Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 3, 2014, стр. 50-67.

# О МНОГОЧЛЕНАХ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППЫ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Н. МАРГАРЯН

*Российско-Армянский (Славянский) университет*
E-mails: *vachagan.margaryan@yahoo.com*

Аннотация. Для одного класса многочленов найдены необходимые и достаточные условия чтобы эти многочлены были гипоэллиптическими относительно группы переменных.

**MSC2010 numbers:** 12E10, 26C05.

**Keywords:** гипоэллиптичность, частичная гипоэллиптичность, гипоэллиптичность относительно группы переменных.

## 1. Основные обозначения и определения

Пусть $N$- множество натуральных чисел $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n$ - множество $n$ - мерных мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_j \in N_0 \quad j = 1, ..., n$,
$R^n$ - $n$- мерное вещественное эвклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $C = R \times iR \quad (i^2 = -1)$, $R_+^n = \{\xi \in R^n, \xi_j \geq 0, j = 1, ..., n\}$ и $R_0^n = \{\xi \in$ $\in R^n, \xi_1 ... \xi_n \neq 0\}$.

Для $\xi, \eta \in R^n$, $k, r \in N_0$, $1 \leq k < n$, $1 \leq r \leq n$, $t \in R_+$, $\lambda \in R_+^n$ и $\alpha \in N_0^n$ обозначим $(\xi, \eta) = \xi_1\eta_1 + ... + \xi_n\eta_n$, $\xi \cdot \eta = (\xi_1 \cdot \eta_1, ..., \xi_n \cdot \eta_n)$, $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$, $\quad \xi = (\xi', \xi'')$, $\quad \xi(r) = (\xi_1, ..., \xi_{r-1}, \xi_{r+1}, ..., \xi_n)$, $\quad |\xi| =$ $= (\xi_1^2 + ... + \xi_n^2)^{1/2}$, $\quad t^\lambda = (t^{\lambda_1}, ..., t^{\lambda_n})$, $\quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $\quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha! = \alpha_1! ... \alpha_n!$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial / \partial \xi_j \quad j = 1, ..., n$.

Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum\limits_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$, многочлен, где сумма распространяется по конечному набору $(P) = \{\alpha, \alpha \in N_0^n, a_\alpha \neq 0\}$, $\quad a_\alpha \in C$.

В дальнейшем будем считать, что $D_1 P \cdot ... \cdot D_n P \neq 0$.

Многогранником Ньютона или характеристическим многогранником (х.м.) набора $(P)$, (многочлена $P$) называется минимальный выпуклый многогранник $\Re(P) \subset R_+^n$ содержащий множество $(P) \cup \{0\}$.

Многогранник $\Re \subset R_+^n$ называется правильным (вполне правильным), если компоненты всех внешних (относительно $\Re$) нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней $\Re$ неотрицательны (положительны).

Для х.м. $\Re(P)$ набора $(P) \subset N_0^n$ введем следующие обозначения
$\Re^0(P)$ - множество вершин многогранника $\Re(P)$,
$\Lambda(\Re(P))$ - множество единичных, внешних (относительно $\Re(P)$) нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней $\Re(P)$,

$$\Lambda^+(\Re(P)) \equiv \{\lambda \in \Lambda(\Re(P)) \quad \lambda > 0 \quad (\lambda \in R_+^n \cap R_0^n)\},$$

$$\partial\Re(P) \equiv \{\nu \in \Re(P), \quad \exists\lambda \in \Lambda(\Re(P)); \quad (\nu,\lambda) = d(\lambda), \quad d(\lambda) \equiv \max_{\nu\in\Re(P)}(\nu,\lambda)\}.$$

Грань $\Gamma$ многогранника $\Re \subset R_+^n$ называется главной, если существует (внешняя) нормаль $\lambda$ этой грани, имеющая хотя бы одну положительную координату.

