Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 4, 2014, стр. 3-16.

ОПТИМАЛЬНО РАВНОМЕРНОЕ И КАСАТЕЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ В УГЛЕ

С. АЛЕКСАНЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *asargis@instmath.sci.am*

Аннотация. Для функций f голоморфных во внутренности данного угла и непрерывных на угле рассматриваем задачу равномерного и касательного приближения на угле мероморфными функциями имеющими оптимальный рост на бесконечности. Этот рост зависит от роста функции f в угле и от дифференциальных свойств на границе угла; рост оценивается их неванлинновской характеристикой. При этом рассматривается расположение полюсов приближающих функций на комплексной плоскости.

MSC2010 numbers: 30E10, 30Dxx.

Ключевые слова: равномерное и касательное приближение; мероморфная функция.

1. Введение и вспомогательные сведения

В работе рассматривается задача равномерного и касательного приближения в углах мероморфными функциями имеющими оптимальный рост. Аналогичная задача об оптимально равномерном и касательном приближении целыми функциями в углах исследовалась в работах [1]-[5].

Для угла $\Delta_\alpha = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg \zeta| \le \alpha/2\}$ рассмотрим класс $A(\Delta_\alpha)$ функций f, непрерывных на Δ_α и голоморфных на Δ_α^o. В [6] Тер-Исраелян рассмотрел задачу равномерного приближения функции f мероморфными функциями g на $\Delta_{\alpha-\delta}$ для $\delta \in (0, \alpha)$, с оценкой роста функции g на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в терминах роста неванлиновской характеристикой функции g. Затем в [7], [8] Аветисяном и Аракеляном был уточнен рост приближающих мероморфных функций.

Здесь для равномерного приближения в Δ_α мы предполагаем, что приближаемая функция $f \in A'(\Delta_\alpha)$: т. е. голоморфная на Δ_α^o и непрерывно дифференцируемая на Δ_α, и получаем, что рост приближающих функций зависит от роста f на Δ_α и от роста f' на $\partial\Delta_\alpha$.

В [4] доказана, что если функция $f \in A(\Delta_\alpha)$ допускает равномерное приближение целыми функциями на Δ_α, то порядок приближающих функций нельзя уменьшить от $\pi/(2\pi-\alpha)$, но в случае мероморфного приближения, мы можем рост приближающих функций в терминах их неванлиновской характеристики сделать меньше чем $\exp\{\pi/(2\pi-\alpha)\}$.

В случае касательного приближения рост приближающих мероморфных функций зависит также от скорости приближения.

Задача оптимально равномерного и касательного приближения мероморфными функциями на вещественной оси $\mathbb{R}$ рассмотрена Аракеляном и Аветисяном в работе [9]. Аналогичная задача на полосах рассмотрена в [10].

Работа состоит из двух параграфов. Первый содержит введение и вспомогательные сведения, а второй - формулировки и доказательства основных результатов об оптимально равномерном и касательном приближении на углах мероморфными функциями.

1.1. **Обозначения и определения.** Для множества $E \subset \mathbb{C}$, *замыкание, внутренность* и *границу* E в $\mathbb{C}$ обозначим соответственно через $\overline{E}$, E^o и ∂E.

Пусть E замкнутое множество в $\mathbb{C}$. Для класса $C(E)$ непрерывных функций $f: E \to \mathbb{C}$ обозначим через f_∂ сужение функции f на ∂E, и положим

$$M_f(r) = M_f(r, E) := \|f\|_{E\cap D_r} = \sup_{z\in E\cap D_r} |f(z)|,$$

$$C_b(E) := \{f \in C(E) : \|f\|_E < +\infty\}.$$

Для замкнутого множества $E \subset \mathbb{C}$ положим

$$A(E) = C(E) \cap H(E^o) \quad \text{и} \quad A_b(E) = C_b(E) \cap H(E^o).$$

Положим также:

$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ и $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$;

$D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ для $r > 0$;

$S_h := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| \leq h\}$ для $h > 0$ - полоса;

$l_a(\theta) := \{z \in \mathbb{C} : \arg(z-a) = \theta\}$ для $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $a \in \mathbb{C}$ - луч;

$\Delta_\alpha(\beta) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\arg\zeta - \beta| \leq \alpha/2\}$ для $\alpha, \beta \in (0, 2\pi)$;

$\gamma_\alpha = \partial\Delta_\alpha$ и $\gamma_{\alpha,r} = \gamma_\alpha \cap \overline{D}_r$.

Мы будем использовать функцию Р. Неванлины $\log^+ : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, определяемую формулой:

$$\log^+ x = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \le x \le 1, \\ \log x, & \text{если} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\log^+$ неотрицательная и неубывающая функция на $\mathbb{R}^+$.

Пусть $T(r,g)$ неванлиновская характеристика мероморфной функции g, $g(0) \neq \infty$:

$$T(r,g) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \left| g\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta + \int_0^r n(t,g)\, t^{-1} dt,$$

где $n(t,g)$ число *полюсов* g в D_t (с учетом их кратностей).

