Известия НАН Армении. Математика, том 49, п. 3, 2014, стр. 68-80.

О ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Л. ПОГОСЯН, А. ПОГОСЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mails: *lusine@instmath.sci.am;* *arnak@instmath.sci.am*

Аннотация. Работа рассматривает поточечную сходимость квазипериодической интерполяции и приводит точную константу для главного члена асимптотической ошибки для гладких функций.

MSC2010 numbers: 42A15.

Keywords: Тригонометрическая интерполяция; квазипериодическая интерполяция; поточечная сходимость.

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем изучение квазипериодической (КП) интерполяции $I_{N,m}(f,x)$, $m \geq 0$ (m целое), $x \in [-1,1]$, которая интерполирует f на равномерной сетке

$$x_k = \frac{k}{N},\ |k| \leq N \tag{1.1}$$

и точна для квазипериодических функций

$$e^{i\pi n\sigma x},\ |n| \leq N,\ \sigma = \frac{2N}{2N+m+1} \tag{1.2}$$

с периодом $2/\sigma$ который стремится к 2 при $N \to \infty$.

Идея КП интерполяции предложена в [2]. Работы [7] и [8] рассматривают $L_2(-1,1)$-сходимость и поведение в окрестностях $x = \pm 1$ с точки зрения предельной функции. Некоторые результаты представлены также в [5] и [6].

Здесь, рассматриваем поточечную сходимость КП интерполяции на $(-1,1)$ и получаем точную константу для главного члена асимтотической ошибки. Некоторые результаты данной работы представлены также в [9].

2. Квазипериодическая интерполяция

Более подробно рассмотрим основные положения реализующие КП интерполяцию (см. (1.1) и (1.2)). Рассмотрим новую функцию $f^*(t)$ определенную на

$[-\sigma, \sigma]$ согласно следующей замены переменной

$$f^*(t) = f\left(\frac{t}{\sigma}\right) = f(x), \ x \in [-1,1], \ t \in [-\sigma, \sigma], \ t = \sigma x.$$

Тогда, интерполяция $f(x)$ на сетке (1.1) влечет интерполяцию $f^*(t)$ на сетке

$$t_k = \sigma x_k = \frac{2k}{2N+m+1}, \ |k| \le N.$$

Получается, что КП интерполяция фактически интерполирует $f^*(t)$ на сетке t_k и точна для функций $e^{i\pi n t}$, $|n| \le N$. Важно отметить, что для $m > 0$, сетка t_k (продолженная на числовую ось 2-периодически) неравномерная, так как

$$t_k - t_{k-1} = \frac{2}{2N+m+1} = h, \ k = -N+1, \ldots, \ N,$$

в то время как $1 - t_N + t_{-N} - (-1) = (m+1)\frac{2}{2N+m+1} \ne h$. Этой неравномерностью и объясняется более быстрая $(O(N^{-q-m-1}))$ поточечная сходимость (Теорема 3.1) КП интерполяции по сравнению со сходимостью ($O(N^{-q-1})$ для четных q или $O(N^{-q-2})$ для нечетных) классической тригонометрической интерполяции реализованной на равномерной сетке (см. [3]). Таким образом, чем больше m, тем более плотнее сетка интерполяции внутри $(-1,1)$, и в результате, тем больше точность. Важно также отметить, что функция f^* зависит от N и в теоремах сходимости этот факт нужно учесть и хотя $f^* \to f$ при $N \to \infty$, но эта зависимость в сущности меняет свойства КП интерполяции.

Рассмотрим случай $m = 0$ для которой сетка t_k равномерная. Тогда КП интерполяция $I_{N,0}(f,x)$ функции f совпадает с классической тригонометрической интерполяцией $I_N^*(f^*, x)$ функции f^* на равномерной сетке $2k/(2N+1)$, $|k| \le N$, и соответственно,

$$\begin{aligned} I_N^*(f^*, t) &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f^*\left(\frac{2k}{2N+1}\right) e^{-i\pi n \frac{2k}{2N+1}} \right) e^{i\pi n t} \\ &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) e^{-i\pi n \sigma \frac{k}{N}} \right) e^{i\pi n \sigma x} = I_{N,0}(f,x), \end{aligned}$$

где $t = \sigma x$. Тероема 3.2 изучает поточечную сходимость $I_{N,0}$ на $(-1,1)$ и приводит точные константы для главного члена асимптотической ошибки.

