lambda_k+\lambda_{k+1}} < \alpha_k < \frac{4}{\lambda_k+\lambda_{k+1}}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из (2.1), с применением свойства 2.1 получаем

$$\frac{\alpha_1(\lambda_1+\lambda_2)}{3}+\frac{\alpha_2\lambda_2}{6}=0, \tag{2.6}$$

$$\frac{\alpha_n(\lambda_n+\lambda_{n+1})}{3}+\frac{\alpha_n\lambda_{n+1}}{6}=0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\alpha_{i-1}\lambda_i}{6}+\frac{\alpha_i(\lambda_i+\lambda_{i+1})}{3}+\frac{\alpha_{i+1}\lambda_{i+1}}{6}=0, \text{ для } i=2,...,k-1,k+1,...,n-1, \tag{2.8}$$

$$\frac{\alpha_{k-1}\lambda_k}{6}+\frac{\alpha_k(\lambda_k+\lambda_{k+1})}{3}+\frac{\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}}{6}=1. \tag{2.9}$$

Из (2.6) и (2.8) для $i=2,...,k-1$ получим

$$\alpha_2 = -\alpha_1\left(2+2\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right),$$

$$\alpha_{i+1} = -\alpha_i\left(2+2\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right)-\alpha_{i-1}\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}.$$

Отсюда, применяя математическую индукцию, получим (2.3) и (2.2) для $i = 1, ..., k-1$. Аналогично, применяя (2.7), (2.8) для $i = k+1, ..., n-1$, получим (2.4) и (2.2) для $i = k, ..., n-1$. В частности, $|\alpha_k| > 2|\alpha_{k-1}|$ и $|\alpha_k| > 2|\alpha_{k+1}|$. Отсюда и из (2.9) следует (2.5). Лемма 2.2 доказана.

Из (2.3) для $i = 1, ..., k-1$ имеем $|\alpha_i| < q \cdot |\alpha_{i+1}| \cdot \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}}$. Здесь и далее $q = \frac{2}{3}$. Отсюда, с учетом (2.5), для $i = 1, ..., k-1$ получим

$$|\alpha_i| < q^{k-i} \cdot \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i + \lambda_{i+1}} \cdot \frac{\lambda_{i+2}}{\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda_k}{\lambda_{k-1} + \lambda_k} \cdot \frac{4}{\lambda_k + \lambda_{k+1}}. \tag{2.10}$$

Последовательно применяя очевидное неравенство $\frac{b}{(a+b)(b+c)} \le \frac{1}{a+b+c}$, из (2.10) получим

$$|\alpha_i| < q^{k-i} \frac{4}{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \ldots + \lambda_{k+1}}. \tag{2.11}$$

Из (2.11) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Для всех n и $1 \le i \le k \le n$ имеют место неравенства*

$$|K(\tau_k^n, \tau_i^n)| \le q^{|k-i|} \frac{4}{|\tau_{k+1}^n - \tau_{i-1}^n|}. \tag{2.12}$$

Лемма 2.4. *Верны следующие оценки*

$$\|K_n(\tau_k^n, \cdot)\|_p \sim (\nu_k^n)^{\frac{1}{p}-1}, \quad \textit{для} \;\; 1 \le p < \infty, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{2.13}$$

существует $\epsilon \in (0; 1)$ такое, что

$$\int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |K_n(\tau_k^n, \tau)|^p d\tau \le \epsilon^p \int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n} |K_n(\tau_k^n, \tau)|^p d\tau, \quad \textit{когда} \;\; i = 1, ..., k-1, \tag{2.14}$$

$$\int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n} |K_n(\tau_k^n, \tau)|^p d\tau \le \epsilon^p \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |K_n(\tau_k^n, \tau)|^p d\tau, \quad \textit{когда} \;\; i = k+1, ..., n-1. \tag{2.15}$$