Дифференцируемая функция $\rho(r) \ge 0$ на $(0,\infty)$ называется *уточненным порядком* в смысле Валирона (см. [12]), если выполняются следующие два условия:

$$\lim_{r\to\infty} \rho(r) = \rho < +\infty \text{ и } \lim_{r\to\infty} r\rho'(r) \ln r = 0.$$

1.2. Приближение на Δ_α функциями из $A(\Delta_\beta)$, $\beta > \alpha$. В этом пункте мы приблизим функцию $f \in A'(\Delta_\alpha)$ на Δ_α функциями F из класса $A(\Delta_\beta)$ с оценкой роста F на Δ_β.

Лемма 1.1. *Для $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ (если $\alpha < \pi$, то и $\beta < \pi$) существует функция $q(\zeta,z) \in C(\Delta_\beta \times \Delta_\beta)$ и $q(\zeta,\cdot) \in H(\Delta_\beta)$, такая что*

$$q(\zeta,\zeta) = 1 \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o \tag{1.1}$$

и рост q оценим неравенством

$$|q(\zeta,z)| \le c\left((\ln(|u|+1) - \ln(|z|+1))^2 + 1 \right)^{-1} \text{ в } \Delta_\beta \times \Delta_\beta, \tag{1.2}$$

где $\zeta = u + iv$ и $c = c(\alpha,\beta) > 0$ зависят лишь от α и β.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\beta < \pi$. Пусть G конформное отображение из $S^o_{\pi/2}$ в области $\mathbb{C} \backslash (l_i(\pi/2) \cup l_{-i}(-\pi/2))$ (см. [9]):

$$z = G(w) = \frac{1}{2}\left(e^w - e^{-w}\right).$$

Очевидно

$$G(|\mathrm{Re}\, w|) \le |G(w)| \le G(|\mathrm{Re}\, w|) + h \text{ для } w \in S^o_h,\ 0 \le h < \pi/2. \tag{1.3}$$

Положив $z = x + iy = G(u + iv)$, получим

$$x = \frac{1}{2}\left(e^u - e^{-u}\right)\cos v \text{ и } y = \frac{1}{2}\left(e^u + e^{-u}\right)\sin v.$$

Из (1.3), для $\beta \in (0,\pi)$ существует постоянная $h = h(\beta) \in (0,\pi/2)$, такая что $G^{-1}(\Delta_\beta) \subset S_h$. Искомую функцию можно определить формулой:

$$q(\zeta,z) = 25\left[\left(G^{-1}(\zeta) - G^{-1}(z)\right)^2 + 25\right]^{-1} \text{ для } z \in \Delta_\beta \text{ и } \zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o. \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует $q(\zeta,\zeta) = 1$ для $\zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha$. Очевидно, что $q(\zeta,\cdot) \in H(\Delta_\beta)$ для фиксированного $\zeta \in \Delta_\beta$. Теперь мы должны оценить рост функции $q(\zeta,z)$ для $\zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o$ и $z \in \Delta_\beta$. Учитывая, что $\left|G^{-1}(\zeta)\right| \le \ln(|\zeta|+1)+2$, из (1.3), (1.4) получим

$$|q(\zeta,z)| \le \frac{25}{\left(\operatorname{Re} G^{-1}(\zeta) - \operatorname{Re} G^{-1}(z)\right)^2 + 3} \le$$

$$\le c((\ln(|u|+1) - \ln(|z|+1))^2 + 1)^{-1}. \tag{1.5}$$

Для случая $\beta > \alpha \ge \pi$ возьмем

$$q(\zeta,z) = 25\left[\left(G^{-1}\left(\sqrt{\zeta}\right) - G^{-1}\left(\sqrt{z}\right)\right)^2 + 25\right]^{-1} \tag{1.6}$$

(с $\sqrt{1} = 1$). Здесь $G^{-1}(\Delta_{\beta/2}) \subset S_h$, и мы приходим к верхнему случаю.

Таким образом из (1.4) - (1.6) приходим к (1.1), (1.2). $\square$

Теорема 1.1. *Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha < \beta < \min\{\alpha + \pi/2, \pi + \alpha/2\}$, $\varphi \in A(\Delta_\beta)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $F \in A(\Delta_\beta)$, такая что*

$$|f(z)\varphi(z) - F(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \tag{1.7}$$

и рост функции F на Δ_β удовлетворяет, для $r > 0$, неравенству

$$M_F(r) < 3M_f(lr)\,M_\varphi(r) + c\varepsilon \exp\left\{1 + c\varepsilon^{-1}\lambda(3lr,f)\,M_\varphi(r)\right\}, \tag{1.8}$$

где

$$\lambda(r,f) = \max_{|\zeta|\le r}\{(|\zeta|+1)\,|f'_{\bar\partial}(\zeta)|\}, \tag{1.9}$$

$l = 1 + \tan((\beta-\alpha)/2) > 1$, а постоянная $c = c(\alpha,\beta) > 0$ зависит лишь от α и β.

