Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 4, 2014, стр. 35-46.

СХОДИМОСТЬ ДВУМЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПОЛИНОМОВ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВАРИАЦИИ

А. Р. НУРБЕКЯН, А. А. СААКЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *anurbekyan@gmail.com*, *sart@ysu.am*

Аннотация. В статье рассматривается вопрос сходимости частичных сумм двумерных тригонометрических интерполяционных полиномов. Доказана сходимость по Прингсхейму для функций двух переменных с ограниченной гармонической вариацией.

MSC2010 numbers: 42A15.

Ключевые слова: многомерная тригонометрическая интерполяция; гармоническая вариация.

1. Введение

Пусть N – произвольное натуральное число, $t_0 \in \mathbb{T} := [-\pi, \pi]$ – произвольное действительное число, и

$$h_N = \frac{2\pi}{2N+1}, \quad t_i = t_0 + ih_N, \quad i = 0, \pm1, \pm2 \dots \tag{1.1}$$

Для 2π-периодической, интегрируемой по Риману на $\mathbb{T}$ функции f через $I_N(f,x)$ обозначим единственный тригонометрический полином вида:

$$I_N(f,x) = \frac{a_0^N}{2} + \sum_{\nu=1}^{N}(a_\nu^N \cos\nu x + b_\nu^N \sin\nu x) = \sum_{\nu=-N}^{N} c_\nu^N e^{i\nu x},$$

который совпадает с f в точках t_i (см. [1], гл. 10):

$$I_N(f,t_i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, 2N.$$

Точки t_i называются фундаментальными или узловыми точками интерполяции. Если обозначить через

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin t/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \left(D_n(2\pi k) = \frac{2n+1}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\right), \quad n = 0, 1, \dots,$$

ядро Дирихле, то имеет место следующая формула

$$I_N(f,x) = \frac{2}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N} f(t_i)D_N(x-t_i) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_N(x-t)d\omega_{2N+1}(t),$$

где $\omega_{2N+1}(t)$ – непрерывная слева ступенчатая функция, имеющая скачки h_N в точках t_i.

Коэффициенты интерполяционного полинома $I_n(f)$ называются коэффициентами Фурье-Лагранжа и определяются следующими формулами:

$$a_\nu^N = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\cos(\nu t)d\omega_{2N+1}(t), \qquad b_\nu^N = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\sin(\nu t)d\omega_{2N+1}(t)$$

и

$$c_\nu^N = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-i\nu t}d\omega_{2N+1}(t).$$

Частичные суммы интерполяционного полинома имеют вид $(n = 0, 1, \ldots, N)$:

$$I_N^n(f,x) = \frac{a_0^N}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^N\cos\nu x + b_\nu^N\sin\nu x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)D_n(x-t)d\omega_{2N+1}(t).$$

Имеет место следующий аналог хорошо известной теоремы Дирихле-Жордана ([1], гл. 2) о сходимости рядов Фурье функций ограниченной вариации.

Теорема 1.1 ([1], гл. X). *Если функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[-\pi,\pi]$, тогда $I_N^n(f,x)$ сходится при $n\to\infty, N>n$ к $f(x)$ в каждой точке $x\in T$, где функция f непрерывна. Сходимость равномерна на каждом отрезке непрерывности функции f.*

В работе Д. Ватермана [2] было введено понятие Λ-вариации функции.

Определение 1.1. *Пусть $\{\lambda_n\}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, такая что ряд $\sum\lambda_n^{-1}$ расходится. Λ-вариацией функции $f(x)$, $x\in I$ на отрезке I вещественной оси называется следующая величина:*

$$V_\Lambda(f,I) := \sup\sum\frac{|f(I_n)|}{\lambda_n}.$$

где sup *берется по всем системам $\{I_n\}$ попарно непересекающихся интервалов из I, и $f(\Delta) = f(\beta) - f(\alpha)$ если $\Delta = (\alpha, \beta)$.*

Обозначим

$$\Lambda BV = \Lambda BV(I) = \{f : V_\Lambda(f,I) < \infty\}.$$

В частном случае, когда $\lambda_n \equiv n$, класс ΛBV называется классом функций ограниченной гармонической вариации и пишется $V_H(f,I)$ и HBV вместо $V_\Lambda(f,I)$ и ΛBV соответственно.