Доказательство. Неравенства (2.14) и (2.15) доказываются аналогично. Докажем (2.14). Для фиксированных n и k, как и при доказательстве леммы 2.2 полагается $\alpha_i = K_n(\tau_k^n, \tau_i^n)$, $\lambda_i = \lambda_i^n$. С учетом $\alpha_i \cdot \alpha_{i+1} < 0$, получим

$$m_{i,p} := \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |K_n(\tau_k^n, \tau)|^p d\tau = \frac{\lambda_i}{p+1} \frac{|\alpha_{i-1}|^{p+1} + |\alpha_i|^{p+1}}{|\alpha_{i-1}| + |\alpha_i|}.$$

Поскольку $p \ge 1$, с учетом выпуклости функции x^p и $|\alpha_{i-1}| < 2|\alpha_i|$, имеем

$$\frac{|\alpha_{i-1}|^{p+1} + |\alpha_i|^{p+1}}{|\alpha_{i-1}| + |\alpha_i|} \ge \left(\frac{|\alpha_{i-1}|^2 + |\alpha_i|^2}{|\alpha_{i-1}| + |\alpha_i|} \right)^p \ge 2^p (\sqrt{2} - 1)^p |\alpha_i|^p.$$

С другой стороны $m_{i,p} \le \frac{\lambda_i}{p+1} |\alpha_i|^p$. Следовательно

$$\frac{m_{i+1,p}}{m_{i,p}} \ge 2^p (\sqrt{2} - 1)^p \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \frac{|\alpha_{i+1}|^p}{|\alpha_i|^p}.$$

Отсюда, с применением (2.3) для $\epsilon = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$ получим

$$\frac{m_{i+1,p}}{m_{i,p}} \geq 2^p(\sqrt{2}-1)^p \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\left(2+\frac{3}{2}\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right)^p \geq \frac{3}{4}4^p(\sqrt{2}-1)^p \geq \epsilon^{-p}.$$

Соотношение (2.13) следует из (2.14), (2.15) и (2.5). Лемма 2.4 доказана.

Замечание 2.1. *Пусть $\mathcal{T}$ сильно регулярная последовательность с параметром γ. Тогда нетрудно заметить, что из (2.3)-(2.5) следует, что для $q_\gamma = (2+2\gamma)^{-1}$, выполняются следующие неравенства:*

$$|K_n(\tau_i^n, \tau_j^n)| \geq q_\gamma^{|i-j|}\frac{3}{(\lambda_i^n+\lambda_{i+1}^n)\bigwedge(\lambda_j^n+\lambda_{j+1}^n)}, \tag{2.16}$$

где $a \wedge b = \min(a,b)$.

Из леммы 2.3 следует

Лемма 2.5. *Для любого $\delta > 0$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{|t-\tau|>\delta}|K_n(t,\tau)|d\tau = 0$.*

3. О локально равномерной сходимости рядов Фурье-Франклина

С применением лемм 2.1 и 2.5 стандартными рассуждениями доказываются следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность и $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для любой функции $f \in C(R)$, с компактным носителем, частичные суммы $S_n(f,x)$ ряда Фурье по системе $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходятся к $f(x)$ на R.*

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{T}$ допустимая последовательность. Тогда соответствующая ей общая система Франклина $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ является базисом в $L^p(R)$, для $1 \leq p < \infty$.*

Стромберг [8] на действительной оси R построил систему из кусочно линейных функций следующим образом. Пусть $R_0 = \{n : n \in N\} \cup \{0\} \cup \{-n/2 : n \in N\}$ и $R_{1/2} = R_0 \cup \{1/2\}$, где N-множество натуральных чисел. Через S_0 и $S_{1/2}$ обозначим множества непрерывных и кусочно линейных функций из $L^2(\mathrm{R})$, соответственно, с узлами из R_0 и $R_{1/2}$. Существует единственная функция $f \in S_{1/2}$ со свойствами: f ортогональна S_0, $\|f\|_2 = 1$ и $f(1/2) > 0$. Далее полагается $f_{jk}(t) = 2^{j/2}f(2^jt-k)$, $j,k \in Z$, где Z -множество целых чисел. Стромберг [8] доказал, что система $\{f_{jk}(t)\}_{j,k\in Z}$ является безусловным базисом в $L^p(R)$, $1 < p < \infty$, и $H^1(R)$. Однако эта система не является базисом в $L^1(R)$, так как $\int_R f_{jk}(t)dt = 0$, $j,k \in Z$. Неизвестно также, существует ли одноиндексная нумерация системы $\{f_{jk}(t)\}_{j,k\in Z}$, при которой частичные суммы ряда Фурье-Стромберга непрерывной функции с компактным носителем равномерно сходятся. Пусть $\varphi(t)$ четная, положительная и возрастающая на $[0;\infty)$ функция. Обозначим