**Определение 1.1.** *(см. [1]) Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ называется гипоэллиптическим, если для любого $0 \neq \alpha \in N_0^n$ $\quad D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$.*

**Определение 1.2.** *(см. [1]) Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ называется частично гипоэллиптическим относительно $\xi' \equiv (\xi_1, ..., \xi_k), k < n$, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий*

(1) для любого $0 \neq \alpha \in N_0^n$ при $|\xi| \to \infty$, когда $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$ остается ограниченным $D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$,

(2) если многочлен $P$ представить в следующем виде

$$P(\xi) = \sum_{\alpha''\in N_0^{n-k}} (\xi'')^{\alpha''} P_{\alpha''}(\xi'),$$

то a) многочлен $P_{0''}(\xi')$ гипоэллиптичен как многочлен от $\xi'$,

b) $P_{\alpha''}(\xi')/P_{0''}(\xi') \to 0$ при $|\xi'| \to \infty\, (\xi' \in R^k)$ для любого $0 \neq \alpha'' \in N_0^{n-k}$.

**Определение 1.3.** *(см. [3]). Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ называется гипоэллиптическим относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$ $k < n$, если для любых $0 \neq \alpha \in N_0^n$ и последовательностей $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^n$*

$$D^\alpha P(\xi^s)/P(\xi^s) \to 0 \text{ как только } |(\xi^s)'| \to \infty \text{ при } s \to \infty.$$

**Определение 1.4.** *(см. [4]). Многочлен $P(\xi) = P((\xi_1, ..., \xi_n))$ называется регулярным (не вырожденным), если существует постоянная $c > 0$ для которой*

$$\sum_{\alpha\in\Re^0(P)} |\xi^\alpha| \le c(|P(\xi)| + 1) \quad \forall\xi \in R^n.$$

В дальнейшем нам понадобится следующий легко проверяемый результат

**Замечание 1.1.** *(см. [4] – [6]). 1) Если х.м. $\Re(P)$ регулярного многочлена $P$ вполне правильный, то многочлен $P$ гипоэллиптичен. 2) Если многочлен $P$ гипоэллиптичен, то его х.м. $\Re(P)$ вполне правильный. 3) Любая $(n-1)$ - мерная некоординатная грань х.м. $\Re \subset R^n_+$ главная. 4) Если х.м. $\Re(P)$ набора $(P) \subset N^n_0$ вполне правильный, то его любая некоординатная грань главная.*

## 2. Предварительные результаты

Из определений 1) - 3) непосредственно следует:

**Предложение 2.1** Пусть $k, n \in N$ и $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$ (частично гипоэллиптичен относительно $\xi'$), то

(1) для любого $j : 1 \le j \le k$ многочлен $Q_j(\xi_j; \xi'') = P(0, ..., 0, \xi_j, 0, ..., 0, \xi'')$ где $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$ гипоэллиптичен относительно $\xi_j$ (частично гипоэллиптичеп относительно $\xi_j$),

(2) для любого $j : k+1 \le j \le n$ многочлен $Q_j(\xi'; \xi_j) = P(\xi', 0, ..., 0, \xi_j, 0, ..., 0)$ гипоэллиптичен относительно $\xi'$ (частично гипоэллиптичен по $\xi'$),

(3) если многочлен $P$ гипоэллиптичен относительно $\xi'$, то он частично гипоэллиптичен относительно $\xi'$,

(4) для любого $\xi'' \in R^{n-k}$ многочлен $\tilde{Q}_{\xi''}(\xi') = P(\xi'; \xi'')$ гипоэллиптичен как многочлен от $\xi'$, следовательно (см. пункт 2) замечания 1.1) $\Re(\tilde{Q}_{\xi''}) \subset R^k_+$ является вполне правильным многогранником и поэтому $\Lambda(\Re(\tilde{Q}_{\xi''})) = \Lambda^+(\Re(\tilde{Q}_{\xi''}))$ при всех $\xi'' \in R^{n-k}$.