Пусть $m > 0$. Согласно вышеприведенным замечаниям, имеем

$$I_{N,m}(f,x) = \sum_{k=-N}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right) c_k(x), \tag{2.1}$$

где c_k неизвестные функции подлежащие определению. Так как (2.1) точна для $e^{i\pi n\sigma x}$, получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных

$$e^{i\pi n\sigma x}=\sum_{k=-N}^{N}e^{i\pi n\sigma\frac{k}{N}}c_k(x),\ |n|\le N.$$

Отсюда получим (подробности в [7])

$$c_k(x)=\frac{1}{2N+m+1}\left(\sum_{\ell=-N}^{N}e^{\frac{2i\pi\ell(Nx-k)}{2N+m+1}}\right.$$
$$\left.-\sum_{\ell=1}^{m}e^{\frac{2i\pi(\ell+N)(N+m-k)}{2N+m+1}}\sum_{s=1}^{m}v_{\ell,s}^{-1}\sum_{j=-N}^{N}e^{\frac{2i\pi j(Nx+s-N-m-1)}{2N+m+1}}\right),$$

где $v_{\ell,s}^{-1}$ элементы матрицы обратной к матрице Вандермонда

(2.2)
$$v_{s,\ell}=\alpha_\ell^{s-1},\ \alpha_\ell=e^{\frac{2i\pi(\ell+N)}{2N+m+1}},\ s,\ell=1,\ldots,m,$$

которые имеют следующее явное выражение (см. [1])

(2.3)
$$v_{\ell,s}^{-1}=-\frac{1}{\alpha_\ell^s\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{m}(\alpha_\ell-\alpha_k)}\sum_{j=0}^{s-1}\gamma_j\alpha_\ell^j,\ \ \ell,s=1,...,m.$$

Здесь, γ_j коэффициенты следующего полинома

$$\prod_{j=1}^{m}(x-\alpha_j)=\sum_{j=0}^{m}\gamma_jx^j.$$

Явное выражение для c_k приводит к следующей явной формуле для КП интерполяции

$$I_{N,m}(f,x)=\sum_{n=-N}^{N}F_{n,m}e^{i\pi n\sigma x},$$

где

(2.4)
$$F_{n,m}=\check{f}_{n,m}-\sum_{\ell=1}^{m}\theta_{n,\ell}\check{f}_{\ell+N,m},$$

$$\check{f}_{n,m}=\frac{1}{2N+m+1}\sum_{k=-N}^{N}f\left(\frac{k}{N}\right)e^{-\frac{2i\pi nk}{2N+m+1}}$$

(2.5)
$$\theta_{n,\ell}=e^{\frac{2i\pi(\ell+N)(N+m)}{2N+m+1}}\sum_{s=1}^{m}v_{\ell,s}^{-1}e^{\frac{2i\pi n(s-N-m-1)}{2N+m+1}}.$$

Из (2.2), (2.4) и (2.5) следует, что

(2.6)
$$F_{N+k,m}=0,\ F_{-N-k,m}=0,\ k=1,...,m.$$

Тогда, ввиду $\alpha_s - \alpha_i = O(1/N)$, получим из (2.3), что

$$v_{\ell,s}^{-1} = O\left(N^{m-1}\right), \ N \to \infty, \tag{2.7}$$

$$\theta_{n,\ell} = O\left(N^{m-1}\right), \ N \to \infty. \tag{2.8}$$

Через $R_{N,m}$ обозначим ошибку КП интерполяции $R_{N,m}(f,x) = f(x) - I_{N,m}(f,x)$.

3. Анализ сходимости

Пусть $f \in C^q[-1,1]$ и $A_{sk}(f) = f^{(k)}(1) - (-1)^{k+s} f^{(k)}(-1), \ k = 0, \ldots, q$. Обозначим через f_n коэффициенты Фурье функции f

$$f_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) e^{-i\pi n x} dx.$$

Пусть

$$\delta_n^p\left(\{f_s\}_{s=-\infty}^{\infty}\right) = \delta_n^p\left(\{f_s\}\right) = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} f_{n+p-k}.$$

Сначала докажем несколько лемм.

