

КОВАРИОГРАММА ЦИЛИНДРА

Г. С. АРУТЮНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения

E-mails: hrach87@gmail.com; victo@uaa.am

Аннотация. В статье получена формула связывающая ковариограмму и функцию распределения длины хорды в направлении для цилиндра с теми же функциями его основания. С помощью формулы получены выражения для ковариограммы и функции распределения длины хорды в направлении для цилиндров с круговыми, эллиптическими и треугольными основаниями.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65

Keywords: ограниченная выпуклая область; ковариограмма; зависящая от направления функция распределения длины хорды.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbb{R}^n$ n -мерное евклидово пространство, $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная выпуклая область с внутренними точками, S^{n-1} – $(n-1)$ -мерная единичная сфера с центром в начале координат, а $L_n(\cdot)$ – n -мерная мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

В [1] Матерон сформулировал гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела определяет ее в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений. Эта гипотеза известна как гипотеза Матерона (см. [17]).

В [2] Г. Бианчи и Г. Аверков доказали гипотезу Матерона для $n = 2$. На плоскости положительный ответ для гипотезы Матерона в классе выпуклых многоугольников получил В. Нагель (см. [3]). Бианчи так же доказал, что в случае $n \geq 4$ гипотеза не верна (см. [6]). Очень мало известно относительно гипотезы Матерона, когда размерность пространства больше двух. Известно, что центрально-симметричные выпуклые тела любой размерности единственным образом определяются по ковариограмме, с точностью до параллельных переносов (см. [4]). В случае 3-мерного пространства вопрос остается открытым. Несмотря на это, в случае ограниченного выпуклого многогранника при $n=3$ гипотеза

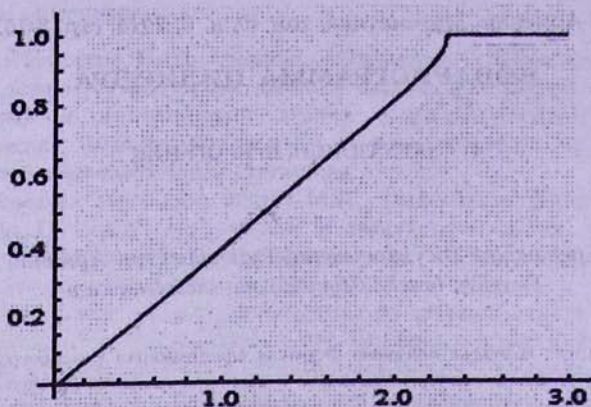


Рис. 1. Функция распределения длины хорды в направлении $\theta = \frac{\pi}{6}$ для кругового цилиндра с радиусом 1 и высотой 2.

Матерона получила положительный ответ (см. [5], [17] и [8]). Отметим, что выпуклость существенна в этом круге вопросов. Авторы работы [7] построили пример двух не конгруэнтных и не выпуклых многоугольников с одной и той же ковариограммой.

Чтобы найти соответствующий подход для решения задачи в $\mathbb{R}^3$, нужно понять характер поведения ковариограммы в случае пространственных тел. Явный вид ковариограммы для тел в $\mathbb{R}^3$ известен только в случае шара.

Ковариограмма $C_D(\cdot)$ области D определяется как

$$(1.1) \quad C_D(x) = L_n(D \cap \{D+x\}), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$C_D(\cdot)$ инвариантна относительно параллельных переносов и отражений. Г. Матерон (см. [1]) доказал, что для любого $t > 0$ и $\varphi \in S^{n-1}$

$$(1.2) \quad \frac{\partial C_D(t\varphi)}{\partial t} = -L_{n-1}(\{y \in \varphi^\perp : L_1(D \cap (l_\varphi + y)) \geq t\}),$$

где $l_\varphi + y$ есть прямая, параллельная направлению φ и проходящая через точку y , а $\varphi^\perp$ — ортогональное дополнение к φ , то есть — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ с нормальным направлением $\varphi \in S^{n-1}$.

Пусть G пространство прямых на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ $g \in G$, $(p, \varphi) =$ полярные координаты перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g ; $p \geq 0$, $\varphi \in S^1$.