Теорема 1.1 была обобщена Д. Ватерманом и Х. Ксингом [3] для класса функций с ограниченной гармонической вариацией.

Теорема 1.2 ([3]). *Если функция f имеет ограниченное гармоническое изменение, тогда $I_N^n(x,f)$ стремятся к $f(x)$ в каждой точке непрерывности функции f. Сходимость равномерна на каждом отрезке непрерывности функции f.*

В двумерном случае сходимость по Прингсхейму рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации была доказана А. Саакяном в [4], где приведены определение и основные свойства гармонической вариации в двумерном случае.

Определение 1.2. *Пусть $f(x,y)$ 2π-периодическая функция по каждой переменной. Для интервалов $I=(a,b)$, $\Delta=(\alpha,\beta)$ положим*

$$V_{x,y}(f;I\times\Delta)=\sup\sum_{n,k}\frac{|f(I_n,\Delta_k)|}{nk},$$

где sup *берется по всем системам $\{I_n\}_{n=1}^{n_0}$ и $\{\Delta_k\}_{k=1}^{k_0}$ попарно непересекающихся интервалов из I и Δ соответственно, и*

$$f(I,\Delta):=f(a,\alpha)-f(a,\beta)-f(b,\alpha)+f(b,\beta). \tag{1.2}$$

Двумерная гармоническая вариация функции f на прямоугольнике $I\times\Delta$ определяется следующим образом:

$$V_H(f,I\times\Delta):=V_{x,y}(f;I\times\Delta)+\sup_{y_0\in\Delta}V_x(f(x,y_0),I)+\sup_{x_0\in I}V_y(f(x_0,y),\Delta),$$

где V_x и V_y – одномерные гармонические вариации относительно переменных x и y соответственно. Класс функций ограниченной гармонической вариации на прямоугольнике $I\times\Delta$ обозначают через $HBV=HBV(I\times\Delta)$.

В данной статье доказывается следующая теорема о сходимости частичных сумм тригонометрических интерполяционных полиномов для функций двух переменных с ограниченной гармонической вариацией.

Пусть узлы t_i определены как в (1.1), и

$$s_j = s_j^M = s_0 + \frac{2\pi j}{2M+1}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots, \tag{1.3}$$

где M – натуральное число, и $s_0 \in \mathbb{T}$. Для заданной функции $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, 2π-периодической по каждой переменной, существует единственный тригонометрический полином

$$I_{N,M}(f,x,y) = \sum_{\nu=-N}^{N} \sum_{\mu=-M}^{M} c_{\nu,\mu}^{N,M} e^{i\nu x} e^{i\mu y},$$

который совпадает с f в точках (t_i, s_j):

$$I_{N,M}(f,t_i,s_j) = f(t_i,s_j), \quad i = 0,1,\ldots,2N, \quad j = 0,1,\ldots,2M.$$

Частичные суммы этого полинома имеют вид $(n = 0,1,\ldots,N,\ m = 0,1,\ldots,M)$:

$$\begin{aligned} I_{N,M}^{n,m}(f,x) &= \sum_{\nu=-n}^{n} \sum_{\mu=-m}^{m} c_{\nu,\mu}^{N,M} e^{i\nu x} e^{i\mu y} \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} f(t,s) D_n(x-t) D_m(y-s) d\omega_{2N+1}(t) d\omega_{2M+1}(s) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{T^2} f(x+t,y+s) D_n(t) D_m(s) d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t) d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s), \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\widetilde{\omega}_{2N+1}(t) = \omega_{2N+1}(x+t)$, $\quad \widetilde{\omega}_{2M+1}(s) = \omega_{2M+1}(y+s)$ Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть функция $f \in HBV(T^2)$ интегрируема по Риману. Тогда в каждой точке $(x,y) \in T^2$, где существуют пределы по квадрантам $f(x\pm 0, y\pm 0)$, имеет место следующее равенство*

$$\lim_{n,m\to\infty} I_{N,M}^{n,m}(f,x,y) = \frac{1}{4} \sum f(x\pm 0, y\pm 0) \quad (N > n,\ M > m), \tag{1.5}$$

при условии, что отношения N/n и M/m равномерно ограничены. Если f непрерывна на открытом множестве $E \in T^2$, то сходимость равномерна на любом компакте $K \subset E$.