Лемма 3.1. *Имеет место следующая оценка для $|n| \le N$ при $N \to \infty$*

$$\delta_n^p\left(\left\{(-1)^s e^{\frac{i\pi\beta s}{2N+m+1}}\right\}_{s=-\infty}^{\infty}\right) = \frac{(-1)^n(\pi\beta)^{2p}}{(2N+m+1)^{2p}} e^{\frac{i\pi\beta n}{2N+m+1}} + O\left(N^{-2p-1}\right), \tag{3.1}$$

где β некоторая константа и $p > 0$.

Доказательство. Согласно определению $\delta_n^p(\cdot)$, имеем

$$\begin{aligned}
\delta_n^p\left(\left\{(-1)^s e^{\frac{i\pi\beta s}{2N+m+1}}\right\}\right) &= (-1)^{n+p} e^{\frac{i\pi\beta(n+p)}{2N+m+1}} \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k e^{-\frac{i\pi\beta k}{2N+m+1}} \\
&= (-1)^{n+p} e^{\frac{i\pi\beta(n+p)}{2N+m+1}} \sum_{k=0}^{2p}\binom{2p}{k}(-1)^k \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(i\pi\beta)^t(-1)^t k^t}{t!(2N+m+1)^t} \\
&= (-1)^{n+p} e^{\frac{i\pi\beta(n+p)}{2N+m+1}} \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(-1)^t(i\pi\beta)^t}{t!(2N+m+1)^t}\omega_{2p,t},
\end{aligned}$$

где

$$\omega_{p,t} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}(-1)^k k^t \sim p^t, \ t \to \infty$$

и ([10]) $\omega_{p,t} = 0, \ 0 \le t \le p-1, \ \omega_{p,p} = (-1)^p \ p!$. Это завершает доказательство. □

Пусть $f \in C^{q+2m}[-1,1]$. Обозначим

$$f^*(x) = \begin{cases} f_{left}(x), & x \in [-1, -\sigma), \\ f\left(\frac{x}{\sigma}\right), & x \in [-\sigma, \sigma], \\ f_{right}(x), & x \in (\sigma, 1], \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$f_{left}(x) = \sum_{j=0}^{q+2m} \frac{f^{(j)}(-1)}{j!}\left(\frac{x}{\sigma}+1\right)^j, \quad f_{right}(x) = \sum_{j=0}^{q+2m} \frac{f^{(j)}(1)}{j!}\left(\frac{x}{\sigma}-1\right)^j.$$

Пусть

$$B_n(k) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}.$$

Лемма 3.2. [8] *Пусть* $f^{(q+2m)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $m \geq 1$, $q \geq 0$ *и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \; k = 0, \dots, q-1.$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $n, N \to \infty$

$$f_n^* = \sum_{j=q}^{q+2m} \frac{1}{2^j N^j} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}(2N+m+1)^k}{(j-k)!} B_n(k) + o(n^{-q-2m-1}). \tag{3.3}$$

Пусть

$$\Phi_{k,m}(e^{i\pi x}) = e^{\frac{i\pi}{2}(m-1)x} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{r(m+1)}}{(2r+x)^{k+1}}.$$

Лемма 3.3. *Пусть* $f^{(q+2m)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $m \geq 1$, $q \geq 0$ *и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \; k = 0, \dots, q-1.$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $|n| \leq N + 2m$ *при* $N \to \infty$

$$\begin{aligned} F_{n,m} - f_n^* &= \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1} \sum_{j=q}^{q+m+1} \frac{1}{N^j} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!} \\ &\times \left(\sum_{r\neq 0} \frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r+\frac{2n}{2N+m+1}\right)^{k+1}} - e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{\Phi_{k,m}^{(\tau)}(-1)}{\tau!} \left(e^{\frac{2i\pi n}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau} \right. \\ &\left. - e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}} \sum_{\tau=m}^{q-j+2m} \frac{\Phi_{k,m}^{(\tau)}(-1)}{\tau!} \sum_{\ell=1}^{m} \left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau} \sum_{s=1}^{m} v_{\ell,s}^{-1} e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}} \right) \\ &+ o\left(N^{-q-m-2}\right). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Доказательство. Имеем (детали см. в [8])

$$F_{n,m} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{n+r(2N+m+1)}^* - \sum_{\ell=1}^{m} \theta_{n,\ell} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{N+\ell+r(2N+m+1)}^*, \; n \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

которая показывает, что

$$F_{n,m} - f_n^* = \sum_{r\neq 0} f_{n+r(2N+m+1)}^* - \sum_{\ell=1}^{m} \theta_{n,\ell} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{N+\ell+r(2N+m+1)}^*. \tag{3.6}$$