Для замкнутой ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $S_D(\varphi)$ опорную функцию в направлении $\varphi \in S^1$, определяемую следующим образом

$$S_D(\varphi) = \max\{p \in \mathbb{R}^+ : g(p, \varphi) \cap D \neq \emptyset\},$$

где $\mathbb{R}^+$ — множество неотрицательных действительных чисел.

Для ограниченной выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^2$ обозначим через $b_D(\varphi)$ функцию ширины в направлении $\varphi \in S^1$, т.е. расстояние между опорными прямыми к границе D , которые перпендикулярны направлению φ . Имеем

$$b_D(\varphi) = S_D(\varphi) + S_D(\varphi + \pi).$$

Функция $b_D(\varphi)$ есть периодическая функция с периодом π (см. [18]).

Для области D зависящая от направления функция распределения длины хорды $F_D(x, \varphi)$ определяется как вероятность, что случайная хорда $\chi(g) = g \cap D$, где g из пучка прямых параллельных направлению φ , будет иметь длину не превосходящую x . Случайная прямая которая перпендикулярна направлению φ и пересекает D имеет пересечение (обозначим точку пересечения через y) с прямой параллельной направлению φ и проходящей через начало координат. Точка пересечения y равномерно распределена в интервале $[0, b_D(\varphi)]$. Таким образом, имеем

$$(1.3) \quad F_D(x, \varphi) = \frac{L_1\{y : \chi(l_\varphi + y) \leq x\}}{b_D(\varphi)}.$$

Нетрудно убедиться, что для $n = 2$ формула (1.2) эквивалентна

$$(1.4) \quad -\frac{\partial C_D(t, \varphi)}{\partial t} = b_D(\varphi) (1 - F_D(t, \varphi)).$$

В случае $n = 2$ явный вид функции распределения длины хорды в направлении, а так же ковариограммы, известны только в случае круга, треугольника, правильного многоугольника, параллелограмма и эллипса (см. [11]–[13]). Практическое применение этих результатов в кристаллографии можно найти в [9] (см. также [10], [14] и [15]).

Обозначим через Γ пространство прямых γ в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\Pi_D(\omega)$ проекцию области $D \subset \mathbb{R}^3$ в направлении $\omega \in S^2$, а через $s_D(\omega)$ — площадь $\Pi_D(\omega)$. Каждая прямая, параллельная направлению ω и пересекающая D имеет пересечение с $\Pi_D(\omega)$. Обозначим эту точку через y а прямую — через $l_\omega + y$. Точка пересечения y равномерно распределена в $\Pi_D(\omega)$. Функция распределения длины

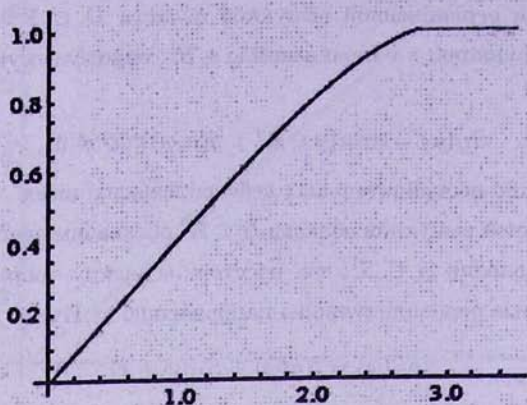


Рис. 2. Функция распределения длины хорды в направлении $\theta = \frac{\pi}{4}$ для кругового цилиндра с радиусом 1 и высотой 2.

хорды области D в направлении $\omega \in S^2$ определяется как

$$(1.5) \quad F_D(x, \omega) = \frac{L_2\{y : \chi(l_\omega + y) \leq x\}}{s_D(\omega)}.$$

Нетрудно убедиться, что для $n = 3$ формула (1.2) эквивалентна

$$(1.6) \quad -\frac{\partial C_D(t\omega)}{\partial t} = s_D(\omega) (1 - F_D(t, \omega)).$$

В статье получены следующие результаты:

- (1) Формула связывающая ковариограмму и функцию распределения длины хорды (в направлении) цилиндра с теми же функциями его основания,
- (2) Ковариограмма и функция распределения длины хорды в направлении для цилиндров с круговыми, эллиптическими и треугольными основаниями.