Доказательство. Заменяя f на $\varepsilon^{-1}f$ и F на $\varepsilon^{-1}F$, можем свести доказательство к случаю $\varepsilon = 1$.

Мы докажем лемму двумя шагами. Сначала функцию $f \in A'(\Delta_\alpha)$ приблизим на Δ_α функцией $\Phi \in A(\Lambda)$, потом функцию Φ приблизим на Δ_α функцией $F \in A(\Delta_\beta)$.

Шаг 1. Пусть f_* C^1 продолжение f на Δ_β, взяв $f_*(\zeta) = f(\zeta)$ для $\zeta \in \Delta_\alpha$ и

(1.10) $$f_*(\zeta) := if(u+v) + (1-i)f(u) \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha,$$

где $v = dist(\zeta, \gamma_\alpha) \geq 0$ и $u = \sqrt{|\zeta|^2 - v^2}$ на γ_α для $\zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o$. Из (1.10) следует, что рост f_* на Δ_β удовлетворяет неравенствам

(1.11) $$M_{f_*}(r, \Delta_\beta) \leq 3M_{f'}(lr, \Delta_\alpha).$$

Из формулы Коши-Римана $\overline{\partial} f_*(\zeta) = 0$ для $\zeta \in \Delta_\alpha$ и из (1.10) следует

(1.12) $$\left|\overline{\partial} f_*(\zeta)\right| \leq 2dM_{f'}(l|\zeta|, \gamma_\alpha) \text{ для } \zeta \in \Delta_\beta \backslash \Delta_\alpha^o,$$

где $d = dist(\zeta, \gamma_\alpha) > 0$.

Пусть $\zeta \to n = n(|\zeta|) \in \mathbb{N}$ для $\zeta \in \gamma_\beta$ будет кусочно постоянная функция; фиксируем $n(|\zeta|)$ условием

(1.13) $$0 < n(|\zeta|) - \{|\zeta| \, |f'_\partial(\zeta)|\} \, |\varphi(\zeta)| - 1 \leq 1 \text{ для } \zeta \in \gamma_\beta.$$

Теперь определим замкнутую область Λ с гладкой границей, такую что

$$(n-1)/\ln n \leq dist(\partial\Lambda, \zeta) \leq n/\ln n \text{ для } \zeta \in \gamma_\alpha.$$

Введем новую функцию $Q(\zeta, z)$, такую что $Q(\zeta, \zeta) = 1$ для $\zeta \in \Delta_\beta$:

(1.14) $$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^n,$$

где ζ_0 выберем так, что $dist(\zeta_0, \gamma_\alpha) = 2dist(\zeta, \gamma_\alpha)$ для $\zeta \in \partial\Lambda$. Очевидно, $Q(\zeta, \cdot) \in H(\Lambda)$ для фиксированного $\zeta \in U = \Lambda \backslash \Delta_\alpha$.

Из теоремы и формулы Коши

(1.15) $$\int_{\partial D} Q(\zeta, z) \, C_\zeta(z) \, q(\zeta, z) \, dz = \begin{cases} -2\pi i, & \text{если } \zeta \in D \\ 0, & \text{если } \zeta \in \Lambda - \overline{D} \end{cases}$$

для любой жордановской области $D \subset \Delta_\beta$ с кусочно гладкой, положительно ориентированной границей.

Теперь для $r > 0$ рассмотрим интегралы

(1.16) $$I_r(z) = \pi^{-1} \int_{U_r} G_\zeta(z) \, d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Delta_{\beta,r},$$

с подынтегральной функцией $G_\zeta(z) = \left(\varphi \overline{\partial} f_*\right)(\zeta) \, Q(\zeta, z) \, C_\zeta(z) \, q(\zeta, z)$, где $q(\zeta, z)$ выбраны из Леммы 1.1 удовлетворяющим условиям (1.1) и (1.2), $C_\zeta(z) = (\zeta - z)^{-1}$ и $U_r = U \cap \overline{D}_r$.

Введем новые функции $F_r \in C(\Lambda_r)$ формулой

$$F_r(z) = f_*(z) + I_r(z) \text{ для } z \in \Lambda_r. \tag{1.17}$$

Из (1.1), (1.16) и теоремы Морера следует, что $F_r(z) \in H\left(\Delta^o_{\beta,r}\right)$. Очевидно также, что $F_r \in A(\Lambda_r)$ для любого $r > 0$.