Теперь, для $|n| \le N+2m$, согласно Лемме 3.2 и формул (2.5), (2.8), получим

$$\begin{aligned}\sum_{r\neq 0} f^*_{n+r(2N+m+1)} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}\\ &\times\sum_{r\neq 0}\frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r+\frac{2n}{2N+m+1}\right)^{k+1}}+o\left(N^{-q-2m-1}\right),\end{aligned} \tag{3.7}$$

и

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{m}\theta_{n,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N+\ell+r(2N+m+1)} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}\\ &\times e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}}\sum_{\ell=1}^{m}\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}\right)\sum_{s=1}^{m}v^{-1}_{\ell,s}e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}}+o\left(N^{-q-m-2}\right).\end{aligned}$$

Тогда, согласно разложению в ряд Тейлора

$$\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}\right)=\sum_{\tau=0}^{2m}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}+O(N^{-2m-1}),$$

получаем

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{m}\theta_{n,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N+\ell+r(2N+m+1)} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}}\\ &\times\sum_{\tau=0}^{2m}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\sum_{\ell=1}^{m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}\sum_{s=1}^{m}v^{-1}_{\ell,s}e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}}+o\left(N^{-q-m-2}\right).\end{aligned}$$

В завершение, принимая во внимание следующие соотношения

$$\sum_{\ell=1}^{m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}\sum_{s=0}^{m-1}v^{-1}_{\ell,s+1}e^{\frac{2i\pi ns}{2N+m+1}}=\left(e^{\frac{2i\pi n}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau},\ \tau=0,\dots,m-1,$$

имеем

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{m}\theta_{n,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N+\ell+r(2N+m+1)} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2N+m+1}\\ \times\sum_{j=q}^{q+m+1}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}e^{-\frac{i\pi(m-1)n}{2N+m+1}}&\left(\sum_{\tau=0}^{m-1}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\left(e^{\frac{2i\pi n}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}\right.\\ +\sum_{\tau=m}^{q-j+2m}\frac{\Phi^{(\tau)}_{k,m}(-1)}{\tau!}\sum_{\ell=1}^{m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}+1\right)^{\tau}&\left.\sum_{s=1}^{m}v^{-1}_{\ell,s}e^{\frac{2i\pi n(s-1)}{2N+m+1}}\right)+o\left(N^{-q-m-2}\right).\end{aligned}$$

Подставляя это и (3.7) в (3.6), получим требуемое. □

Лемма 3.4. *Пусть* $f^{(q+2m)}\in AC[-1,1]$ *для некоторых* $m\ge 1$, $q\ge 0$ *и*

$$f^{(k)}(-1)=f^{(k)}(1)=0,\ k=0,\dots,q-1.$$

Тогда, имеет место следующая оценка при $N \to \infty$

$$F_{N-p,m} = C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+p+1}}{N^{q+m+1}}\binom{m+p}{m} + O\left(N^{-q-m-2}\right), \ p \geq 0, \tag{3.8}$$

$$F_{-N+p,m} = -F_{N-p,m} + O\left(N^{-q-m-2}\right), \ p \geq 0, \tag{3.9}$$

где

$$C_{q,m}(f) = \sum_{k=0}^{q} \frac{A_{kq}(f)(m+1)^{q-k}}{2^{q-k+1} i^k \pi^{k-m+1}(q-k)!}\Phi_{k,m}^{(m)}(-1). \tag{3.10}$$

Доказательство. Имеем из (3.5)

$$F_{N-p,m} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N-p+r(2N+m+1)} - \sum_{\ell=1}^{m}\theta_{N-p,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty} f^*_{N+\ell+r(2N+m+1)}.$$

Согласно Лемме 3.2 и (2.8)

$$F_{N-p,m} = \frac{(-1)^{N+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{1}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!}$$

$$\times\left((-1)^p\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r+\frac{2(N-p)}{2N+m+1}\right)^{k+1}} - \sum_{\ell=1}^{m}(-1)^{\ell}\theta_{N-p,\ell}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{r(m+1)}}{\left(2r+\frac{2(N+\ell)}{2N+m+1}\right)^{k+1}}\right)$$