$$C_\varphi(R)=\{f\in C(R):\ |f(t)|\le c\varphi(t),\ \text{для некоторого } c>0 \text{ и любого } t\in R\}.$$

Последовательность $\mathcal{T}^1$ построим следующим образом. Положим $t_0=0$, $t_1=-1$, $t_2=1$. На втором шаге добавим точки $t_3=-2$, $t_4=-\frac{1}{2}$, $t_5=\frac{1}{2}$, $t_6=2$. На n-ом шаге берем $t_{2^n-1}=-n$, а потом последовательно слева направо добавим средние точки интервалов полученных точками определенных до n-ого шага, и положим $t_{2^{n+1}-2}=n$. Бесконечно продолжая этот процесс, получим допустимую последовательность $\mathcal{T}^1$.

Пусть последовательность $\mathcal{T}^2$, построена тем же алгоритмом, что и последовательность $\mathcal{T}^1$, с той разницей, что на n-ом шаге добавлены точки $t_{2^n-1}=-\xi_n$, $t_{2^{n+1}-2}=\xi_n$, где $\xi_n\uparrow\infty$. Ясно, что $\mathcal{T}^2$ совпадает с $\mathcal{T}^1$, если $\xi_n=n$. Также нетрудно заметить, что $\mathcal{T}^2$ будет сильно регулярной, тогда и только тогда, когда

$$0<\inf_n\frac{\xi_{n+2}-\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}-\xi_n}\quad\text{и}\quad\sup_n\frac{\xi_{n+2}-\xi_{n+1}}{\xi_{n+1}-\xi_n}<\infty.$$

В частности $\mathcal{T}^1$-сильно регулярна. Верна следующая теорема.

Теорема 3.3. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ система Франклина соответствующая последовательности $\mathcal{T}^2$ и функция φ удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\varphi(\xi_n)}{2^n}=0. \tag{3.1}$$

Тогда для любой функции $f\in C_\varphi(R)$ частичные суммы $S_n(f,t)$ ряда Фурье по системе $\{f_n(t)\}_{n=1}^\infty$ локально равномерно сходятся к $f(t)$.

Теорема 3.4. *Пусть последовательность $\mathcal{T}^2$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ система Франклина соответствующая последовательности $\mathcal{T}^2$. Тогда если функция φ удовлетворяет условию*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln\varphi(\xi_n)}{2^n}>0, \tag{3.2}$$

то существует функция $f\in C_\varphi(R)$ для которой $S_n(f,t)$ не сходится к $f(t)$ в некоторых точках.

Доказательство теоремы 3.3. Оценим $S_n(f,t)-f(t)$. Пусть k любое натуральное и ε любое положительное числа. Выберем $\delta>0$, такое что

$$|f(t)-f(\tau)|<\varepsilon,\quad\text{как только}\quad |t-\tau|<\delta \text{ и } t,\tau\in[-\xi_k;\xi_k]. \tag{3.3}$$

Тогда

$$S_n(f,t)-f(t)=\int_R K_n(t,\tau)f(\tau)d\tau - f(t)= \tag{3.4}$$

$$=\int_{|t-\tau|<\delta} K_n(t,\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau+\int_{\delta<|t-\tau|<A} K_n(t,\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau+$$
$$+\int_{A<|t-\tau|} K_n(t,\tau)(f(\tau)-f(t))d\tau+f(t)\left(\int_R K_n(t,\tau)d\tau-1\right)=$$
$$=I_\delta(f,t,n)+I_{\delta,A}(f,t,n)+I_A(f,t,n)+I(f,t,n).$$