Мы также приводим графики зависящих от направления функций распределения длины хорды для цилиндров с круговыми, эллиптическими и треугольными основаниями для некоторых значений ω и замечаем, что эти графики или непрерывны всюду, или имеют скачок только в одной точке.

2. ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА

Рассмотрим цилиндр U с основанием B (не обязательно выпуклым) и высотой h . Очевидно, что область $U \cap \{U + x\} \neq \emptyset$ тоже является цилиндром. Если обозначить через t длину вектора x а через $\omega = (\varphi, \theta)$ ((φ, θ) — цилиндрические

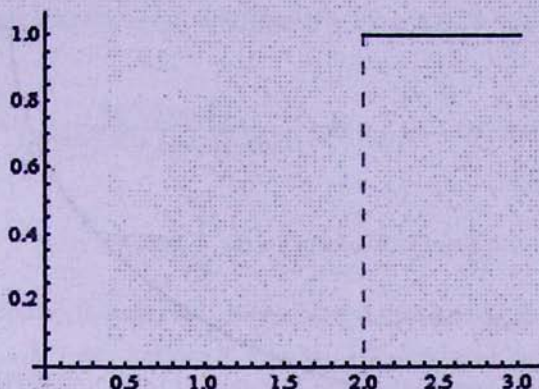


Рис. 3. Функция распределения длины хорды в направлении $\theta = \frac{\pi}{2}$ для кругового цилиндра с радиусом 1 и высотой 2.

координаты точки ω , $\varphi \in S^1$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ направление x , то основанием цилиндра $U \cap \{U + x\}$ будет область $B \cap \{B + y\}$, где y вектор на плоскости длины $t \cos \theta$ и направлением φ , а высота цилиндра будет $h - t \sin \theta$ (ввиду симметрии мы будем рассматривать только случай $\theta \in [0, \pi/2]$). Таким образом, из (1.1) получаем

$$C_U(x) = C_U(t\omega) = L_3(U \cap \{U + t\omega\}) = L_2(B \cap \{B + (t \cos \theta)\varphi\}) \cdot (h - t \sin \theta),$$

следовательно,

$$(2.1) \quad C_U(t\omega) = (h - t \sin \theta) \cdot C_B((t \cos \theta)\varphi).$$

Формула (2.1) дает возможность найти ковариограмму цилиндра высоты h в терминах ковариограммы его основания. Тривиальный случай – это случай кругового цилиндра (обычный цилиндр). В [11] – [13] получены ковариограммы эллипса, правильного многоугольника, треугольника и прямоугольника, следовательно используя (2.1) мы можем найти ковариограммы цилиндров с круговыми, эллиптическими, правильно-многоугольными, треугольными и параллелограммными основаниями.

Дифференцируя по t обе части уравнения (2.1), получаем

$$(2.2) \quad \frac{\partial C_U(t\omega)}{\partial t} = -\sin \theta C_B((t \cos \theta)\varphi) + (h - t \sin \theta) \frac{\partial C_B((t \cos \theta)\varphi)}{\partial t}.$$

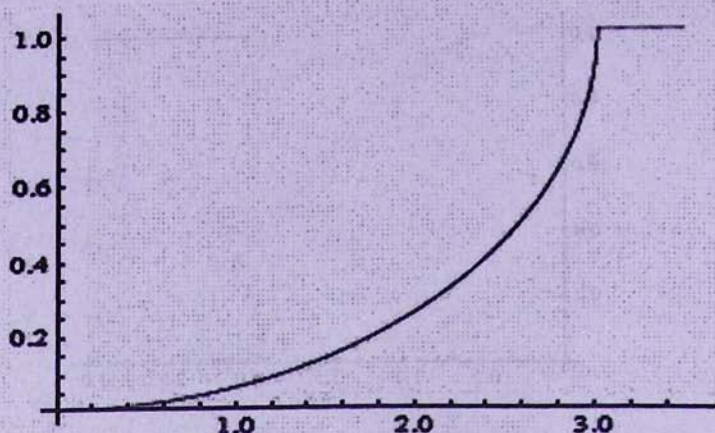


Рис. 4. Функция распределения длины хорды в направлении $\omega = (\frac{\pi}{6}, 0)$ для эллиптического цилиндра с полуосями 2 и 1 и высотой 3.