$$+ o\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Ввиду (2.5) получим

$$\begin{aligned} F_{N-p,m} &= \frac{(-1)^{N+p+1}}{2N+m+1}\sum_{j=q}^{q+2m}\frac{e^{-\frac{i\pi(m-1)(N-p)}{2N+m+1}}}{N^j}\sum_{k=0}^{j}\frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!} \\ &\times\left(\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N-p)}{2N+m+1}}\right) - \sum_{\ell=1}^{m}\Phi_{k,m}\left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}}\right)\sum_{s=0}^{m-1}v^{-1}_{\ell,s+1}e^{\frac{2i\pi(N-p)s}{2N+m+1}}\right) \\ &+ o\left(N^{-q-m-2}\right). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Далее, упростим выражение в скобках, которое обозначим как S (см. также (2.2))

$$\begin{aligned} S &= \Phi_{k,m}\left(\alpha_{-p}\right) - \sum_{\ell=1}^{m}\Phi_{k,m}\left(\alpha_{\ell}\right)\sum_{s=0}^{m-1}v^{-1}_{\ell,s+1}\alpha^s_{-p} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\underset{z=\alpha_j}{res}\frac{\omega\left(\alpha_{-p}\right)\Phi_{k,m}(z)}{\omega(z)\left(z-\alpha_{-p}\right)} + \underset{z=\alpha_{-p}}{res}\frac{\omega\left(\alpha_{-p}\right)\Phi_{k,m}(z)}{\omega(z)\left(z-\alpha_{-p}\right)}, \end{aligned}$$

где $\omega(z) = \prod_{\ell=1}^{m}(z-\alpha_\ell)$. Тогда

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\omega\left(\alpha_{-p}\right)\Phi_{k,m}(z)}{\omega(z)\left(z-\alpha_{-p}\right)}dz,$$

где Γ включает точки $\{\alpha_\ell\}_{\ell=1}^m$ и α_{-p}. Тогда получим

$$S = \frac{(i\pi)^m}{N^m 2\pi i}\frac{(m+p)!}{p!}\int_\Gamma \frac{\Phi_{k,m}(z)}{(z+1)^{m+1}}dz + O\left(N^{-m-1}\right)$$
$$= \frac{(i\pi)^m \Phi_{k,m}^{(m)}(-1)}{N^m}\binom{m+p}{m} + O\left(N^{-m-1}\right).$$

Подставляя это в (3.11), получим первую оценку. Вторую можно доказать аналогично.

□

Следующие теоремы представляют основные результаты работы.

Теорема 3.1. *Пусть $f^{(q+2m)} \in AC[-1,1]$ для некоторых $m \geq 1$, $q \geq 0$ и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \ \ k = 0, \dots, q-1.$$

Тогда, имеет место оценка для $|x| < 1$ при $N \to \infty$

(3.12)
$$R_{N,m}(f,x) = iC_{q,m}(f)\frac{(-1)^N}{N^{q+m+1}}\left[\sin\left(\pi(N+1)\sigma x\right)\sum_{k=0}^{\acute{m}}\binom{m-k}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+1}\cos^{2k+2}\frac{\pi x}{2}}\right.$$
$$\left. - \sin\left(\pi N\sigma x\right)\sum_{k=0}^{\acute{m}-1}\binom{m-k-2}{k}\frac{(-1)^k}{2^{2k+3}\cos^{2k+4}\frac{\pi x}{2}}\right] + o(N^{-q-m-1}),$$

где $\acute{m} = \left[\frac{m}{2}\right]$ и $C_{q,m}(f)$ определен в (3.10).

Доказательство. Согласно определению f^* (см. (3.2)), при фиксированном N имеем

$$f^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* e^{i\pi n x}, \ \ x \in (-1,1).$$

Тогда, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* e^{i\pi n\sigma x}, \ \ x \in [-1,1]$. Поэтому

$$R_{N,m}(f,x) = \sum_{n=-N}^{N}(f_n^* - F_{n,m})e^{i\pi n\sigma x} + \sum_{|n|>N} f_n^* e^{i\pi n\sigma x}.$$

Легко проверить следующее разложение ошибки (см. также [4] для аналогичного разложения)

$$
\begin{aligned}
R_{N,m}(f,x) = {} & e^{i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\hat{m}} \frac{\delta^k_{N+1}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}} \\
& - e^{i\pi(N+1)\sigma x}\sum_{k=0}^{\hat{m}} \frac{\delta^k_{N}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}} \\
& + e^{-i\pi N\sigma x}\sum_{k=0}^{\hat{m}} \frac{\delta^k_{-N-1}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}} \\
& - e^{-i\pi(N+1)\sigma x}\sum_{k=0}^{\hat{m}} \frac{\delta^k_{-N}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}} + r_{N,m}(f,x),
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