Теперь должны доказать, что $I_r(z)$ локально-равномерно сходится на Λ, при $r \to \infty$, к несобственному интегралу

$$I_\infty(z) = \frac{1}{\pi}\int_E G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.18}$$

Тогда в силу (1.17), искомую функцию $\Phi \in A(\Delta_\beta)$ можно определить формулой

$$\Phi(z) := \varphi(z) f_*(z) + I_\infty(z) \text{ для } z \in \Lambda. \tag{1.19}$$

Из определения (1.19) следует, что

$$\|f\varphi - \Phi\|_{\Delta_\alpha} = \|I_\infty\|_{\Delta_\alpha}, \tag{1.20}$$

и

$$|\Phi(z)| \le |f_*(z)\varphi(z)| + |I_\infty(z)| \text{ для } z \in \Lambda, \tag{1.21}$$

так что приближение функции $f\varphi$ на Δ_α функциями $\Phi \in A(\Lambda)$ и оценка роста Φ на Λ сводится в этой схеме к оценке I_∞.

Перейдем к доказательству локально-равномерной сходимости интегралов $I_r(z)$ на Λ, при $r \to \infty$. Из (1.16), для $z \in \Lambda$ и $\zeta \in U$, мы получим

$$|G_\zeta(z)| \le |q(\zeta, z)| \frac{\left|\varphi\overline{\partial} f_*(\zeta)\right|}{|\zeta - z|} \left(\frac{2l(u) - v}{2l(u)}\right)^{n(lu)}, \tag{1.22}$$

где $\zeta = u + iv$, $u, v \in \gamma_\alpha$ и $l(u) = n(|\zeta|)/\ln n(|\zeta|)$.

Пусть K - компактное множество и $K \subset \Lambda$. Существует $r_0 > 1$, такое что $K \subset \overline{D}_{r_0}$ и $r'' > r' > 3r_0$. Отсюда следует, что $|\zeta - \zeta_0| < e|z - \zeta_0|$. Отсюда получаем следующую оценку интеграла

$$\int_0^{l(u)} \left(\frac{2l(u) - v}{2l(u)}\right)^{n(lu)} dv < \frac{2l(u)}{n(lu) + 1}. \tag{1.23}$$

Учитывая, что

$$\left|\varphi\overline{\partial} f_*(\zeta)\right| \le c_1 v n(lu)/u \text{ для } \zeta \in U, \tag{1.24}$$

и неравенства (1.2) и (1.23), где $c_1 = c_1(\alpha, \beta) > 0$, мы получим

$$\begin{aligned} |I_{r''}(z) - I_{r'}(z)| &\leq c_2 \int_{r'-r_0}^{r''-r_0} \frac{du}{u(\ln u - \ln(|z|+1))^2} < \\ &< c_2 \left(\frac{1}{\ln(r'-r_0)} - \frac{1}{\ln(r''-r_0)} \right) \to 0, \end{aligned}$$

равномерно для $z \in K$, при $r'', r' \to \infty$. Это доказывает абсолютную и локально-равномерную сходимость интеграла $I_\infty(z)$ для $z \in \Lambda$ и что $I_\infty \in A(\Lambda)$.

Для доказательства (1.7), мы должны оценить $|I_\infty(z)|$ для $z \in \Lambda$. Представим интеграл $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$I_\infty(z) = \frac{1}{\pi} \int_{B(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta + \frac{1}{\pi} \int_{E \setminus B(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta = J_1(z) + J_2(z), \tag{1.25}$$

где $B(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in \Lambda \text{ и } |\zeta - z| \leq 1\}$. Для $\zeta \in \Lambda \setminus B(z)$ следует, что $|\zeta - \zeta_0| \leq q|z - \zeta_0|$, где $q = q(\delta) > 0$. Из (1.22)-(1.24) получим

$$|J_2(z)| < \int_2^\infty \frac{1}{u \ln^2 u} du < c_3 \tag{1.26}$$

Представим $\zeta - z = re^{i\theta}$ и из (1.22)-(1.24) получим

$$|J_1(z)| \leq c_4 \int_0^1 \int_0^\pi \frac{n}{u} \left(1 - \frac{r\theta}{2l(u)}\right)^n d\theta dr = c_5. \tag{1.27}$$

Таким образом, с учетом (1.26), (1.27), из (1.25) получим $|I_\infty(z)| < c_6$.

Пусть сейчас $z \in \Lambda$. Представим $I_\infty(z)$ в виде суммы двух интегралов:

$$I_\infty(z) = \int_{D(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta + \int_{E \setminus D(z)} G_\zeta(z)\, d\sigma_\zeta = J_3(z) + J_4(z), \tag{1.28}$$

где

$$D(z) := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta \in E \text{ и } |\zeta - z| \leq 3l(|z|)\}.$$

Второй интеграл уже оценили в (1.26).

Учитывая, что $ne^n < e^{2n}$ и

$$\int_{D(z)} \frac{1}{|\zeta - z|} d\sigma_\zeta < c_4 \sqrt{mesD(z)},$$

из (1.23) и $|\zeta| > (\tan\delta)|z|$ мы получим

$$J_3(z) < \exp\{2n(3l|z|)\} \tag{1.29}$$

Из (1.29) и (1.30) мы приходим к оценке (1.8).