2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем мы через C обозначим абсолютные постоянные, которые могут быть разными в разных формулах.

Лемма 2.1. *Пусть для натурального N и $t_0 \in \mathbb{T}$, точки t_i определены в (1.1), и $1 \le n \le N$. Тогда,*

$$\left|\sum_{i=j}^{k} \sin nt_i\right| \le \frac{\pi}{nh_N}, \quad 1 \le j < k \le 2N.$$

Для доказательства леммы достаточно умножить обе стороны неравенства на $\sin \frac{nh_N}{2}$ и использовать неравенство $\sin t > \frac{2}{\pi}t$ $(0 < t < \frac{\pi}{2})$.

Лемма 2.2. *Если $g \in HBV([a,b])$, $[a,b] \subset T$, тогда*

$$\int_a^b g(t)\frac{\sin nt}{t}d\omega_{2N+1}(t) \le C \cdot \frac{N}{n}\left(V_H(g,[a,b]) + \|g\|_{C([a,b])}\right). \tag{2.1}$$

Доказательство. Обозначим $\{m_1, m_1+1, \dots, m_2\} := \{i \in \mathbb{N} : t_i \in [a,b]\}$. Без ограничения общности можем считать, что $[a,b] \subset [0,\pi]$, и что $t_{m_1} \ge 0$ (полагаем $\frac{\sin nt}{t} = n$, если $t = 0$). Применив преобразование Абеля, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g(t)\frac{\sin nt}{t}d\omega_{2N+1}(t)\right| &= \left|\sum_{k=m_1}^{m_2} g(t_k)\frac{\sin nt_k}{t_k}h_N\right| \le \left|\sum_{k=m_1+1}^{m_2} g(t_k)\frac{\sin nt_k}{t_k}h_N\right| \\
+\left|g(t_{m_1})\frac{\sin nt_{m_1}}{t_{m_1}}h_N\right| &\le h_N\left|\sum_{k=m_1+1}^{m_2-1}\left[\frac{g(t_k)}{t_k} - \frac{g(t_{k+1})}{t_{k+1}}\right]\sum_{j=m_1+1}^{k}\sin nt_j\right| \\
&+ h_N\left|\frac{g(t_{m_2})}{t_{m_2}}\sum_{j=m_1+1}^{m_2}\sin nt_j\right| + h_N\left|g(t_{m_1})\frac{\sin nt_{m_1}}{t_{m_1}}\right|
\end{aligned}$$

Обозначив последние слагаемые через I_1, I_2, I_3, с учетом леммы 2.1 будем иметь, что

$$\begin{aligned}
I_3 &\le h_N\|g\|_{C([a,b])}n = \frac{2\pi}{2N+1}\|g\|_\infty n \le 2\pi\|g\|_{C([a,b])}. \\
I_2 &\le h_N\frac{\|g\|_{C([a,b])}}{t_{m_2}}\frac{\pi}{nh_N} \le \frac{\|g\|_{C([a,b])}}{h_N}\frac{\pi}{n} = \frac{2N+1}{2n}\|g\|_{C([a,b])}. \\
I_1 \overset{(2.2)}{\le}& h_N\left|\sum_{k=m_1+1}^{m_2-1}\frac{g(t_k) - g(t_{k+1})}{t_k}\sum_{j=m_1+1}^{k}\sin nt_j\right| \\
&+ h_N\left|\sum_{k=m_1+1}^{m_2-1}g(t_{k+1})\left[\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k+1}}\right]\sum_{j=m_1+1}^{k}\sin nt_j\right| \le Ch_NV_H(g,[a,b])\frac{N}{nh_N} \\
&+ h_N\|g\|_{C([a,b])}\sum_{k=m_1+1}^{m_2-1}\left[\frac{1}{t_k} - \frac{1}{t_{k+1}}\right]\frac{\pi}{nh_N} \le C \cdot \frac{N}{n}\left(V_H(g,[a,b]) + \|g\|_{C([a,b])}\right).
\end{aligned}$$

$\square$

Суммируя неравенства (2.2), получим (2.1).