Очевидно, что функция распределения длины хорды цилиндра U в направлении ω равна 0, если $t < 0$, и 1, если $t \geq \chi_{\max}(\omega)$, где $\chi_{\max}(\omega)$ максимальная хорда цилиндра в направлении ω . Пусть $t \in [0, \chi_{\max}(\omega)]$. Используя (1.2) и (1.6) получаем

(2.3)

$$s_U(\omega)(1 - F_U(t, \omega)) = \sin \theta C_B((t \cos \theta) \varphi) + (h - t \sin \theta) \cos \theta b_B(\varphi)(1 - F_B(t \cos \theta, \varphi)).$$

Интегрируя (1.2) в случае $n = 2$ относительно t , получаем

$$(2.4) \quad C_B(t\varphi) = \|B\| - b_B(\varphi) \int_0^t (1 - F_B(u, \varphi)) du,$$

где $\|B\|$ площадь области B .

Из (2.3) и (2.4) выводим

$$(2.5) \quad \begin{aligned} s_U(\omega)(1 - F_U(t, \omega)) &= \sin \theta \left[\|B\| - \cos \theta b_B(\varphi) \int_0^t (1 - F_B(u \cos \theta, \varphi)) du \right] + \\ &+ (h - t \sin \theta) \cos \theta b_B(\varphi)(1 - F_B(t \cos \theta, \varphi)) = \|B\| \sin \theta + \cos \theta b_B(\varphi) \times \\ &\times \left[(h - t \sin \theta)(1 - F_B(t \cos \theta, \varphi)) - \sin \theta \int_0^t (1 - F_B(u \cos \theta, \varphi)) du \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $s_U(\omega) = \|B\| \sin \theta + b_B(\varphi)h \cos \theta$, поэтому из (2.5) получаем

$$(2.6) \quad F_U(t, \omega) = \frac{b_B(\varphi) \cos \theta}{\|B\| \sin \theta + b_B(\varphi)h \cos \theta} \left[t \sin \theta + (h - t \sin \theta) F_B(t \cos \theta, \varphi) + \right. \\ \left. + \sin \theta \int_0^t (1 - F_B(u \cos \theta, \varphi)) du \right]$$

Очевидно, $F_U(t, \omega) = 0$, если $t = 0$. Более того, нетрудно убедиться, что $F_U(t, \omega) = 1$ когда $t = \chi_{\max}(\omega)$ для любого $\theta \leq \arctan \frac{h}{b_B(\varphi)}$ (в этом случае $\chi_{\max}(\omega) \cdot \cos \theta$ максимальная хорда основания в направлении φ) и $F_U(t, \omega) < 1$ в противном случае (это связано с фактом, что все хорды с концами на основании цилиндра равны по длине).

Окончательно, получаем формулу между $F_U(t, \omega)$ и $F_B(t, \varphi)$:

$$(2.7) \quad F_U(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \frac{b_B(\varphi) \cos \theta}{\|B\| \sin \theta + b_B(\varphi)h \cos \theta} \left[(h - t \sin \theta) F_B(t \cos \theta, \varphi) + \right. \\ \left. + t \sin \theta + \sin \theta \int_0^t (1 - F_B(u \cos \theta, \varphi)) du \right], & \text{если } 0 \leq t < \chi_{\max}(\omega), \\ 1, & \text{если } t \geq \chi_{\max}(\omega). \end{cases}$$

Таким образом, зависящая от направления функция распределения длины хорды $F_U(t, \omega)$ цилиндра U может иметь скачок, зависящий от направления ω (для $\theta = \frac{\pi}{2}$ скачок равен 1). Такой скачок возникает в точке $\chi_{\max}(\omega)$; функция распределения $F_U(t, \omega)$ непрерывна всюду за исключением точки $\chi_{\max}(\omega)$. Мы иллюстрируем это свойство на Рисунках 1-8, где для некоторых значений направления ω функция распределения $F_U(t, \omega)$ имеет скачок в точке $\chi_{\max}(\omega)$, в то время как для других значений функция $F_U(t, \omega)$ непрерывна всюду. Эту закономерность мы изучаем в следующем параграфе.