Шаг 2. Функцию Φ непрерывно продолжим, так что $\Phi \in C^1(\Delta_\beta)$:

$$\Phi(\zeta) := i\Phi(u+v) + (1-i)\Phi(u) \text{ для } \zeta = u + iv \in \Delta_\beta \setminus \Lambda,$$

где $v = dist(\zeta, \Lambda)$ и $u = \sqrt{|\zeta|^2 - v^2}$. Рост функции Φ удовлетворяет неравенствам: $M_\Phi(r, \Delta_\beta) \le 3M_\Phi(r, \Lambda)$ для всех $r > 0$.

Введем следующие функции

$$J_r(z) = \int_{W_r} \frac{\overline{\partial}\Phi(\zeta)}{\zeta - z} \left(\frac{\zeta - z}{\zeta_0 - z}\right)^m d\sigma_\zeta, \tag{1.30}$$

где $W = \Delta_\beta \backslash \Lambda^o$ и $m(|\zeta|) = \max\{n(|\zeta|), \ln p\}$ и $p = M_\Phi(|\zeta|)$.

Из (1.31) и определения функции Φ следует, что $J_r(z)$ на Δ_β при $r \to \infty$ локально-равномерно сходится (повторяя рассуждения, использованные в шаге 1) к интегралу J_∞.

Оценим J_∞ на Δ_α и Δ_β. Сначала оценим J_∞ для $z \in \Delta_\alpha$. Из определения функции $\Phi(\zeta)$, следует

$$\left|\overline{\partial}\Phi(\zeta)\right| \le 2\left(2^n + M_\Phi(|\zeta|)\right) \text{ для всех } \zeta \in W.$$

Для оценки J_∞ на Δ_α из (1.31) мы получим

$$J_\infty(z) \le (2^n + p)\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^m,$$

где p и n зависят от $|z|$.

Если $n \ge \ln p$, то $2^n > p$ и получим

$$2^n\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^n < 2^n\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\ln n} < c.$$

Если $n < \ln p$, то имеем

$$2p\left(1 - \frac{1}{\ln n}\right)^{\ln p} < 2p\left(1 - \frac{1}{\ln\ln p}\right)^{\ln p} < c.$$

Таким образом доказано, что

$$|J_\infty(z)| < c \text{ для } z \in \Delta_\alpha. \tag{1.31}$$

Оценивая функции $J_\infty(z)$ как и выше, мы получаем

$$|J_\infty(z)| < \exp\{2m(l|z|)\}. \tag{1.32}$$

Учитывая (1.25)-(1.27) и (1.32), из (1.20) получим, что

$$|f(z)\varphi(z) - F(z)| < c \text{ для } z \in \Delta_\alpha$$

и заменяя c на $1/c$, получим оценку (1.7).

Определим искомую функцию F формулой (см. (1.19))

$$F(z) := \Phi(z) + J_\infty(z) \text{ для } z \in \Delta_\beta, \tag{1.33}$$

и с учетом (1.30) и (1.32), (1.33), мы получим

$$|F(z)| < 3M_f(l|z|)\,M_\varphi(|z|) + \exp\{2n(3l|z|)\} + \exp\{2m(l|z|)\} \text{ для } z \in \Delta_\beta,$$

доказывающее оценку (1.8). Теорема 1.1 доказана. □

2. Приближение мероморфными функциями

Процесс оптимально равномерного приближения в угле Δ_α мероморфными функциями реализуется двумя шагами. На первом шаге мы приблизим функцию $F \in A(\Delta_\beta)$ на Δ_α мероморфными функциями G с оценкой роста G на $\mathbb{C}$, потом используя следующую Лемму 2.1, получим мероморфное приближение $f \in A'(\Delta_\alpha)$ в Δ_α.

2.1. Равномерное мероморфное приближение на Δ_α. Ниже нам понадобится следующая лемма (см. [7], стр. 548-549).

Лемма 2.1. *Для ветви аналитической функции $z \to \sqrt{z}$, $\sqrt{1} = 1$, однозначной в области $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, и для числа $\delta \in [0,1]$ существует мероморфная функция $\omega = \omega_\delta$, с полюсами на $(-\infty, -1)$, такая, что*

$$\left|\omega(z) - \sqrt{z}\right| \le (1/2)\sqrt{|z|} \text{ для } |\arg z| \le \pi - \delta,\ |z| \ge \delta \tag{2.1}$$

и

$$T(r, \omega) = O\left(\log^2 r\right) \text{ при } r \to \infty. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Пусть $F \in A(\Delta_\beta)$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная в $\mathbb{C}$ функция G, такая что*

$$|F(z) - G(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \ge p \tag{2.3}$$

и рост функции G на $\mathbb{C}$ ограничен неравенством

$$T\left(r, \varepsilon^{-1}G\right) < k\int_1^{pr}\int_1^t \log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon}\frac{d\tau dt}{\tau t} + k\log^2(r+1) \text{ для } r \ge p, \tag{2.4}$$