Лемма 2.3. *Пусть $f(x,y)$, $g(x,y) \in HBV(T^2)$ и на каждом прямоугольнике решетки функция g зависит только от x или от y. Тогда*

$$\left|\int_{\mathbb{T}^2} f(x+t,y+s)g(t,s)\frac{\sin nt}{t}e^{ims}d\omega_{2N+1}(t)d\omega_{2M+1}(s)\right| \le \frac{N}{n}\cdot\frac{M}{m}\cdot\frac{C(f,g)}{\ln M}$$

для любых $x,y \in \mathbb{T}$, $1 \le n \le N$, $1 \le m \le M$.

Доказательство. Обозначим

$$F(t,s) = f(x+t,y+s)g(t,s), \qquad \varphi(s) = \int_{\mathbb{T}} F(t,s)\frac{\sin nt}{t}d\omega_{2N+1}(t).$$

Согласно теореме 2 из [3], имеем, что

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(s)e^{ims}d\omega_{2M+1}(s) \le \frac{2M+1}{2m}\frac{1}{\ln M}V_H(\varphi,\mathbb{T}):$$

Для получения оценки гармонического изменения $V_H(\varphi,\mathbb{T})$ рассмотрим вариационную сумму φ на интервалах $\{\Delta_k\}_1^{k_0} = (\alpha_k,\beta_k)_1^{k_0}$.

$$I = \sum_{k=1}^{k_0}\frac{\varepsilon_k}{k}\left[\varphi(\beta_k)-\varphi(\alpha_k)\right] = \sum_{k=1}^{k_0}\frac{\varepsilon_k}{k}\int_{\mathbb{T}}[F(t,\beta_k)-F(t,\alpha_k)]\frac{\sin nt}{t}d\omega_{2N+1}(t) =$$
$$\int_{\mathbb{T}}\sum_{k=1}^{k_0}\frac{\varepsilon_k}{k}[F(t,\beta_k)-F(t,\alpha_k)]\frac{\sin nt}{t}d\omega_{2N+1}(t) = \int_{\mathbb{T}}\psi(t)\frac{\sin nt}{t}d\omega_{2N+1}(t),$$

где

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{k_0}\frac{\varepsilon_k}{k}[F(t,\beta_k)-F(t,\alpha_k)], \quad \varepsilon_k = \pm 1.$$

Из леммы 2.2 вытекает

$$|I| = \left|\int_{\mathbb{T}}\psi(t)\frac{\sin nt}{t}d\omega_{2N+1}(t)\right| \le C\frac{2N+1}{2n}\left(V_H(\psi,\mathbb{T}) + \|\psi\|_\infty\right).$$

Повторяя оценки из доказательства леммы 2.1 из [4], получим:

$$|I| \le \frac{2N+1}{2n}C(f,g),$$

что и завершает доказательство леммы 2.3. $\square$

Лемма 2.4. *Для произвольной функции $f \in HBV(\mathbb{T}^2)$ и $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение:*

$$I_{N,M}^{n,m}(f,x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\cdot\frac{\sin ms}{s}d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s) + o(1),$$

где $o(1)$ стремится к 0 равномерно на квадрате $\mathbb{T}^2$, когда n, $m \to \infty$ так, что отношения $\frac{N}{n}$ и $\frac{M}{m}$ равномерно ограничены.

Доказательство. Запишем ядро Дирихле $D_n(t)$ в следующем виде:

$$D_n(t) = \frac{\sin nt}{t} + g(t)\sin nt + \frac{1}{2}\cos nt, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

где

$$g(t) = \frac{1}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}, \quad 0 < |t| \le \pi, \quad g(0) = 0.$$

Согласно (1.4), имеем, что

$$\begin{aligned}
\pi^2 I_{N,M}^{n,m}(f,x,y) &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\cdot\frac{\sin ms}{s}d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s)\\
&+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\varepsilon\le|t|\le\pi} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\cdot\frac{\sin ms}{s}d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s)\\
&+ \int_{\varepsilon\le|s|\le\pi}\int_{|t|\le\varepsilon} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\frac{\sin ms}{s}d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s)\\
&+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\left[g(s)\sin ms + \frac{1}{2}\cos ms\right]d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s)\\
&+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,y+s)\frac{\sin ms}{s}\left[g(t)\sin nt + \frac{1}{2}\cos nt\right]d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s)\\
&+ \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t,y+s)\left[g(t)\sin nt + \frac{1}{2}\cos nt\right]\\
&\qquad\qquad \times\left[g(s)\sin Ms + \frac{1}{2}\cos Ms\right]d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s)\\
&= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\frac{\sin ms}{s}d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s) + \sum_{p=1}^{5} I_{N,M}^{n,m,p}(x,y).
\end{aligned}$$