**Лемма 2.1.** *(см. [8]) Пусть $k, n \in N$ и $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha \xi^\alpha$ частично гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, то*

*(1) для любого $\alpha \in (P)$, $\alpha' = (\alpha_1, ..., \alpha_k) \in N^k_0$, $0 \ne \alpha'' = (\alpha_{k+1}, ..., \alpha_n) \in N^{n-k}_0$*

$$\alpha' \in \Re(\tilde{Q}_0) \backslash \partial\Re(\tilde{Q}_0), \quad \text{где} \quad \tilde{Q}_0(\xi') = P(\xi'; 0''),$$

*(2) для любого $\xi'' = (\xi_{k+1}, ..., \xi_n) \in R^{n-k} \quad \Re(\tilde{Q}_{\xi''}) = \Re(\tilde{Q}_0)$,*

*(3) если для $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda(\Re(P))$ при некотором $j : 1 \le j \le k \quad \lambda_j > 0$, то существует индекс $l : k+1 \le l \le n$ для которого $\lambda_l > 0$.*

**Лемма 2.2.** *(см. [8]) Пусть $n, k \in N$ и $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha \xi^\alpha$ гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, то*

(1) *для любого* $\alpha \in (P), \alpha'' \neq 0 \quad \alpha' \in \Re(\tilde{Q}_0) \setminus \partial\Re(\tilde{Q}_0)$ *где* $\tilde{Q}_0(\xi') \equiv P(\xi'; 0'')$,

(2) $\Re(\tilde{Q}_{\xi''}) = \Re(\tilde{Q}_0) \quad \forall \xi'' \in R^{n-k}$,

(3) *для любого* $c > 0$ *существует постоянная* $T > 0$ *такая, что*

$$|P(\xi)| \geq c, \forall \xi \in R^n, |\xi'| \geq T, \tag{2.1}$$

(4) *если для* $\lambda \in \Lambda(\Re(P))$ *при некотором* $j : 1 \leq j \leq k \quad \lambda_j > 0$, *то*

$$\lambda \in \Lambda^+(\Re(P)),$$

(5) *если* $\lambda \in \Lambda(\Re(P))$ *нормаль грани для которой некоторая некоординатная грань* $\Re(\tilde{Q}_0)) \subset R^k$ *является подгранью, то* $\lambda \in \Lambda^+(\Re(P))$.

**Следствие 2.1.** *При условии леммы 2.2*

(1) $\inf\limits_{\xi'' \in R^{n-k}} |P(\xi)| \to \infty$ *при* $|\xi'| \to \infty$,

(2) *если* $k = n - 1$, *то для любого* $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \Lambda(\Re(P))$ *имеем* $\lambda_n > 0$.

*Доказательство.* Пункт 1) непосредственно следует из пункта 3) леммы 2.2. Пункт 2) непосредственно следует из пункта 4) леммы 2.2 и пункта 3) замечания 1.1. □

**Следствие 2.2.** *Многочлен* $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ *гипоэллиптичен относительно* $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k) \quad (k < n, \quad k, n \in N)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $a \in C$ *многочлен* $P + a$ *гипоэллиптичен относительно* $\xi'$.

*Доказательство.* непосредственно следует из пункта 1) следствия 2.1 и определения 3. □

Пусть $k, n \in N, k < n$. Обозначим

$$\Pi''(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \exists \alpha' \in N_0^k \quad \alpha \equiv (\alpha'; \alpha'') \in (P)\},$$

$$\Pi''_j(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \exists \alpha' = (0, ..., 0, \alpha_j, 0, ..., 0) \in N_0^k \quad \alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P)\}, \quad j = 1, ..., k$$

а через $\Re(\Pi''(P))$ и $\Re(\Pi''_j(P))$ характеристический многогранник в $R^{n-k}$ наборов $\Pi''(P)$ и $\Pi''_j(P) \quad j = 1, ..., k$ соответственно.

**Лемма 2.3.** *Пусть* $k, n \in N$ *и* $k < n$. *Если многочлен* $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} a_\alpha \xi^\alpha$ *гипоэллиптичен относительно* $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$, *то* $\Re(\Pi''(P)) = \Re(\Pi''_j(P)) \quad j = 1, ..., k$.