где $k > 0$ постоянная, зависящая лишь от α, β и p. При этом, возможные полюсы приближающих функций расположены на мнимой осы для $\beta < \pi$ и на левой части вещественной осы для $\beta \ge \pi$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему используя метод развитая для доказательства Теоремы 1 из работы [7]. Из Леммы 3 с $\delta = 1$ пусть $\omega(z) = \omega_\delta(iz)$, так что

$$|\omega(\zeta)| \geq |\zeta|^{1/2} \text{ для } \zeta \in \gamma_\beta \text{ и } |\omega(z)| < k_1 + k_2 |z|^{1/2} \text{ для } z \in \Delta_\alpha, \tag{2.5}$$

где здесь и в дальнейшем через $k_j > 0$, $j = 1, 2, \cdots$ обозначаются постоянные, зависящие лишь от α, β and p. Из $\Delta_\alpha \subset \Delta_\beta$ следует, что существует постоянная $k_3 \in (0,1)$, такая что

$$|\zeta - z| > k_3 (|\zeta| + |z|) \text{ для } \zeta \in \Gamma \text{ and } z \in \Delta_\alpha, \tag{2.6}$$

где $\Gamma = (\gamma_\beta \backslash D_1) \cup (\partial D_1 \cap \Delta_\alpha)$.

Теперь введем функцию $Q(\zeta, z)$ рациональную по z и кусочно-аналитическую по $\zeta \in \gamma_\beta$:

$$Q(\zeta, z) = \left(\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right)^{n'}, \tag{2.7}$$

где выбор полюсов ζ' и их кратностей n' осуществляется внизу. Фиксируем число $q = \min\{\sqrt{p}, \cos^2\delta(\beta) / \cos^2\delta(\alpha)\} > 1$, где $\delta(\alpha) = (\pi/2 - \alpha/2)$ для $\alpha < \pi$ и $\delta(\alpha) = (\pi - \alpha/2)$ для $\alpha \geq \pi$; и рассмотрим последовательность $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, $n_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим $\gamma_k = \{\zeta \in \gamma_\beta : q^{k-1} < |\zeta| \leq q^k\}$, $\gamma^+ = \{\zeta \in \gamma_\beta : \operatorname{Im}\zeta > 0\}$ и $\gamma^- = \{\zeta \in \gamma_\beta : \operatorname{Im}\zeta < 0\}$.

Для случая $\alpha < \beta < \pi$ определим множество полюсов приближающих функций (ζ') полагая $\zeta' = iq^k / \cos(\pi/2 - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^+$ и $\zeta' = -iq^k / \cos(\pi/2 - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^-$; и при $\pi \leq \alpha < \beta$ полагаем $\zeta' = -q^k / \cos(\pi - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^+$ и $\zeta' = -q^k / \cos(\pi - \beta/2)$ для $\zeta \in \gamma_k^-$; и $\zeta' = 0$, если $\zeta \in \gamma_0 = \Gamma \cap \partial D_1$ для обеих случаев.

Полагая $q_k = q^k / \cos(\pi - \beta/2)$ и оценивая $Q(\zeta, z)$ для $z \in \Delta_\alpha \backslash D_p$ и $\zeta \in \Gamma$, мы из (2.7) получим

$$\left|\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right| \leq \frac{\sqrt{q^2 \sin^2\delta(\beta) + (q-1)^2 \cos^2\delta(\beta)}}{q \sin\delta(\alpha)} = d_1 < 1. \tag{2.8}$$

Из определения полюсов следует, что для фиксированного $d \in (d_1, 1)$ существует постоянная $\mu = \mu(\alpha, \beta) \in (0,1)$ и $\mu \neq q^{-m}$ для каждого $m \in \mathbb{N}$, такая что

$$\left|\frac{\zeta - \zeta'}{z - \zeta'}\right| \leq d \tag{2.9}$$

для $\zeta \in \Gamma$ и $z \in \overline{D}_{\mu|\zeta|}$. Очевидно, что (2.9) выполняется еще и для $\zeta \in \Gamma \backslash \Gamma_r$, где $\Gamma_r = \Gamma \cap D_r$ и $|z| = \mu q_k$.

Таким образом из (2.7)-(2.9) имеем

$$|Q(\zeta, z)| \leq d^{n_k}, \; k = 1, 2, \cdots, \tag{2.10}$$

для всех случаев рассмотренных выше.

Отсюда повторяя шаги доказательства Теоремы 1 работы [7], мы получим доказательство этой теоремы. $\square$

Следствие 2.1. *Из Теоремы 2.1 и (2.3)-(2.4) следует, что функцию $F \in A(\Delta_\beta)$ порядка $0 < \rho_F < +\infty$ можно на Δ_α равномерно приблизить мероморфными функциями G с полюсами на мнимой осы для $\alpha < \beta < \pi$ и на $\mathbb{R}^-$ для $\pi \leq \alpha < \beta$ с $T(r, G) = O(r^{\rho_F})$, при $r \to +\infty$.*

Следующая теорема является основным результатом этой работы.