Докажем, что в условиях леммы,

$$\lim_{n,m\to\infty} I_{N,M}^{n,m,p}(x,y) = 0, \quad p = 1,2,3,4,5 \tag{2.3}$$

равномерно по $(x,y) \in T^2$, $N > n$, $M > m$. В случаях $p = 1,2,3,4$ это следует из леммы 2.3 при соответствующем выборе функции $g(t,s)$. При $p = 5$ соотношение (2.3) вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 2.1. *Пусть $f \in R([-\pi,\pi]^2)$, а функция g ограничена. В этом случае коэффициенты Фурье-Лагранжа функции $F(t,s) = f(x+t,y+s)g(t,s)$ равномерно по $x,y \in [-\pi,\pi]^2$ сходятся к 0, когда $n,m \to \infty$.*

Утверждение вытекает из того факта, что при его условиях функции $F(t,s)$ равномерно R интегрируемы по $x, y \in [-\pi,\pi]^2$. Определение понятия равномерной R интегрируемости и доказательство сходимости коэффициентов в одномерном случае даны в [1], гл. 10. В двумерном случае все суждения остаются неизменными. $\square$

Следующая лемма была доказана в [4].

Лемма 2.5. *Пусть $f \in HBV(D)$, $D = I \times \Delta \subset T^2$.*

a) Если в точке $(x,y) \in D$ существует предел $f(x+0,y+0)$, тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_H(f,(x,x+\varepsilon)\times(y,y+\varepsilon)) = 0.$$

b) Если функция f непрерывна на открытом множестве $E \subset D$, то для любого компакта $K \subset E$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_H(f,(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)) = 0.$$

равномерно по $(x,y) \in K$.

3. Доказательство теоремы 1.3

В силу лемм 2.4 и 2.5 достаточно доказать (для остальных трех квадрантов доказательства аналогичны), что для любых $(x,y) \in T^2$, $\varepsilon > 0$ и $L > 0$, если

$$n \le N \le Ln, \quad m \le M \le Lm,$$

то

$$|I| := \left|\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(x+t,y+s)\frac{\sin nt}{t}\frac{\sin ms}{s}d\widetilde{\omega}_{2N+1}(t)d\widetilde{\omega}_{2M+1}(s) - \frac{1}{4}f(x+0,y+0)\right| \le B\cdot V_H(f,(x,x+\varepsilon)\times(y,y+\varepsilon)), \tag{3.1}$$

где B – постоянная, зависящая только от L.

Пусть n, N, m, M и $(x,y) \in T^2$ фиксированы. Без ограничения общности можем считать, что

$$x = y = 0, \quad -h_N \le t_0 < 0, \quad -h_M \le s_0 < 0, \quad h_n, h_m \in (0,\varepsilon),$$

где t_0 и s_0 – точки из (1.1) и (1.3).

Положим

$$p_1 = \left[\frac{h_n}{h_N}\right], \quad q_1 = \left[\frac{\varepsilon}{p_1 h_N}\right], \quad p_2 = \left[\frac{h_m}{h_M}\right], \quad q_2 = \left[\frac{\varepsilon}{p_2 h_M}\right],$$

где $[a]$ – целая часть числа a. Обозначим

$$\tau_i^j = t_0 + (jp_1 + i)h_N, \quad i = 1, 2, \ldots, p_1, \quad j = 0, 1, \ldots \tag{3.2}$$
$$\sigma_k^l = s_0 + (lp_2 + k)h_M, \quad k = 1, 2, \ldots, p_2, \quad l = 0, 1, \ldots$$