3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

3.1. Случай кругового цилиндра. Пусть L_r круговой цилиндр с радиусом основания r и высотой h . Ковариограмма круга радиуса r равна

$$C_r(t, \varphi) = \begin{cases} 2r^2 \arccos \frac{t}{2r} - \frac{t}{2} \sqrt{4r^2 - t^2}, & \text{если } 0 \leq t \leq 2r, \\ 1, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

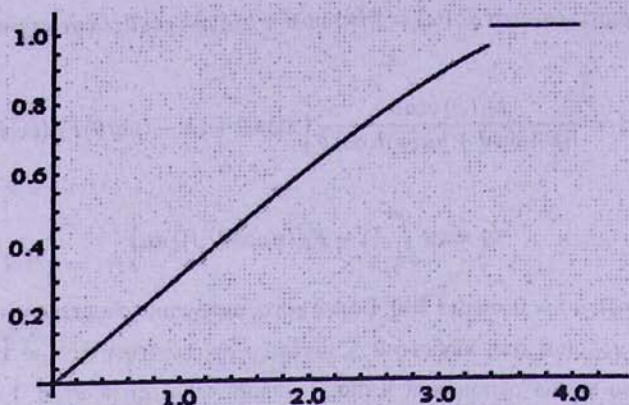


Рис. 5. Функция распределения длины хорды в направлении $\omega = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3})$ для эллиптического цилиндра с полуосями 2 и 1 и высотой 3.

следовательно из (2.1) для ковариограммы L_r получаем ([16], Приложение К)

$$(3.1) \quad C_{L_r}(t, \omega) = \begin{cases} (h - t \sin \theta) (2r^2 \arccos \frac{t \cos \theta}{2r} - \\ - \frac{t \cos \theta}{2} \sqrt{4r^2 - t^2 \cos^2 \theta}), & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\omega), \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

где

$$(3.2) \quad \chi_{\max}(\omega) = \chi_{\max}(\varphi, \theta) = \begin{cases} \frac{2r}{\cos \theta}, & \text{если } \theta \in [0, \arctan \frac{h}{2r}] \\ \frac{h}{\sin \theta}, & \text{если } \theta \in [\arctan \frac{h}{2r}, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Для функции распределения длины хорды в направлении получаем

$$F_r(t, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{4r^2}}, & \text{если } 0 \leq t < 2r, \\ 1, & \text{если } t > 2r, \end{cases}$$

следовательно из (2.7) получаем

$$(3.3) \quad F_{L_r}(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \frac{2}{\pi r \sin \theta + 2h \cos \theta} \left[r \sin \theta \arcsin \frac{t \cos \theta}{2r} + h \cos \theta + \right. \\ \left. + \left(\frac{3t \sin 2\theta}{4} - h \cos \theta \right) \sqrt{1 - \frac{t^2 \cos^2 \theta}{4r^2}} \right], & \text{если } 0 \leq t < \chi_{\max}(\omega), \\ 1, & \text{если } t \geq \chi_{\max}(\omega). \end{cases}$$

Как видно из формулы (3.3) функция распределения $F_{L_r}(t, \omega)$ зависит от ω только через θ -координату направления ω . Это следует из симметрии кругового цилиндра относительно φ -координаты направления ω . По этой причине

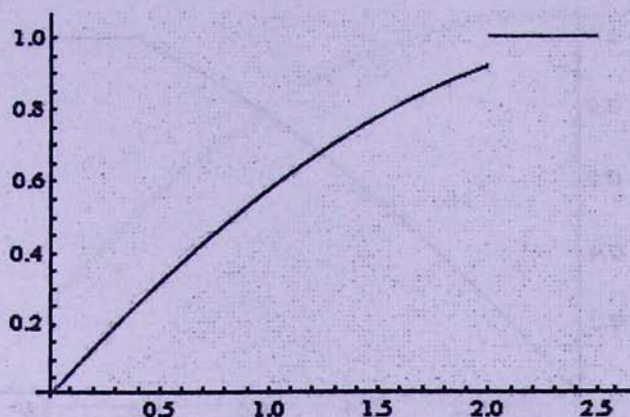


Рис. 6. Функция распределения длины хорды в направлении $\omega = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6})$ для правильной призмы со стороной 3 и высотой 1.