Теорема 2.2. *Пусть $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $\varphi \in A(\Delta_\beta)$, $\beta > \alpha$, $p > 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует мероморфная функция g, такая что*

$$|f(z)\varphi(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p \tag{2.11}$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{ \log^+ \frac{M(\tau, f)\, M(\tau, \varphi)}{\varepsilon} + \frac{\lambda(3\tau, f)\, M(\tau, \varphi)}{\varepsilon} \right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} +$$

$$+ k \log^2 (r+1) \text{ для } r \geq p, \tag{2.12}$$

где $k = k(\alpha, p) > 0$ и $\lambda(r, f)$ определены в (1.9). При этом, возможные полюсы приближающих функций лежат на мнимой осы для $\alpha < \pi$ и в левой части вещественной осы для $\alpha \geq \pi$.

Доказательство. непосредственно следует из Леммы 2.1 и из Теоремы 1.1. Фиксируем $\beta > \alpha$ и $\beta < \min\{\alpha + \pi/2, 2\pi\}$, такую что $\tan(\beta/2 - \alpha/2) < p - 1$. Из (1.10) имеем

$$\log^+ \frac{M_F(r)}{\varepsilon} < k \log^+ \frac{M_f(pr)\, M_\varphi(r)}{\varepsilon} + k \frac{\lambda(3pr, f)\, M(r, \varphi)}{\varepsilon}, \tag{2.13}$$

где $k = k(\alpha, p) > 3$.

Таким образом из (1.7) и (2.3) мы приходим к (2.11); а из (1.8)-(1.9), (2.4) и (2.13) получаем оценку (2.12). $\square$

Замечание 2.1. *Если в теореме предположить, что* $f \in A'\left(\Delta_\alpha \cup \overline{D}_p\right)$, *то (2.11) будет выполняется для всех* $z \in \Delta_\alpha$.

В Теореме 2.2, взяв $\varphi \equiv 1$, получим равномерное приближение функции $f \in A'(\Delta_\alpha)$ на Δ_α мероморфными функциями.

Теорема 2.3. *Пусть* $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $p > 1$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует мероморфная функция* g, *такая что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p$$

и

$$T\left(r, \varepsilon^{-1} g\right) < k \int_1^{pr} \int_1^t \left\{\log^+ \frac{M(\tau, f)}{\varepsilon} + \frac{\lambda(3\tau, f)}{\varepsilon}\right\} \frac{d\tau dt}{\tau t} + k \log^2(r+1)$$

для $r \geq p$, *где* $k = k(\alpha, p) > 0$ *и* $\lambda(r, f)$ *определены в (1.9). При этом, возможные полюсы приближающих функций расположены на мнимой осы для* $\alpha < \pi$ *и левой части вещественной осы для* $\alpha \geq \pi$.

В [4] получен следующий результат: если функция $f \in A(\Delta_\alpha)$ допускает равномерное приближение целыми функциями на Δ_α, то порядок приближающих функций нельзя было уменьшить от $\pi/(2\pi - \alpha)$. Из Теоремы 2.2 мы можем указать новые условия на f, допускающее равномерное приближение на Δ_α *мероморфными* функциями g порядка $\rho \in (0, \pi/(2\pi - \alpha))$ (т. е. $T(r, g) = O(r^\rho)$ при $r \to +\infty$). Непосредственно из Теоремы 2.3 следует:

Следствие 2.2. *Пусть* $f \in A'(\Delta_\alpha)$ *для* $\alpha \in (0, 2\pi)$ *с* $\rho_f > 0$ *и функция* $z f_0'(z)$ *ограничена на* γ_α. *Тогда* f *допускает равномерное приближение на* Δ_α *мероморфными функциями порядка* ρ_f.

2.2. **Касательное мероморфное приближение на Δ_α.** В работе [7] касательное приближение функции $f \in A(\Delta_\alpha)$ мероморфными функциями реализовано на $\Delta_{\alpha - \delta}$ для фиксированного $\delta \in (0, \alpha)$. Здесь оно реализуется на всем угле Δ_α. Доказывается следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть* $f \in A'(\Delta_\alpha)$, $\alpha \in (0, 2\pi)$, $p > 1$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тогда существует мероморфная функция* g, *такая что*

$$|f(z) - g(z)| < \varepsilon |z|^{-\rho(|z|)} \text{ для } z \in \Delta_\alpha \text{ и } |z| \geq p, \tag{2.14}$$

и

$$T\left(r,\varepsilon^{-1}g\right) < k\int_1^{pr}\int_1^{t}\left\{\log^+\frac{M_f(\tau)}{\varepsilon}+\rho(\tau)\,\frac{\lambda(3\tau,f)}{\varepsilon}\right\}\frac{d\tau dt}{\tau t}+$$

$$+k(1+\rho(r))\log^2(r+1)\ \text{для } r>p, \tag{2.15}$$

где $k=k(\alpha,\rho,p)>0$ и $\rho(r)$ уточненный порядок в смысле Валирона. При этом, возможные полюсы приближающий функций лежат на некоторых угловых областях.