Теперь, обозначив $\phi(t, s) = f(t, s) - f(0 + 0, 0 + 0)$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\pi^2 I &= \int_0^\varepsilon \int_0^\varepsilon \phi(t, s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} d\omega_{2N+1}(t) d\omega_{2M+1}(s) + o(1) \\
&= \int_0^{h_m} \int_0^{h_n} + \int_{h_m}^\varepsilon \int_0^{h_n} + \int_0^{h_m} \int_{h_n}^\varepsilon + \int_{q_2p_2h_M}^\varepsilon \int_{h_n}^\varepsilon \\
&+ \int_{h_m}^{q_2p_2h_M} \int_{q_1p_1h_N}^\varepsilon + \int_{h_m}^{q_2p_2h_M} \int_{h_n}^{q_1p_1h_N} + o(1) = \sum_{k=1}^6 I_k + o(1).
\end{aligned}$$

Отдельно оценим каждый из интегралов I_k. Имеем:

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \left(\frac{h_n}{h_N} + 1\right)\left(\frac{h_m}{h_M} + 1\right) \sup_{0 \leq t \leq h_n,\ 0 \leq s \leq h_m} |\phi(t, s)| nmh_Nh_M \\
&\leq C \sup_{0 \leq t \leq h_n,\ 0 \leq s \leq h_m} |\phi(t, s)| \leq C \cdot V_H(f, (0, \varepsilon)^2).
\end{aligned}$$

Далее, из леммы 2.2 вытекает

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq C \int_0^{h_n} \frac{2M + 1}{2m} \left[V_s(\phi(t, s), (0, \varepsilon)) + \sup_{s \in (0, \varepsilon)} |\phi(t, s)|\right] \frac{\sin nt}{t} d\omega_{2N+1}(t) \\
&\leq B \left(\frac{h_n}{h_N} + 1\right) V_H(f, (0, \varepsilon)^2) nh_N \leq B \cdot V_H(f, (0, \varepsilon)^2).
\end{aligned}$$

При $k = 3, 4, 5$ интегралы I_k оцениваются аналогично. Остается оценить I_6. Имеем:

$$I_6 = \int_{h_m}^{q_2p_2h_M} \int_{h_n}^{q_1p_1h_N} \phi(t, s) \frac{\sin nt}{t} \frac{\sin ms}{s} d\omega_{2N+1}(t) d\omega_{2M+1}(s)$$
$$= h_Nh_M \sum_{i=1}^{p_1} \sum_{k=1}^{p_2} \sum_{j=1}^{q_1-1} \sum_{l=1}^{q_2-1} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} \sin n\tau_i^j \sin m\sigma_k^l. \tag{3.3}$$

Для фиксированных i, k оценим следующую сумму

$$J := \sum_{j=1}^{q_1-1} \sum_{l=1}^{q_2-1} \frac{\phi(\tau_i^j, \sigma_k^l)}{\tau_i^j \sigma_k^l} \sin n\tau_i^j \sin m\sigma_k^l. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$Q_i^j = \sum_{r=1}^j \sin n\tau_i^r, \quad P_k^l = \sum_{r=1}^l \sin m\sigma_k^r.$$

Используя преобразование Абеля получим

$$
\begin{aligned}
J &= \sum_{j=1}^{q_1-1}\sum_{l=1}^{q_2-1}\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)}{\tau_i^j\sigma_k^l}\sin n\tau_i^j\sin m\sigma_k^l = \sum_{j=1}^{q_1-1}\frac{\sin n\tau_i^j}{\tau_i^j}\sum_{l=1}^{q_2-1}\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)}{\sigma_k^l}\sin m\sigma_k^l \\
&= \sum_{j=1}^{q_1-1}\frac{\sin n\tau_i^j}{\tau_i^j}\sum_{l=1}^{q_2-2}\left[\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)}{\sigma_k^l}-\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1})}{\sigma_k^{l+1}}\right]P_k^l+\sum_{j=1}^{q_1-1}\frac{\sin n\tau_i^j}{\tau_i^j}\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{q_2-1})}{\sigma_k^{q_2-1}}P_k^{q_2-1} \\
&= \sum_{l=1}^{q_2-2}P_k^l\sum_{j=1}^{q_1-1}\left[\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)}{\tau_i^j\sigma_k^l}-\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j\sigma_k^{l+1}}\right]\sin n\tau_i^j+P_k^{q_2-1}\sum_{j=1}^{q_1-1}\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^j\sigma_k^{q_2-1}}\sin n\tau_i^j \\
&= \sum_{l=1}^{q_2-2}P_k^l\sum_{j=1}^{q_1-2}\left[\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)}{\tau_i^j\sigma_k^l}-\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j\sigma_k^{l+1}}-\frac{\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^l)}{\tau_i^{j+1}\sigma_k^l}+\frac{\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^{l+1})}{\tau_i^{j+1}\sigma_k^{l+1}}\right]Q_i^j \qquad (3.5)\\
&+ \sum_{l=1}^{q_2-2}P_k^l\left[\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^l)}{\tau_i^{q_1-1}\sigma_k^l}-\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^{l+1})}{\tau_i^{q_1-1}\sigma_k^{l+1}}\right]Q_i^{q_1-1} \\
&+ P_k^{q_2-1}\sum_{j=1}^{q_1-2}\left[\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^j\sigma_k^{q_2-1}}-\frac{\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^{j+1}\sigma_k^{q_2-1}}\right]Q_i^j+P_k^{q_2-1}Q_i^{q_1-1}\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^{q_1-1}\sigma_k^{q_2-1}} \\
&=: J_1+J_2+J_3+J_4.
\end{aligned}
$$