на рисунках 1-3 мы рассматриваем только значения θ . Рисунки 1-2 показывают, что функция распределения $F_{L_r}(t, \omega)$ всюду непрерывна для $\omega = (\cdot, \pi/6)$ и $\omega = (\cdot, \pi/4)$, так как для этих случаев $\arctan \frac{h}{2r} = \pi/4$ и $\pi/6 \leq \pi/4$ и $\pi/4 \leq \pi/4$. Когда же θ -координата направления ω превосходит $\pi/4$ возникает скачок в точке $\chi_{\max}(\omega)$, который возрастает при стремлении θ к $\pi/2$. В случае $\theta = \pi/2$, функция распределения $F_{L_r}(t, \omega)$ имеет скачок равный 1 в точке 2 (см. Рис. 3).

3.2. Случай эллиптического цилиндра. Рассмотрим цилиндр L_e высоты h и эллипсом с полуосями a и b в основании. Ковариограмма эллипса с полуосями a и b имеет вид (см. [12]):

$$C_e(t\varphi) = \begin{cases} 2ab \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)} \sqrt{1 - \frac{t^2}{\chi_{\max}^2(\varphi)}} - \arcsin \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)} \right), & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\varphi), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\chi_{\max}(\varphi) = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$ максимальная хорда в направлении φ (см. [12]).

Из (2.1) имеем

$$C_{L_e}(t\omega) = \begin{cases} 2ab(h - t \sin \theta) \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t \cos \theta}{\chi_{\max}(\varphi)} \sqrt{1 - \frac{t^2 \cos^2 \theta}{\chi_{\max}^2(\varphi)}} - \arcsin \frac{t \cos \theta}{\chi_{\max}(\varphi)} \right), & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\omega), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$(3.4) \quad \chi_{\max}(\omega) = \chi_{\max}(\varphi, \theta) = \begin{cases} \frac{\chi_{\max}(\varphi)}{\cos \theta}, & \text{если } \theta \in \left[0, \arctan \frac{h}{\chi_{\max}(\varphi)} \right] \\ \frac{h}{\sin \theta}, & \text{если } \theta \in \left[\arctan \frac{h}{\chi_{\max}(\varphi)}, \frac{\pi}{2} \right]. \end{cases}$$

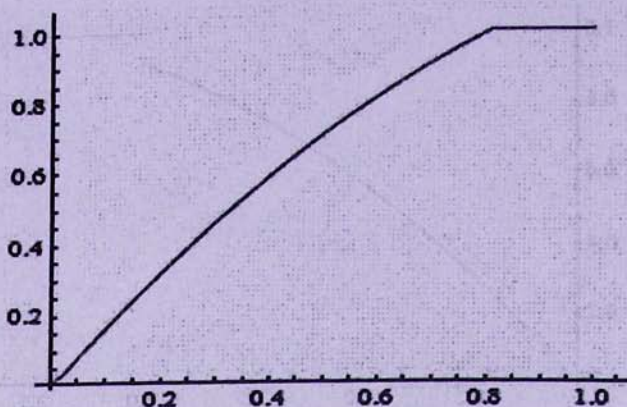


Рис. 7. Функция распределения длины хорды в направлении $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ для призмы высоты 2 и прямоугольным треугольником с катетом 1 и углом $\frac{\pi}{6}$ в основании.

Для функции распределения в направлении имеем (см. [12])

$$(3.5) \quad F_e(t, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{\chi_{\max}^2(\varphi)}}, & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\varphi), \\ 1, & \text{если } t \geq \chi_{\max}(\varphi), \end{cases}$$

следовательно из (2.7) получаем

$$(3.6) \quad F_{L_e}(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \frac{b_e(\varphi)}{\pi a b \sin \theta + h b_e(\varphi) \cos \theta} \left[\frac{1}{2} \chi_{\max}(\varphi) \sin \theta \arcsin \frac{t \cos \theta}{\chi_{\max}(\varphi)} + \right. \\ \left. + h \cos \theta + \left(\frac{3t \sin 2\theta}{4} - h \cos \theta \right) \sqrt{1 - \frac{t^2 \cos^2 \theta}{\chi_{\max}^2(\varphi)}} \right], & \text{если } 0 \leq t < \chi_{\max}(\omega), \\ 1, & \text{если } t \geq \chi_{\max}(\omega), \end{cases}$$

где $\chi_{\max}(\omega)$ определяется уравнением (3.4) и $b_e(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$. Полагая $a = b = r$ в (3.6) получаем (3.3).