*Доказательство.* Пусть, наоборот, при условии леммы существует индекс $j_0$ : $1 \leq j_0 \leq k$ для которого $\Re(\Pi''_{j_0}(P)) \neq \Re(\Pi''(P))$. Так как $\Pi''_{j_0}(P) \subset \subset \Pi''(P)$, следовательно $\Re(\Pi''_{j_0}(P)) \subset \Re(\Pi''(P))$, то это означает, что существует $\lambda'' \in \Lambda(\Re(\Pi''(P)))$ для которого

$$d_{\Pi''(P)}(\lambda'') = \sup_{\nu'' \in \Re(\Pi''(P))} (\nu'', \lambda'') > \sup_{\nu'' \in \Re(\Pi''_{j_0}(P))} \equiv d_{\Pi''_{j_0}(P)}(\lambda'') \geq 0. \tag{2.2}$$

Из определений множеств $\Pi''(P)$ и $\Pi''_{j_0}(P)$ в силу (2.2) имеем, что существует $\beta \in (P), \beta'' \in \Pi''(P) \backslash \Pi''_{j_0}(P)$, следовательно $\sum\limits_{j=1, j \neq j_0} \beta_j \neq 0$ для которого $(\beta'', \lambda'') = d_{\Pi''(P)}(\lambda'')$. Представим многочлен $P$ в виде суммы $\lambda = (0'; \lambda''), 0' \in R^k$ однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in (P), (\alpha, \lambda) = d_j} a_\alpha \xi^\alpha$$

где $d_0 > \ldots > d_M$.

Из определений вектора $\lambda$ и множества $\Pi''(P)$ имеем

$$d_0 = \max_{\alpha \in (P)} (\alpha, \lambda) = \max_{\alpha \in (P)} (\alpha'', \lambda'') = \max_{\nu'' \in \Pi''(P)} (\nu'', \lambda'') = d_{\Pi''(P)}(\lambda''). \tag{2.3}$$

Отсюда, в силу (2.2), имеем, что $d_0 = d_{\Pi''(P)}(\lambda'') > 0$.

Пусть $G(P) = \{\alpha \in (P_0), \alpha_j = \beta_j, j = 1, \ldots, k, j \neq j_0\}$, $m_{j_0}(0) = \max\limits_{\alpha \in G(P)} \alpha_{j_0}$ и $G_0(P) = \{\alpha \in G(P), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(0)\} = \{\alpha = (\gamma'; \alpha'') \in G(P)\}$, где $\gamma' = (\beta_1, \ldots, \beta_{j_0 - 1}, m_{j_0}(0), \beta_{j_0+1}, \ldots, \beta_k)$.

Из определения множества $G_0(P)$ следует, что $G_0(P) \neq \emptyset$ и поэтому существует точка $a \in R_0^{n-k}$ для которой

$$\sum_{\alpha \in G_0(P)} a_\alpha \cdot a^{\alpha''} \equiv c_1 \neq 0 \tag{2.4}$$

Рассмотрим поведение многочленов $P$ и $D_{\xi'}^{\gamma'} P_j(\xi)$ $\quad j = 0, \ldots, M$ на $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^n$, где $\xi_j^s = 0$, $j = 1, \ldots, k$, $j \neq j_0$, $\xi_{j_0} = s^\varepsilon$, $(\xi'')^s = a \cdot s^{\lambda''}$, $s = 1, 2, \ldots$, а $\varepsilon > 0$ пока произвольное число. Из определений последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ и множества $\Pi''_{j_0}(P)$ (если для $\alpha \in (P) \quad \alpha'' \notin \Pi''_{j_0}(P)$, то $((\xi')^s)^{\alpha'} = 0\, s = 1, 2, \ldots$) с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем при всех $s = 1, 2, \ldots$

$$|P(\xi^s)| = \left| \sum_{\alpha \in (P)} a_\alpha (\xi^s)^\alpha \right| = \left| \sum_{\alpha \in (P), \alpha'' \in \Pi''_{j_0}(P)} a_\alpha (\xi_{j_0}^s)^{\alpha_{j_0}} ((\xi'')^s)^{\alpha''} \right| = \tag{2.5}$$

$$= \left| \sum_{\alpha\in(P),\alpha''\in\Pi''_{j_0}(P)} a_\alpha s^{\varepsilon\alpha_{j_0}} a^{\alpha''} s^{(\alpha'',\lambda'')} \right| \le c_2 \cdot s^{d_{\Pi''_{j_0}(P)}(\lambda'')+\varepsilon\cdot m_{j_0}},$$

где $m_{j_0} = \max\limits_{\alpha\in(P),\alpha''\in\Pi''_{j_0}(P)} \alpha_{j_0}$.