где

$$
\begin{aligned}
r_{N,m}(f,x) = {} & \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\hat{m}+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\hat{m}+1}}\sum_{n=-N}^{N} \delta^{\hat{m}+1}_n(\{f^*_s - F_{s,m}\})e^{i\pi\sigma nx} \\
& + \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\hat{m}+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\hat{m}+1}}\sum_{|n|>N} \delta^{\hat{m}+1}_n(\{f^*_s\})e^{i\pi\sigma nx}.
\end{aligned}
$$

Покажем, что

$$
r_{N,m}(f,x) = o(N^{-q-m-1}),\ N\to\infty,\ |x|<1. \tag{3.14}
$$

Применение аналогичного разложения приводит к следующему разложению для $r_{N,m}(f,x)$

$$
\begin{aligned}
r_{N,m}(f,x) = {} & \frac{\delta^{\hat{m}+1}_{-N-1}(\{F_{n,m}\})\,e^{-i\pi N\sigma x} - \delta^{\hat{m}+1}_{N}(\{F_{n,m}\})\,e^{i\pi(N+1)\sigma x}}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}} \\
& + \frac{\delta^{\hat{m}+1}_{N+1}(\{F_{n,m}\})\,e^{i\pi N\sigma x} - \delta^{\hat{m}+1}_{-N}(\{F_{n,m}\})\,e^{-i\pi(N+1)\sigma x}}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}} \\
& + \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}}\sum_{n=-N}^{N} \delta^{\hat{m}+2}_n(\{f^*_s - F_{s,m}\})e^{i\pi\sigma nx} \\
& + \frac{1}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}(1+e^{i\pi\sigma x})^{\hat{m}+2}}\sum_{|n|>N} \delta^{\hat{m}+2}_n(\{f^*_s\})e^{i\pi\sigma nx}.
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Согласно оценке (3.3) Леммы 3.2, получим

$$
\begin{aligned}
\delta^{\hat{m}+2}_n(\{f^*_s\}) = {} & \sum_{j=q}^{q+2m} \frac{1}{2^j N^j}\sum_{k=0}^{j} \frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}(2N+m+1)^k}{(j-k)!}\delta^{\hat{m}+2}_n\left(\{B_s(k)\}_{s=-\infty}^{\infty}\right) \\
& + o(n^{-q-2m-1}).
\end{aligned}
$$

Имеем (см. [3]) $\delta_n^{\acute{m}+2}(\{B_s(k)\}_{s=-\infty}^{\infty}) = O(n^{-2\acute{m}-k-5})$, и поэтому,

$$\delta_n^{\acute{m}+2}(\{f_s^*\}) = O(n^{-2\acute{m}-5}N^{-q}) + o(n^{-q-2m-1}), \ |n| > N, \ N \to \infty.$$

Мы видим, что последний член в правой части (3.15) имеет порядок $o(N^{-q-m-1})$.

Тогда, согласно оценке (3.4) Леммы 3.3, напишем

$$\delta_n^{\acute{m}+2}(\{F_{s,m} - f_s^*\}) = \frac{1}{2N+m+1} \sum_{j=q}^{q+m+1} \sum_{k=0}^{j} \frac{A_{kj}(f)(m+1)^{j-k}}{2^{j-k}(i\pi)^{k+1}(j-k)!N^j}$$
$$\times \left(\frac{(2N+m+1)^{k+1}(i\pi)^{k+1}}{2^k} \delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ \sum_{r\neq 0} B_{t+r(2N+m+1)}(k) \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right) \right.$$
$$- \sum_{s=0}^{m-1} \frac{\Phi_{k,m}^{(s)}(-1)}{s!} \delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ (-1)^{t+1} \left(e^{\frac{2i\pi t}{2N+m+1}} + 1 \right)^s e^{-\frac{i\pi(m-1)t}{2N+m+1}} \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right)$$
$$\left. - \sum_{\tau=m}^{q-j+2m} \frac{\Phi_{k,m}^{(\tau)}(-1)}{\tau!} \sum_{\ell=1}^{m} \left(e^{\frac{2i\pi(N+\ell)}{2N+m+1}} + 1 \right)^{\tau} \sum_{s=0}^{m-1} v_{\ell,s+1}^{-1} \delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ (-1)^{t+1} e^{\frac{i\pi t(2s-m+1)}{2N+m+1}} \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right) \right)$$
$$+ o(N^{-q-m-2}).$$