Дальнейшая иллюстрация свойства "скачка" для зависящей от направления функции распределения длины хорды представлена на Рисунках 4-5. На Рис. 4 нет скачков, потому что

$$\theta = 0 < \arctan \frac{3}{\sqrt{2^2 \sin^2 \pi/6 + 1^2 \cos^2 \pi/6}} \approx 66.2^\circ,$$

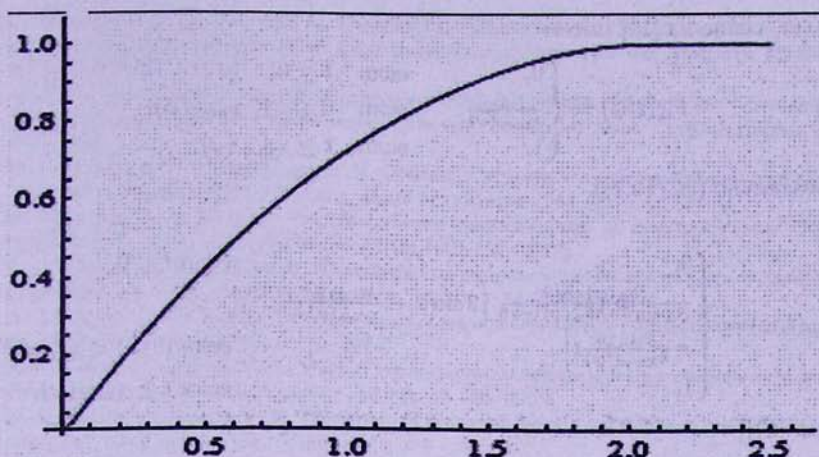


Рис. 8. Функция распределения длины хорды в направлении $(\pi, \frac{\pi}{3})$ для призмы высоты 2 и треугольным основанием со стороной 1 и прилегающими к нему углами $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$.

а на Рис. 5 имеется скачок в точке $\chi_{\max}(\pi/2, \pi/3) = \frac{3}{\sin \pi/3} = 2\sqrt{3}$, так как

$$\frac{\pi}{3} > \arctan \frac{3}{\sqrt{2^2 \sin^2 \pi/2 + 1^2 \cos^2 \pi/2}} = \arctan \frac{3}{2}.$$

3.3. Случай призмы. Рассмотрим призму L_{Δ} с треугольным основанием Δ . Мы полагаем что одна из сторон Δ лежит на оси X . Пусть a длина этой стороны, а α и β — прилегающие к нему углы. В [11] показано, что ковариограмма Δ имеет вид

$$(3.7) \quad C_{\Delta}(t\varphi) = \begin{cases} S_{\Delta} \left(1 - \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}\right)^2, & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\varphi), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где S_{Δ} площадь треугольника Δ , а $\chi_{\max}(\varphi)$ определяется следующим образом

$$(3.8) \quad \chi_{\max}(\varphi) = \begin{cases} \frac{a \sin \beta}{\sin(\varphi + \beta)}, & \text{если } \varphi \in [0, \alpha], \\ \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \sin \varphi}, & \text{если } \varphi \in [\alpha, \pi - \beta], \\ \frac{a \sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}, & \text{если } \varphi \in [\pi - \beta, \pi]. \end{cases}$$

Имея в виду (2.1) получаем

$$(3.9) \quad C_{L_{\Delta}}(t\omega) = \begin{cases} S_{\Delta}(h - t \sin \theta) \left(1 - \frac{t \cos \theta}{\chi_{\max}(\omega)}\right)^2 & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\omega), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\chi_{\max}(\omega)$ определяется формулой (3.4).