Из определений многочлена $P_0$ ($\alpha \in (P_0) <=> \alpha \in (P)$, $(\alpha,\lambda) = (\alpha'',\lambda'') = d_0$), мультииндекса $\gamma'$, числа $m_{j_0}(0)$, множества $G_0(P)$ и последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ в силу (2.1) при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

$$(2.6) \qquad |D_{\xi'}^{\gamma'} P_0(\xi^s)| = \left| \sum_{\alpha\in(P),\alpha'\ge\gamma'} a_\alpha \cdot \frac{\alpha'!}{(\alpha'-\gamma')!}((\xi')^s)^{\alpha'-\gamma'}((\xi'')^s)^{\alpha''} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\alpha\in G_0(P)} a_\alpha \quad \gamma'! \quad a^{\alpha''} \quad s^{(\alpha'',\lambda'')} \right| = c_1 \cdot s^{d_0}.$$

Аналогичным образом с некоторой постоянной $c_3 > 0$ при всех $j = 1, ..., M$ и $s = 1, 2, ...$ имеем

$$(2.7) \qquad |D_{\xi'}^{\gamma'} P_0(\xi^s)| \le c_3 \cdot s^{d_j+\varepsilon(m_{j_0}(j)-m_{j_0}(0))} \text{ при } m_{j_0}(j) \ge m_{j_0}(0),$$

$$(2.8') \qquad |D_{\xi'}^{\gamma'} P_j(\xi^s)| = 0 \text{ при } m_{j_0}(j) < m_{j_0}(0),$$

где $m_{j_0}(j) = \max\limits_{\alpha\in(P_j),\alpha'\ge\gamma'} \alpha_{j_0}$.

Из оценок (2.6)-(2.8), (2.8′) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ (в силу (2.2) и (2.5)) при $s \to \infty$ имеем

$$\left| \frac{D_{\xi'}^{\gamma'} P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| \ge \frac{c_1 \cdot s^{d_0}(1+0(1))}{c_2 \cdot s^{d_{\Pi''_{j_0}(P)}(\lambda'')+\varepsilon m_{j_0}}} \to \infty.$$

Полученное соотношение противоречит условию леммы, так как $\gamma' \ne 0 \quad m_{j_0}(0) > 0$, $(\xi')^s \to \infty$ при $s \to \infty \quad (\xi_{j_0}^s = s^\varepsilon, 1 \le j_0 \le k)$, и доказывает справедливость утверждения. Лемма 2.3 доказана. □

**Следствие 2.3.** *При условиях леммы 2.3 для любых* $1 \le j_1 < ... < j_l \le k$ $(l \le k)$

$$\Re(\Pi''_{j_1,...,j_l}(P)) = \Re(\Pi''(P)) \quad \textit{где} \quad \Re(\Pi''_{j_1,...,j_l}(P))$$

*характеристический многогранник набора*

$$\Pi''_{j_1,...,j_l}(P) \equiv \{\alpha'' \in N_0^{n-k}, \quad \exists\alpha' \in N_0^k, \quad \alpha_j = 0, j \ne j_1, ..., j_l, \quad \alpha = (\alpha';\alpha'') \in (P)\}.$$

*Доказательство.* непосредственно следует из леммы 2.3 так как

$$\Pi''_{j_1}(P) \subset \Pi''_{j_1,...,j_l}(P) \subset \Pi''(P)$$

и следовательно $\Re(\Pi''(P)) = \Re(\Pi''_{j_1}(P)) \subset \Re(\Pi''_{j_1,...,j_l}(P)) \subset \Re(\Pi''(P))$. □

**Следствие 2.4.** *При условиях леммы 2.3 имеем*

$$ord_j P = \max_{\alpha \in (P)} \alpha_j = ord_{k+1} Q_j \quad j = k+1, ..., n,$$

*где* $Q_j((\xi', \xi_j)) \equiv P((\xi', 0, ..., 0, \xi_j, 0...0)) \quad j = k+1, ..., n.$