Начнем с оценки J_1.

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \sum_{l=1}^{q_2-2}\sum_{j=1}^{q_1-2}\left[\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)}{\tau_i^j\sigma_k^l}-\frac{\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j\sigma_k^{l+1}}-\frac{\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^l)}{\tau_i^{j+1}\sigma_k^l}+\frac{\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^{l+1})}{\tau_i^{j+1}\sigma_k^{l+1}}\right]Q_i^jP_k^l \\
&= \sum_{l=1}^{q_2-2}\sum_{j=1}^{q_1-2}\left[\frac{\Delta_{12}\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)}{\tau_i^j\sigma_k^l}-\frac{\Delta_1\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1})p_2h_M}{\tau_i^j\sigma_k^l\sigma_k^{l+1}}-\frac{\Delta_2\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^l)p_1h_N}{\tau_i^j\tau_i^{j+1}\sigma_k^l}\right. \qquad (3.6)\\
&\qquad\left.+\frac{p_1h_Np_2h_M\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^{l+1})}{\tau_i^j\tau_i^{j+1}\sigma_k^l\sigma_k^{l+1}}\right]Q_i^jP_k^l =: K_1+K_2+K_3+K_4,
\end{aligned}
$$

где (см (1.2))

$$
\begin{aligned}
\Delta_{12}\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l) &= \phi\left((\tau_i^j,\tau_i^{j+1}),(\sigma_k^l,\sigma_k^{l+1})\right), \\
\Delta_1\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1}) &= \phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^{l+1})-\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1}), \\
\Delta_2\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^l) &= \phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^{l+1})-\phi(\tau_i^{j+1},\sigma_k^l).
\end{aligned}
$$

Учитывая неравенства (см. (3.2) и [3], стр 551)

$$\tau_i^j\ge jp_1h_N,\quad \sigma_k^l\ge lp_2h_M,\quad |Q_i^j|<2,\quad |P_k^l|<2,$$

будем иметь:

$$|K_1|\le\frac{4}{p_1h_Np_2h_M}\sum_{l=1}^{q_2-2}\sum_{j=1}^{q_1-2}\frac{|\Delta_{12}\phi(\tau_i^j,\sigma_k^l)|}{jl}\le\frac{C}{p_1h_Np_2h_M}V_H(f,(0,\varepsilon)^2). \qquad (3.7)$$

и

$$\begin{aligned}
|K_2| &\leq \sum_{l=1}^{q_2-2}\sum_{j=1}^{q_1-2}\frac{4}{l(l+1)p_2h_Mp_1h_N}\frac{|\Delta_1\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1})|}{j} \\
&= \frac{4}{p_2h_Mp_1h_N}\sum_{l=1}^{q_2-2}\frac{1}{l(l+1)}\sum_{j=1}^{q_1-2}\frac{|\Delta_1\phi(\tau_i^j,\sigma_k^{l+1})|}{j} \qquad (3.8)\\
&\leq \frac{4}{p_1h_Np_2h_M}V_H(\phi,[0,\varepsilon]^2)\sum_{l=1}^{q_2-2}\frac{1}{l(l+1)} \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M}V_H(f,(0,\varepsilon)^2).
\end{aligned}$$