Далее, снова из [11] имеем

$$(3.10) \quad F_{\Delta}(t, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq 0, \\ \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}, & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\varphi), \\ 1, & \text{если } t \geq \chi_{\max}(\varphi), \end{cases}$$

следовательно (см. (2.7))

$$(3.11) \quad F_{L_{\Delta}}(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \frac{tb_{\Delta}(\varphi) \cos \theta}{S_{\Delta} \sin \theta + hb_{\Delta}(\varphi) \cos \theta} \left[2 \sin \theta + \frac{h \cos \theta}{\chi_{\max}(\varphi)} - \right. \\ \left. - \frac{3 \sin 2\theta}{4\chi_{\max}(\varphi)} t \right], & \text{если } 0 \leq t < \chi_{\max}(\omega), \\ 1, & \text{если } t \geq \chi_{\max}(\omega), \end{cases}$$

где (см. [11])

$$b_{\Delta}(\varphi) = \begin{cases} \frac{a \sin \alpha \sin(\varphi + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, & \text{если } \varphi \in [0, \alpha], \\ a \sin \varphi, & \text{если } \varphi \in [\alpha, \pi - \beta], \\ \frac{a \sin \beta \sin(\varphi - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}, & \text{если } \varphi \in [\pi - \beta, \pi]. \end{cases}$$

На рисунках 6–8 изображены графики функции распределения $F_{L_{\Delta}}(t, \omega)$ для некоторых типов треугольников и для конкретных направлений ω . Можно заметить, что общее свойство непрерывности зависящей от направления функции распределения длины хорды, которое было описано в параграфах 2 и 3 также имеет место в этих случаях.

Abstract. In this paper we establish relationships between the covariogram and the orientation-dependent chord length distribution function of a cylinder and those of its base. Also, we obtain explicit expressions for the covariogram and the orientation-dependent chord length distribution function of a cylinder with cyclic, elliptical and triangular bases.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, New York, Wiley (1975).
- [2] G. Bianchi, G. Averkov, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body", *Journal of the European Mathematical Society*, 11, 1187 – 1202 (2009).
- [3] W. Nagel, "Orientation-dependent chord lengths distributions characterize convex polygons *Journal Appl. Prob.*, 30, 730-736, 1993.
- [4] R. J. Gardner, *Geometric Tomography* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2006).
- [5] Bianchi G., "The covariogram determines three-dimensional convex polytopes *Adv. Math.*, 220, 1771-1808, 2009.
- [6] G. Bianchi, "Matheron's conjecture for the covariogram problem", *J. London Math. Soc.*, 71 (1), 203–220, 2005.
- [7] Benassi C., Bianchi G. and D'Ercole G., "Covariogram of non-convex sets" *University College London*, 56, 267-284, 2010.

- [8] G. Bianchi, R. J. Gardner and M. Kiderlen M., "Phase retrieval for characteristic functions of convex bodies and reconstruction from covariograms" *Journal of the American Mathematical Society*, **24**, 293–343, 2011.
- [9] W. Gille, N. Aharonyan and H. Harutyunyan, "Chord length distribution of pentagonal and hexagonal rods: relation to small-angle scattering", *Journal of Appl. Crystallography*, **42**, 326–328 (2009).
- [10] Н. Г. Агаронян, Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян, "Случайная копия отрезка внутри выпуклой области", *Известия НАН Армении, серия Математика*, **45** (6), 3–16 (2010).
- [11] А. Гаспарян, В. К. Оганян, "Восстановление треугольников по ковариограмме", *Известия НАН Армении, серия Математика*, **48** (3), 110–122 (2013).
- [12] Г. С. Арутюнян, В. К. Оганян, "Зависящие от направления распределения сечений", *Известия НАН Армении, серия Математика*, **49** (3), 3–24 (2014).
- [13] А. Гаспарян, В. К. Оганян, "Ковариограмма параллелограмма", *Известия НАН Армении, серия Математика*, **49** (4), 17–34 (2014).
- [14] Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян, "Распределения длины хорды для многоугольников", *Известия НАН Армении, серия Математика*, **40** (4), 43–56, 2005.
- [15] H. S. Harutyunyan and V. K. Ohanyan, "The chord length distribution function for regular polygons", *Adv. Appl. Prob. (SGSA)*, **41**, 358–360, 2009.
- [16] D. Stoyan, H. Stoyan, *Fractals, Random Shapes and Point Fields*, John Wiley & Sons, Chichester (1994).
- [17] R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry* (Springer, Berlin-Heidelberg, 2008).
- [18] Luis A. Santalo, *Integral Geometry and Geometric Probability* (Addison-Wesley, Reading, MA, 2004).

Поступила 14 октября 2013 года