*Доказательство.* непосредственно следует из леммы 2.3, если заметить, что $\Pi''(Q_j) = \Pi''_j(P) \quad j = k+1, ..., n.$ □

## 3. Некоторые свойства многогранников

**Лемма 3.1.** *Пусть* $n \in N$. *Если многочлен*

$$P((\xi_1; \eta)) = P((\xi_1, \eta_1, ..., \eta_n)) = \sum_{\alpha = (\alpha_1, \beta) \in (P), \beta \in N_0^n} a_{\alpha_1, \beta} \cdot \xi_1^{\alpha_1} \eta^\beta$$

*гипоэллиптичен относительно* $\xi_1$, *то многогранник* $\Re(\Pi''(P)) \subset R_+^n$ *правильный, где*

$$\Pi''(P) = \{\beta \in N_0^n . \exists \alpha_1 \in N_0 \quad \alpha = (\alpha_1, \beta) \in (P)\}.$$

*Доказательство.* Пусть, наоборот, существуют $\mu \in \Lambda(\Re(\Pi''(P))) \subset R_+^n$ и индекс $j : 1 \le j \le n$ для которого $\mu_j < 0$. Ради определенности (см. пункт 3 замечания 1.1)

$$\mu' \equiv (\mu_1, ..., \mu_l) \ge 0 \quad (1 \le l < n) \text{ и } \mu'' = (\mu_{l+1}, ..., \mu_n) < 0.$$

Через $d_{\Pi''(P)}(\mu)$ и $d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)$ обозначим

$$d_{\Pi''(P)}(\mu) = \max_{\nu \in \Re(\Pi''(P))} (\nu, \mu) = \max_{\beta \in \Re^0(\Pi''(P))} (\beta, \mu) = \max_{\beta \in \Pi''(P)} (\beta, \mu),$$

$$d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) \equiv \max_{\beta \in \Re^0(\Pi''(P))} \max_{\nu \in \Pi(\beta)} (\nu, \mu),$$

где для данного $\beta \in N_0^n \quad \Pi(\beta) \equiv \{\nu, \nu \in R_+^n, \nu \le \beta\}$. Так как $\mu \in \Lambda(\Re(\Pi''(P)))$, следовательно существует $\gamma \in \Re^0(\Pi''(P))$ для которого $\gamma'' \ne 0$ и

$$(\gamma, \mu) = d_{\Pi''(P)}(\mu). \tag{3.1}$$

Отсюда в силу предположения $\mu'' < 0$ имеем

$$d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) > d_{\Pi''(P)}(\mu). \tag{3.2}$$

Пусть

$$A(P, \gamma'') \equiv \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in (P), \beta'' \ge \gamma''\} \equiv A_1(P, \gamma'') \cup \tilde{A}_1(P, \gamma'') \equiv$$
$$\equiv \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in A(P, \gamma''), (\beta', \mu') = d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)\} \cup$$
$$\cup \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in A(P, \gamma''), (\beta', \mu') < d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)\},$$
$$A_0(P, \gamma'') \equiv \{\alpha = (\alpha_1; \beta) \in A_1(P, \gamma''), \beta'' = \gamma''\},$$

$$m_1 = \max_{(\alpha_1;\beta)\in A_1(P,\gamma'')} \alpha_1,$$
$$\tilde{A}_0(P,\gamma'') = \{\alpha = (m_1;\beta) \in A_0(P,\gamma'')\}$$

для $\nu \in N_0^n, \nu' = (\nu_1, ..., \nu_l)$ и $\nu'' = (\nu_{l+1}, ..., \nu_n)$. Так как из определений мульти-индекса $\gamma$ и числа $m_1$ следует, что $\tilde{A}_0(P,\gamma'') \neq \emptyset$, то существует точка $a \in R_0^l$ для которого

$$\sum_{\alpha=(m_1;\beta)\in\tilde{A}_0(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta}\cdot\gamma''!a^{\beta'} = c_1 \neq 0. \tag{3.3}$$

Не трудно заметить, что

(1) для любого $\alpha = (\alpha_1, \beta) \in \tilde{A}_1(P,\gamma'')$

$$(\beta',\mu') + (\beta'' - \gamma'', \mu'') \leq \tilde{d}_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu), \tag{3.4}$$