Доказательство. Из теоремы 5.1 работы [11] (стр. 99) следует существование голоморфной функции $f_\rho \in H\left(\Delta_{\alpha+\delta}\cup D_1\right)$ для фиксированного $\delta\in(0,2\pi-\alpha)$ и постоянной $k_1>0$, такой что

$$2\le |f_\rho(z)|\,|z|^{-\rho(|z|)}\le k_1. \tag{2.16}$$

Применим к функции f_ρ и к области $\Delta_{\alpha+\delta}\cup D_1$ Теорему 2.1 полагая $\varepsilon=1$, $p=2$ мы из (2.3) и (2.16) получим, что приближающая мероморфная функция g_ρ удовлетворяет неравенствам

$$1\le |g_\rho(z)|\,|z|^{-\rho(|z|)}\le 2k_1 \tag{2.17}$$

а согласно (2.16) и (2.4) рост функции g_ρ ограничивается неравенством

$$T(r,g_\rho) < \int_1^{2r}\int_1^{t}\rho(\tau)\log\tau\frac{d\tau dt}{\tau t}+k_2\log^2(r+1)\le$$

$$\le k\rho(2r)\int_1^{2r}\int_1^{t}\rho(\tau)\log\tau\frac{d\tau dt}{\tau t}+k_2\log^2(r+1)\le$$

$$\le k_3\rho(r)\log^3(r+1),\ r\ge 1. \tag{2.18}$$

Применим теперь к функции fg_ρ и к углу Δ_α Теорему 2.1. Если g_1 - приближающая функция, то требуемую мероморфную функцию g получим, полагая $g=g_1/g_\rho$. Тогда согласно по (2.11) мы имеем

$$|f(z)-g(z)| < \frac{\varepsilon}{|g_\rho(z)|}\ \text{для } z\in\Delta_\alpha,\ |z|\ge p,$$

откуда, с учетом (2.17), получим оценку (2.14). Кроме того

$$T\left(r,\varepsilon^{-1}g\right)\le T\left(r,\varepsilon^{-1}g_1\right)+T(r,g_\rho)+k_4,$$

где $k_4>0$, зависит лишь от выбора функции ρ. Оценка (2.15) следует из (2.12) и (2.18), если в (2.12) взять $\varphi=g_\rho$. □

Abstract. For functions that are holomorphic on the interior of given angle and continuous in the angle, we discuss the problem of uniform and tangential approximation in the angle by meromorphic functions having optimal growth at infinity. We show that this growth depends on the growth of underlying function in the angle and the differential properties on the boundary of the angle. We estimate the growth of the function by its Nevanlinna characteristic. Also we describe the possible set of the poles of the approximating functions on the complex plane.

Список литературы

[1] С. Н. Мергелян, "Равномерное приближения функций комплексного переменного". Успехи математических наук, **7**, вып. 2(48), 31 – 122 (1952).
[2] H. Kober, "Approximation by integral functions in the complex plane", Trans. Amer. Math. Soc., **56**, 7 – 31 (1944).
[3] М. В. Келдыш, "О приближении голоморфных функций целыми функциями", ДАН СССР, **47**, no. 4, 243 – 245 (1945).
[4] Н. У. Аракелян, "Равномерное приближение целыми функциями с оценкой их роста", Сиб. Мат. Жур., **4**, no. 5, 977 – 999 (1963).
[5] S. H. Aleksanian and N. H. Arakelian, "Optimal uniform approximation on angles by entire functions", Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, **44**, no. 3, 149 – 164 (2009).
[6] Л. А. Тер-Исраелян, "Равномерное и касательное приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста", Известия АН АрмССР, серия Математика, **6**, no. 1, 67 – 80 (1971).
[7] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян, "Наилучшие приближения мероморфными функциямив в угловых областях", Известия АН АрмССР, серия Математика, **23**, no. 6, 546 – 556 (1988).
[8] Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян и А. А. Гончар, "Об асимптотическах свойствах мероморфных функций", Известия АН АрмССР, серия Математика, **24**, no. 3, 207 – 225 (1989).
[9] Р. А. Аветисян и Н. У.Аракелян, "Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной оси", Известия АН АрмССР, серия Математика, **25**, no. 6, 534 – 548 (1990).
[10] S. H. Aleksanian, "Uniform and tangential approximation on a stripe by meromorphic functions, having optimal growth", Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, **46**, no. 2, 319 – 328 (2011).
[11] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, Распределение значений мероморфных функций, Москва, Наука (1970).

Поступила 2 мая 2013