Из (3.3) и леммы 2.1 следует

$$|I_\delta(f,t,n)|<3\varepsilon. \tag{3.5}$$

Из леммы 2.5 при фиксированном A получим

$$\lim_{n\to\infty}|I_{\delta,A}(f,t,n)|=0, \quad \text{причем равномерно, если} \quad t\in[-\xi_k;\xi_k]. \tag{3.6}$$

Для $I(f,t,n)$ при достаточно большом n имеем (см. (2.12))

$$|I(f,t,n)|\le|f(t)|\left|\sum_{i=0}^{n+1}\int_R K_n(t,\tau)N_i^n(\tau)d\tau-1\right|=$$
$$|f(t)|\left|\int_R K_n(t,\tau)N_0^n(\tau)d\tau+\int_R K_n(t,\tau)N_{n+1}^n(\tau)d\tau\right|\le$$
$$C|f(t)|\left(q^{d_n(t,\tau_0^n)}\frac{\tau_1^n-\tau_0^n}{t-\tau_0^n}+q^{d_n(t,\tau_{n+1}^n)}\frac{\tau_{n+1}^n-\tau_n^n}{\tau_{n+1}^n-t}\right).$$

Следовательно, получаем

$$\lim_{n\to\infty}|I(f,t,n)|=0, \quad \text{причем равномерно, если} \quad t\in[-\xi_k;\xi_k]. \tag{3.7}$$

Из (3.4)-(3.7) следует, что для доказательства теоремы 3.3 нужно доказать, что если $f\in C_\varphi(R)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяет (3.1), то при достаточно большом A

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A<|\tau|}|K_n(t,\tau)|\varphi(\tau)d\tau=0, \quad \text{причем равномерно, если} \quad t\in[-\xi_k;\xi_k]. \tag{3.8}$$

Для фиксированного k выберем $\vartheta>0$, а потом натуральное $m_0\ge k$ такие, что

$$\epsilon^{2^{-k-1}}\cdot e^{\vartheta}<1 \quad \text{и} \quad \varphi(\xi_n)<\left(e^{\vartheta}\right)^{2^n}, \text{ когда } n\ge m_0. \tag{3.9}$$

Убедимся, что в качестве A можно взять ξ_{m_0}. Пусть $2^m-1\le n<2^{m+1}-1$, $m>m_0$. Нетрудно заметить, что количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые принадлежат $[\xi_i;\xi_{i+1})$ не меньше 2^{m-i-1}. Поэтому, количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые принадлежат $[\xi_k;\xi_i)$ не меньше 2^{m-k-1}. Следовательно, (см. (2.13), (2.15)) получаем

$$\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}|K_n(t,\tau)|d\tau\le C\epsilon^{2^{m-k-1}}, \quad \text{когда} \quad m_0\le i \quad \text{и} \quad t\in[-\xi_k,\xi_k].$$

Отсюда получим

$$\int_{\xi_{m_0}<|\tau|} |K_n(t,\tau)|\varphi(t)dt \le C\sum_{i=m_0}^{m-1}\varphi(\xi_i)\epsilon^{2^{m-k-1}} = C\epsilon^{2^{m-k-1}}\sum_{i=m_0}^{m-1}\varphi(\xi_i) \le \tag{3.10}$$

$$C\epsilon^{2^{m-k-1}}\left(e^{\vartheta}\right)^{2^m} = C\left(\epsilon^{2^{-k-1}}\cdot e^{\vartheta}\right)^{2^m}.$$

Из (3.10), (3.9) следует (3.8). Теорема 3.3 доказана.

Доказательство теоремы 3.4. Докажем, что если выполняется (3.2) и последовательность $\mathcal{T}^2$ сильно регулярная с параметром γ, то найдется функция $f \in C_\varphi$, для которой $S_n(f,z)$ не сходится к $f(z)$ в некоторой точке z.