где

$$d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) > \tilde{d}_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) \equiv \max_{(\alpha_1;\beta)\in\tilde{A}_1(P,\gamma'')} (\beta',\mu'), \tag{3.5}$$

(2) для любого $\alpha = (\alpha_1, \beta) \in A_1(P,\gamma'')\backslash A_0(P,\gamma'')$

$$(\beta',\mu') + (\beta'' - \gamma'', \mu'') \leq d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu) - \min_{l+1\leq j\leq n} \mu_j. \tag{3.6}$$

Рассмотрим поведение отношения $D_{\eta''}^{\gamma''}P((\xi_1;\eta))/P((\xi_1;\eta))$ на последовательности $\{(\xi_1^s;\eta^s)\}_{s=1}^{\infty} \subset R^{n+1}$, где $\xi_1^s = s^\varepsilon, (\eta')^s = a\cdot s^{\mu'}, (\eta'')^s = s^{\mu''}$ $s = 1, 2, ...,$ а $\varepsilon > 0$ пока произвольное число

$$m_1^0 = ord_1 P \equiv \max_{(\alpha_1;\beta)\in(P)} \alpha_1 \geq m_1.$$

Так как $A(P,\gamma'') = \tilde{A}_0(P,\gamma'') \cup (A_0(P,\gamma'')\backslash\tilde{A}_0(P,\gamma'')) \cup (A_1(P,\gamma'')\backslash A_0(P,\gamma''))\cup$ $\cup\tilde{A}_1(P,\gamma'') \equiv \tilde{A}_0(P,\gamma'') \cup B_1(P,\gamma'') \cup B_2(P,\gamma'') \cup \tilde{A}_1(P,\gamma'')$, то в силу соотношений (3.3)-(3.4),(3.6), определения множеств $\tilde{A}_0(P,\gamma'')$, $B_1(P,\gamma'')$, $B_2(P,\gamma'')$, $\tilde{A}(P,\gamma'')$ и чисел $m_1, m_1^0$, $d_{\Pi''(P)}(\mu)$, $d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)$, $d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем

$$|D_{\eta''}^{\gamma''}P((\xi_1^s;\eta^s))| = |\sum_{(\alpha_1;\beta)\in A(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta}\cdot\frac{\beta''!}{(\beta''-\gamma'')!}\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')+(\beta''-\gamma'',\mu'')}| \geq$$
$$\geq |\sum_{(\alpha_1;\beta)\in\tilde{A}_0(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta}\cdot\gamma''!\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')}| -$$
$$-|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in B_1(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta}\cdot\gamma''!\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')}| -$$
$$-|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in B_2(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta}\cdot\frac{\beta''!}{(\beta''-\gamma'')!}\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')+(\beta''-\gamma'',\mu'')}| -$$

$$-\left|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in\tilde{A}_1(P,\gamma'')} a_{\alpha_1;\beta}\cdot\frac{\beta''!}{(\beta''-\gamma'')!}\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta',\mu')+(\beta''-\gamma'',\mu'')}\right| \geq$$

$$\geq c_1\cdot s^{\varepsilon m_1+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)} - c_2\cdot s^{\varepsilon(m_1-1)+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)} -$$

$$-c_2\cdot s^{\varepsilon m_1^0+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)-\min\limits_{l+1\leq j\leq n}\mu_j} - c_2\cdot s^{\varepsilon m_1^0+\tilde{d}_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)}.$$

Отсюда при достаточно малых $\varepsilon > 0$, в силу (3.5) имеем, что

$$|D_{\eta''}^{\gamma''}P((\xi_1^s;\eta^s))| \geq c_1\cdot s^{\varepsilon m_1+d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)}(1+0(1)). \tag{3.7}$$