Аналогичным образом получим

$$\begin{aligned}
|K_3| &\leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M}V_H(f,[0,\varepsilon]^2), \qquad (3.9)\\
|K_4| &\leq \frac{4}{p_1h_Np_2h_M}\sum_{l=1}^{q_2-2}\sum_{j=1}^{q_1-2}\frac{\|\phi\|_{C((0,\varepsilon)^2)}}{j(j+1)l(l+1)} \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M}V_H(f,(0,\varepsilon)^2).
\end{aligned}$$

Из соотношений (3.6) – (3.9) находим, что

$$|J_1| \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M}V_H(f,(0,\varepsilon)^2). \tag{3.10}$$

Оценим J_2.

$$\begin{aligned}
|J_2| &\leq \frac{|Q_i^{q_1-1}|}{\tau_i^{q_1-1}}\sum_{l=1}^{q_2-2}\left|\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^l)}{\sigma_k^l}-\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^{l+1})}{\sigma_k^{l+1}}\right||P_k^l| \\
&\leq \frac{|Q_i^{q_1-1}|}{\tau_i^{q_1-1}}\sum_{l=1}^{q_2-2}\left|\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^l)-\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^{l+1})}{\sigma_k^l}\right||P_k^l| \\
&+ \frac{|Q_i^{q_1-1}|}{\tau_i^{q_1-1}}\sum_{l=1}^{q_2-2}\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^{l+1})\left[\frac{1}{\sigma_k^l}-\frac{1}{\sigma_k^{l+1}}\right]|P_k^l| \qquad (3.11)\\
&\leq \frac{C}{(q_1-1)p_1h_Np_2h_M}\sum_{l=1}^{q_2-2}\left|\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^l)-\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^{l+1})}{l}\right| \\
&+ \frac{C}{(q_1-1)p_1h_N}\|\phi\|_{C((0,\varepsilon)^2)}\sum_{l=1}^{q_2-2}\left[\frac{1}{\sigma_k^l}-\frac{1}{\sigma_k^{l+1}}\right] \\
&\leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M}\left[V_H(\phi,[0,\varepsilon]^2)+\|\phi\|_{C((0,\varepsilon)^2)}\right] \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M}V_H(f,(0,\varepsilon)^2).
\end{aligned}$$

Величина J_3 оценивается аналогично, а для J_4 имеем:

$$\begin{aligned}
|J_4| &= \left|P_k^{q_2-1}Q_i^{q_1-1}\frac{\phi(\tau_i^{q_1-1},\sigma_k^{q_2-1})}{\tau_i^{q_1-1}\sigma_k^{q_2-1}}\right| \qquad (3.12)\\
&\leq \frac{4}{p_1h_Np_2h_M}\|\phi\|_{C((0,\varepsilon)^2)} \leq \frac{C}{p_1h_Np_2h_M}V_H(f,(0,\varepsilon)^2).
\end{aligned}$$

Из (3.5) и (3.10) – (3.12) находим, что

$$|J| \leq \frac{C}{p_1 h_N p_2 h_M} V_H(f,(0,\varepsilon)^2), \tag{3.13}$$

что вместе с (3.3) и (3.4) доказывает, что

$$I_6 \leq C \cdot V_H(f,(0,\varepsilon)^2).$$

Как отмечалось выше, отсюда следует неравенство (3.1). Теорема 1.3 доказана.

Abstract. The paper considers a question of convergence of partial sums of two-dimensional trigonometric interpolation polynomials. Convergence by Pringsheim for functions of two variables with bounded harmonic variation is established.

Список литературы

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, ч.2., Москва, Мир (1965).
[2] D. Waterman, On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation, Studia Math., **44**, no. 1, 107 – 117 (1972).
[3] D. Waterman, H. Xing, "The convergence of partial sums of interpolating polynomials", J. Math. Anal. Appl., **333**, 543 – 555 (2007).
[4] А. А. Саакян, "О сходимостй двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. АН АрмССР. Матем., **22**, no. 6, 517 – 529, (1987).

Поступила 12 октября 2013