Учитывая (3.2), можем найти положительное число δ и возрастающую последовательность натуральных чисел n_k, такие что

$$\ln\varphi(\xi_{n_k}) > \delta\cdot 2^{n_k}. \tag{3.11}$$

Учитывая, что $e^\delta > 1$, получим существование такого числа k_0, что

$$e^\delta\cdot q_\gamma^{2^{-k_0}} > 1. \tag{3.12}$$

Обозначая $m_k = 2^{n_k+2}-2$, из определения $\mathcal{T}^2$ имеем, что

$$t_{m_k-1}\in\mathcal{T}^2_{m_k},\ t_{2^{n_k+1}-2}=\xi_{n_k}\in\mathcal{T}^2_{m_k},\ \ t_{m_k}=\xi_{n_k+1}\in\mathcal{T}^2_{m_k}$$

и других точек между ними из $\mathcal{T}^2_{m_k}$ не существует. Следовательно,

$$K_{m_k}(\xi_{k_0},t_{m_k-1})\cdot K_{m_k}(\xi_{k_0},\xi_{n_k})<0 \text{ и кроме того } K_{m_k}(\xi_{k_0},\xi_{n_k+1})=0.$$

Пусть ξ_k^* такая точка из $[t_{m_k-1};\xi_{n_k}]$, что $K_{m_k}(\xi_{k_0},\xi_k^*)=0$. Положим

$$\varrho_k(t)=\begin{cases}\varphi(\xi_{n_k})\cdot\operatorname{sgn}K_{m_k}(\xi_{k_0},\xi_{n_k}), & \text{когда } \ t=\xi_{n_k},\\ 0, \quad \text{когда} & t\in(-\infty;\xi_k^*]\cup[\xi_{n_k+1};\infty),\\ \text{линейная на } \ [\xi_k^*;\xi_{n_k}] & \text{и } \ [\xi_{n_k};\xi_{n_k+1}].\end{cases} \tag{3.13}$$

Заметим также, что количество точек из $\mathcal{T}^2_{m_k}$ между ξ_{k_0} и ξ_{n_k} равно $2^{n_k-k_0}$. Поэтому из (2.16) имеем

$$|K_{m_k}(\xi_{k_0},\xi_{n_k})| > 3\cdot q_\gamma^{2^{n_k-k_0}}\frac{1}{\xi_{k_0+1}-\xi_{k_0}}.$$

Отсюда и из (3.13), (3.11) следует

$$\int_R K_{m_k}(\xi_{k_0},\tau)\varrho_k(\tau)d\tau > \frac{1}{2}|K_{m_k}(\xi_{k_0},\xi_{n_k})|\varphi(\xi_{n_k})(\xi_{n_k+1}-\xi_{n_k}) >$$

$$q_\gamma^{2^{n_k-k_0}}\cdot e^{\delta\cdot 2^{n_k}}\cdot\frac{1}{\gamma^{n_k-k_0}} = \left(q_\gamma^{2^{-k_0}}\cdot e^\delta\right)^{2^{n_k}}\cdot\frac{1}{\gamma^{n_k-k_0}}.$$

Следовательно, получаем

$$S_{m_k}(\varrho_k,\xi_{k_0}) > \left(q_\gamma^{2^{-k_0}}\cdot e^\delta\right)^{2^{n_k}}\cdot\frac{1}{\gamma^{n_k-k_0}}. \tag{3.14}$$

Функцию f из $C_\varphi(R)$, для которой $S_n(f,\xi_{k_0})$ не сходится, будем искать в виде

$$f(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varrho_{k_\nu}(t),\ \text{где}\ \ k_\nu\uparrow\infty. \tag{3.15}$$

Ясно, что при любом выборе k_ν функция f принадлежит $C_\varphi(R)$ и при любом σ функция $\sum_{\nu=1}^{\sigma}\varrho_{k_\nu}(t)$ непрерывна и имеет компактный носитель. Учитывая это, нетрудно заметить, что по индукции можно выбрать числа k_ν, так чтобы выполнялись

$$\left|\sum_{l=1}^{\nu-1}S_n(\varrho_{k_l},\xi_{k_0})\right|<1,\ \text{ когда }\ n\geq m_{k_\nu},\ \ \nu=2,3,.... \tag{3.16}$$

Нетрудно заметить, что если $k>k_\nu$, то $S_{m_{k_\nu}}(\varrho_k,\xi_{k_0})=0$. Поэтому из (3.15), (3.16), (3.14) и (3.12) будем иметь $\lim\limits_{\nu\to\infty}S_{m_{k_\nu}}(f,\xi_{k_0})=\infty$. Теорема 3.4 доказана.