Ввиду следующей оценки (см. [3])

$$\delta_n^{\acute{m}+2} \left(\left\{ \sum_{r\neq 0} B_{t+r(2N+m+1)}(k) \right\}_{t=-\infty}^{\infty} \right) = O\left(N^{-2\acute{m}-k-5}\right)$$

и согласно Лемме 3.1 и (2.7), имеем

$$\delta_n^{\acute{m}+2}\left(\{F_{s,m} - f_s^*\}\right) = o\left(N^{-q-m-2}\right)$$

и поэтому, третий член в правой части (3.15) имеет порядок $o(N^{-q-m-1})$.

Далее, оценим первые два члена в правой части (3.15). Имеем

$$\delta_N^{\acute{m}+1}\left(\{F_{n,m}\}\right) = \sum_{k=0}^{2\acute{m}+2} \binom{2\acute{m}+2}{k} F_{N+\acute{m}+1-k,m}.$$

Ввиду (2.6), получим

$$\delta_N^{\acute{m}+1}\left(\{F_{n,m}\}\right) = \sum_{k=\acute{m}+1}^{2\acute{m}+2} \binom{2\acute{m}+2}{k} F_{N+\acute{m}+1-k,m}.$$

Согласно Лемме 3.4

$$\delta_N^{\acute{m}+1}\left(\{F_{n,m}\}\right) = C_{q,m}(f) \frac{(-1)^{N+\acute{m}}}{N^{q+m+1}} \sum_{k=\acute{m}+1}^{2\acute{m}+2} (-1)^k \binom{2\acute{m}+2}{k} \binom{m+k-\acute{m}-1}{m} +$$
$$+ O\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Ввиду тождества (см. [10])

$$\sum_{k=\acute{m}+1}^{2\acute{m}+2} (-1)^k \binom{2\acute{m}+2}{k} \binom{m+k-\acute{m}-1}{m} = 0,$$

мы заключаем, что

$$\delta_N^{\acute{m}+1}(\{F_{n,m}\}) = O\left(N^{-q-m-2}\right).$$

Аналогично оценив остальные члены получим (3.14).

Далее, вернемся к первым четырем членам в правой части (3.13), которые обозначим как I_1, I_2, I_3 и I_4, соответственно.

Для I_1 имеем $\delta_{N+1}^k(\{F_{n,m}\}) =$

$$= \sum_{s=0}^{2k} \binom{2k}{s} F_{N+1+k-s,m} = \sum_{s=k+1}^{2k} \binom{2k}{s} F_{N+1+k-s,m} = \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{s+k+1} F_{N-s,m}.$$

Тогда,

$$I_1 = e^{i\pi N\sigma x} \sum_{k=0}^{\acute{m}} \frac{\delta_{N+1}^k(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}}$$

$$= e^{i\pi N\sigma x} \sum_{k=0}^{\acute{m}} \frac{1}{2^{2k+2}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{s+k+1} F_{N-s,m}.$$

Ввиду Леммы 3.4, мы получим

$$I_1 = C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}} e^{i\pi N\sigma x} \sum_{k=1}^{\acute{m}} \frac{1}{2^{2k+2}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}} \sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{2k}{s+k+1}\binom{m+s}{m}$$

$$+ O(N^{-q-m-2}).$$

Применив тождество (см. [10])

$$\sum_{s=0}^{k-1} (-1)^s \binom{2k}{s+k+1}\binom{m+s}{m} = (-1)^{k+1}\binom{m-k-1}{k-1}$$

получим

$$I_1 = C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}} e^{i\pi N\sigma x} \sum_{k=0}^{\acute{m}-1} \binom{m-k-2}{k} \frac{(-1)^k}{2^{2k+4}\cos^{2k+4}\frac{\pi\sigma x}{2}} + O(N^{-q-m-2}).$$

Аналогично, согласно (2.6) и Лемме 3.4, имеем для I_3

$$\delta_{-N-1}^k(\{F_{n,m}\}) = \sum_{s=0}^{2k} \binom{2k}{s} F_{-N-1+k-s,m} = \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{s} F_{-N-1+k-s,m}$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{k-1-s} F_{-N+s,m} = -\sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{k+s+1} F_{N-s,m} + O(N^{-q-m-2}).$$