Теоремы 3.3 и 3.4 указывают на то, что чем медленее растут ξ_n тем шире класс функций $C_\varphi(R)$, ряды Фурье-Франклина которых локально равномерно сходятся.

4. Свойства функций Франклина и безусловная базисность системы Франклина

Получим некоторые оценки для n-ой функции Франклина.

Лемма 4.1. *Пусть $f_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\zeta_kN_k^n(t)$ n-ая функция Франклина и $\tau_i^n=t_n$. Тогда*

$$\|f_n\|_p\sim\mu_n^{1/2-1/p},\ \ \textit{для}\ \ 1\leq p\leq\infty, \tag{4.1}$$

где

$$\mu_n=\begin{cases}\frac{1}{\nu_{i-1}^n}+\frac{1}{\nu_i^n}+\frac{1}{\nu_{i+1}^n}, & \textit{когда}\ 2\leq i\leq n-1,\\ \frac{1}{\nu_1^n}+\frac{1}{\nu_2^n}, & \textit{когда}\ \ i=1,\\ \frac{1}{\nu_1^n}, & \textit{когда}\ \ i=0,\\ \frac{1}{\nu_{n-1}^n}+\frac{1}{\nu_n^n}, & \textit{когда}\ \ i=n,\\ \frac{1}{\nu_n^n}, & \textit{когда}\ \ i=n+1.\end{cases}$$

$$\zeta_j=(-1)^{i+j}|\zeta_j|,\ \ j=1,2,...,n, \tag{4.2}$$

$$|\zeta_j|\sim\frac{\mu_n^{1/2}}{\nu_j^n},\ \ j=i-1,i,i+1, \tag{4.3}$$

$$|\zeta_{j-1}|(\frac{3}{2}\lambda_{j-1}^n+2\lambda_j^n)\leq|\zeta_j|\lambda_j^n\leq2|\zeta_{j-1}|(\lambda_{j-1}^n+\lambda_j^n),\ \ \textit{для}\ \ j\leq i-1, \tag{4.4}$$

$$(4.5)\qquad |\zeta_{j+1}|(2\lambda^n_{j+1}+\frac{3}{2}\lambda^n_{j+2})\le|\zeta_j|\lambda^n_{j+1}\le 2|\zeta_{j+1}|(\lambda^n_{j+1}+\lambda^n_{j+2}),\quad \textit{для}\ \ j\ge i+1.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $2\le i\le n-1$. Пусть $\{N^{n-1}_j(t)\}_{j=1}^{n-1}$ базис пространства S_{n-1}. Нетрудно заметить, что

$$(4.6)\qquad N^{n-1}_j=N^n_j\ \text{ для }\ j\le i-2\ \text{ и }\ N^{n-1}_j=N^n_{j+1}\ \text{ для }\ j\ge i+1$$

$$(4.7)\qquad N^{n-1}_{i-1}=N^n_{i-1}+\frac{\lambda^n_{i+1}}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}N^n_i,\ \ N^{n-1}_i=N^n_{i+1}+\frac{\lambda^n_i}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}N^n_i.$$

Обозначим

$$(4.8)\qquad \omega(t)=-\frac{\lambda^n_{i+1}}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}K_n(\tau^n_{i-1},t)+K_n(\tau^n_i,t)-\frac{\lambda^n_i}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}K_n(\tau^n_{i+1},t).$$

Из (4.6), (4.7) и (2.1) имеем, что $\omega\in S_n(R)$ и ортогональна $S_{n-1}(R)$. Следовательно $\omega(t)=\alpha f_n(t)$, для некоторого α. Заметим, что из (2.2) следует

$$(-1)^{i+j}\omega(\tau^n_j)=|\omega(\tau^n_j)|=$$

$$\frac{\lambda^n_{i+1}}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}|K_n(\tau^n_{i-1},\tau^n_j)|+|K_n(\tau^n_i,\tau^n_j)|+\frac{\lambda^n_i}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}|K_n(\tau^n_{i+1},\tau^n_j)|.$$

Поэтому (4.2), (4.4) и (4.5) следуют из (2.2)-(2.4). Кроме того, отсюда и из (2.13) следует

$$\|\omega\|_p\sim\frac{\lambda^n_{i+1}}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}\|K_n(\tau^n_{i-1},\cdot)\|_p+\|K_n(\tau^n_i,\cdot)\|_p+\frac{\lambda^n_i}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}\|K_n(\tau^n_{i+1},\cdot)\|_p\sim$$

$$\frac{\lambda^n_{i+1}}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}\nu_{i-1}^{\frac{1}{p}-1}+\nu_i^{\frac{1}{p}-1}+\frac{\lambda^n_i}{\lambda^n_i+\lambda^n_{i+1}}\nu_{i+1}^{\frac{1}{p}-1}.$$

Следовательно

$$(4.9)\qquad \|\omega\|_p\sim\mu_n^{1-\frac{1}{p}},\ \ 1\le p\le\infty.$$

Учитывая, что $\|f_n\|_2=1$ из (4.9) получим $\alpha\sim\mu_n^{\frac{1}{2}}$ и $\|f_n\|_p\sim\mu_n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. Для завершения рассматриваемого случая простыми вычислениями нужно проверить (4.3), применяя (4.8), (2.3) – (2.5) и $\alpha\sim\mu_n^{\frac{1}{2}}$.

В случае $i=0$ нетрудно заметить, что в $f_n(t)=K_n(\tau^n_1,t)\cdot\|K_n(\tau^n_1,\cdot)\|_2^{-1}$ и поэтому свойства (4.1)-(4.5) следуют из лемм 2.4, 2.2. В случае $i=n+1$ будет $f_n(t)=K_n(\tau^n_{n+1},t)\cdot\|K_n(\tau^n_{n+1},\cdot)\|_2^{-1}$.

В случае $i=1$ полагая

$$\omega(t)=K_n(\tau^n_1,t)-\frac{\lambda^n_1}{\lambda^n_1+\lambda^n_2}K_n(\tau^n_2,t)$$

аналогичными вычислениями получим (4.1)-(4.5) для этого случая. В случае $i = n$ полагается

$$\omega(t) = -\frac{\lambda_{n+1}^n}{\lambda_n^n + \lambda_{n+1}^n} K_n(\tau_{n-1}^n, t) + K_n(\tau_n^n, t).$$

Лемма 4.1 доказана.

Теперь определим "канонический интервал" J_n, связанный с функцией f_n. Отметим, что понятие такого интервала в работах [3], [4], [10], [9] сыграла важную роль при исследовании системы Франклина на $[0;1]$.

Пусть в последовательности π_n выполняется $\tau_i^n = t_n$ и $1 < i < n$. В этом случае интервал J_n определяется следующим образом. Во первых, пусть $j^* \in \{i-1, i, i+1\}$, такое что $\lambda_{j^*}^n + \lambda_{j^*+1}^n = \min_{i-1 \le j \le i+1}(\lambda_j^n + \lambda_{j+1}^n)$. Далее, больший из интервалов $(\tau_{j^*-1}^n; \tau_{j^*}^n)$, $(\tau_{j^*}^n; \tau_{j^*+1}^n)$ обозначается через J_n. В случаях $i = 0$ и $i = n+1$ положим $J_n = (\tau_0^n; \tau_2^n)$ и $J_n = (\tau_{n-1}^n; \tau_{n+1}^n)$, соответственно. Если $i = 1$, то $j^* \in \{1; 2\}$, такое что $\lambda_{j^*}^n + \lambda_{j^*+1}^n = \min(\lambda_1^n + \lambda_2^n, \lambda_2^n + \lambda_3^n)$, а J_n больший из интервалов $(\tau_{j^*-1}^n; \tau_{j^*}^n)$, $(\tau_{j^*}^n; \tau_{j^*+1}^n)$. Аналогично определяется J_n в случае $i = n$. Нетрудно заметить, что $|J_n| \sim \mu_n$. Применяя лемму 4.4 и анализируя определение интервала J_n можно доказать следующую лемму.