Тогда,

$$I_3 = e^{-i\pi N\sigma x} \sum_{k=0}^{\bar{m}} \frac{\delta^k_{-N-1}(\{F_{n,m}\})}{(1+e^{-i\pi\sigma x})^{k+1}(1+e^{i\pi\sigma x})^{k+1}}$$

$$= -e^{-i\pi N\sigma x} \sum_{k=0}^{\bar{m}} \frac{1}{2^{2k+2}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}} \sum_{s=0}^{k-1} \binom{2k}{k+s+1} F_{N-s} + O(N^{-q-m-2})$$

$$= -C_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}} e^{-i\pi N\sigma x} \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{m-k-2}{k} \frac{(-1)^k}{2^{2k+4}\cos^{2k+4}\frac{\pi\sigma x}{2}} + O(N^{-q-m-2}).$$

В заключение $I_1 + I_3 =$

$$= iC_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}} \sin(\pi N\sigma x) \sum_{k=0}^{\bar{m}-1} \binom{m-k-2}{k} \frac{(-1)^k}{2^{2k+3}\cos^{2k+4}\frac{\pi\sigma x}{2}} + O(N^{-q-m-2}).$$

Аналогичным образом, $I_2 + I_4 =$

$$= -iC_{q,m}(f)\frac{(-1)^{N+1}}{N^{q+m+1}} \sin(\pi(N+1)\sigma x) \sum_{k=0}^{\bar{m}} \binom{m-k}{k} \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}\cos^{2k+2}\frac{\pi\sigma x}{2}} + O(N^{-q-m-2}),$$

что завершает доказательство. □

Также рассматривается случай $m = 0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $f^{(q+1)} \in AC[-1,1]$ *для некоторого* $q \geq 0$ *и*

$$f^{(k)}(-1) = f^{(k)}(1) = 0, \ \ k = 0, \dots, q-1.$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $|x| < 1$ *при* $N \to \infty$

$$R_{N,0}(f,x) = A_{0q}(f)\frac{(-1)^N}{2^{q+2}N^{q+1}} \frac{\sin \pi N x}{\cos\frac{\pi x}{2}} \sum_{k=0}^{[q/2]} \frac{(-1)^k}{(q-2k)!\pi^{2k+1}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^s}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{2k+1}} + o(N^{-q-1}).$$

Abstract. The paper considers pointwise convergence of quasi-periodical interpolations and obtains an exact constant for the leading term of asymptotic error for smooth functions.

Список литературы

[1] I. Gohberg, V. Olshevsky, "The fast generalized Parker-Traub algorithm for inversion of Vandermonde and related matrices", J. of Complexity **13**, no. 2, 208 – 234 (1997).

[2] A. Nersessian, N. Hovhannesyan, "Quasiperiodic interpolation", Reports of the National Academy of Sciences of Armenia, **101**, no. 2, 115 – 121 (2001).

[3] A. Poghosyan, "Asymptotic behavior of the Krylov-Lanczos interpolation", Analysis and Applications, **7**, no. 2, 199 – 211 (2009).

[4] A. Poghosyan, "On a fast convergence of the rational-trigonometric-polynomial interpolation", Advances in Numerical Analysis, **2013**, article ID 315748, 13 pages, DOI:10.1155/2013/315748.

[5] L. Poghosyan, "On a convergence of the quasi-periodic interpolation", The International Workshop on Functional Analysis, October 12-14, 2012, Timisoara, Romania.

[6] L. Poghosyan, "On a convergence of the quasi-periodic interpolation", The III International Conference of the Georgian Mathematical Union, Batumi, Georgia, September 2-9 (2012).

[7] L. Poghosyan, "On L_2-convergence of the quasi-periodic interpolation", Reports of the National Academy of Sciences of Armenia **113**, no. 3, 240 – 247 (2013).

[8] L. Poghosyan and A. Poghosyan, "Asymptotic estimates for the quasi-periodic interpolations", Armenian Journal of Mathematics, **5**, no. 1, 34 – 57 (2013).

[9] L. Poghosyan and A. Poghosyan, "Convergence acceleration of the quasi-periodic interpolation by rational and polynomial corrections", (abstract) Second International Conference Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives, 24-31 August, Tsaghkadzor, Armenia (2013).

[10] J. Riordan, Combinatorial Identities, Wiley, New York (1979).

Поступила 25 ноября 2013