Лемма 4.2. *Пусть Δ-интервал линейности функции $f_n(t)$. Тогда*

$$|f_n(t)| \le C q^{d_n(t)} \frac{|J_n|^{\frac{1}{2}}}{|J_n| + \rho(J_n, \Delta) + |\Delta|}, \quad \text{когда} \quad t \in \Delta. \tag{4.10}$$

Доказательство этой леммы излагать не будем, поскольку это повторение доказательства леммы 3.2 из [3]. На самом деле определение интервалов J_n связано только с последовательностью $\mathcal{T}$. Поэтому верна следующая лемма, доказанная в работе [3] для разбиений отрезка $[0;1]$.

Лемма 4.3. *Пусть $\mathcal{T} = (t_n, n \ge 0)$ допустимая последовательность Тогда для любого n и $i = 0, 1, ..., n$ имеет место*

$$\#\left\{ m : \quad J_m \subset [\tau_i^n; \tau_{i+1}^n] \quad и \quad |J_m| > \frac{\lambda_{i+1}^n}{2} \right\} \le 25.$$

Применяя леммы 4.2, 4.3 и другие оценки для функций Франклина и повторяя рассуждения из работ [3], [10] (см. [3] теорема 2.1 или [10] теорема 2) можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{T}$- допустимая последовательность. Тогда соответствующая ей система Франклина $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в любом пространстве $L_p(R)$, $1 < p < \infty$.*

Отметим, что безусловную базисность классической системы Франклина в $L_p(0;1)$, $1 < p < \infty$ доказана С.В. Бочкаревым [11]. Безусловную базисность общей системы Франклина в $L_p(0;1)$, $1 < p < \infty$ доказана в [3]. А в работе [10] доказана безусловная базисность общей периодической системы Франклина в $L_p(0;1)$, $1 < p < \infty$.

Доказательство теоремы 4.1 достаточно длинное и почти повторяет доказательство теоремы 2.1 из [3]. Поэтому его приводить не будем.

Abstract. A general Franklin system on R, generated by an admissible sequence $\mathcal{T}$ is defined. We show that such defined system forms an unconditional basis in the space $L^p(R)$, $1 < p < \infty$, and prove theorems on locally uniform convergence of Fourier-Franklin series by this system.

Список литературы

[1] Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", Funct. Approx. Comment. Math., **25**, 129 – 143 (1997).

[2] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne), **374**, 1 – 59 (1998).

[3] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$", $1 < p < \infty$", Studia Math., **164**, 161 – 204 (2004).

[4] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "General Franklin systems as bases in $H^1[0,1]$", Studia Math., **167**, 259 – 292 (2005).

[5] Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., **100**, 522 – 528 (1928).

[6] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., **23**, 141 – 157 (1963).

[7] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system, II", Studia Math., **27**, 289 – 323 (1966).

[8] J. O. Strömberg, "A modified Franklin system and higher-order spline systems on R^n as unconditional bases for Hardy spaces", Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II, Chicago, Ill., 475 – 494 (1981).

[9] K. A. Keryan, M. P. Poghosyan, "A general Franklin periodic system as a basis in $H^1[0,1]$ (in Russian)", Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat., **40**, no. 1, 61 – 84 (2005), English translation in J. Contemp. Math. Anal., **40**, no. 1, 56 – 79 (2005).

[10] K. A. Keryan, "The unconditional bases property of a general Franklin periodic system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$ (in Russian)", Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat., **40**, no. 1, 61 – 84 (2005), English translation in J. Contemp. Math. Anal., **40**, no. 1, 56 – 79 (2005).

[11] S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", Anal. Math., **1**, 249 – 257 (1975).

Поступила 3 апреля 2014