Для многочлена $P$ с некоторой постоянной $c_3$ при всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$|P((\xi_1^s;\eta^s))| = \left|\sum_{(\alpha_1;\beta)\in(P)} a_{\alpha_1;\beta}\cdot(\xi_1^s)^{\alpha_1}(\eta^s)^{\beta}\right| = \tag{3.8}$$

$$= \left|\sum_{\beta\in\Pi''(P),(\alpha_1;\beta)\in(P)} a_{\alpha_1;\beta}\cdot a^{\beta'}\cdot s^{\varepsilon\alpha_1+(\beta,\mu)}\right| \leq c_3\cdot s^{\varepsilon m_1^0+d_{\Pi''(P)}(\mu)}.$$

Из оценок (3.6) и (3.7), в силу (3.2), при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем

$$|D_{\eta''}^{\gamma''}P((\xi_1^s;\eta^s))|/|P((\xi_1^s;\eta^s))| \geq \frac{c_1}{c_3}\cdot s^{d_{\Pi(\Pi''(P))}(\mu)-d_{\Pi''(P)}(\mu)+\varepsilon(m_1-m_1^0)} \to \infty,$$

когда $s \to \infty$. Это противоречит условию леммы так как $\gamma'' \neq 0$ и $\xi_1^s = s^{\varepsilon} \to \infty$ при $\to \infty$. Полученное противоречие доказывает, что при условии леммы многогранник $\Re(\Pi''(P)) \subset R_+^n$ правильный. Лемма 3.1 доказана. $\square$

**Следствие 3.1.** *Пусть $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$ гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, то многогранник $\Re(\Pi''(P))$ правильный.*

*Доказательство.* непосредственно следует из леммы 3.1., если заметить, что в силу пункта 1) предложения 2.1 многочлен $Q_1(\xi_1;\xi'') = P(\xi_1, 0, \dots, 0, \xi'')$ $(\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n))$ гипоэллиптичен относительно $\xi_1$ а в силу леммы 2.3 и следствия 2.4 получаем $\Re(\Pi''(P)) = \Re(\Pi''(Q_1))$. $\square$

**Лемма 3.2.** *Пусть $k, n \in N$ и $k < n$. Если многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum_{\alpha\in(P)} a_\alpha\xi^\alpha$ гипоэллиптичен относительно $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, то $\Re(P\cup\tilde{\Pi}''(P)) \subset R_+^n$ правильный, где $\tilde{\Pi}''(P) \equiv \{(0';\alpha'') \in N_0^n, \alpha'' \in \Pi''(P)\}$.*

*Доказательство.* Пусть, наоборот, существует $\lambda \in \Lambda(\Re(P\cup\tilde{\Pi}''(P)))$ и индекс $j_0 : 1 \leq j_0 \leq n$ для которого $\lambda_{j_0} < 0$. Представим многочлен $P$ в виде суммы $\lambda$ - однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M}\sum_{(\alpha,\lambda)=d_j} a_\alpha\xi^\alpha,$$

где $d_0 > \dots > d_M$, $\quad d_0 \geq 0,\ 0 \in \Re(P)$.

Пусть $m_{j_0}(j) = \max\limits_{\alpha\in(P_j)} \alpha_{j_0} \quad j = 0, ..., M$. Так как $\lambda$ - нормаль $(n-1)$ - мерной некоординатной грани, то не трудно заметить, что существует мультииндекс $\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \cap (P)$ для которого $\beta_{j_0} > 0$ следовательно $m_{j_0}(0) > 0$. Пусть $B \equiv \{j; \quad 0 \le j \le M, \quad m_{j_0}(j) \ge m_{j_0}(0)\}$,

$$\chi \equiv \max_{j\in B}\{d_j - m_{j_0}(j)\cdot\lambda_{j_0}\}, \quad B_1 \equiv \{j \in B, d_j - m_{j_0}(j)\cdot\lambda_{j_0} = \chi\},$$

$$m^0_{j_0} \equiv \max_{j\in B_1} m_{j_0}(j) \quad (\ge m_{j_0} > 0).$$

Так как $0 \in B$, то отсюда, в силу предположения $\lambda_{j_0} < 0$ имеем, что

$$\chi \ge d_0 - m_{j_0}(0)\lambda_{j_0} > 0. \tag{3.9}$$

Поскольку $d_0 > ... > d_M$ и $\lambda_{j_0} < 0$, следовательно $d_j/\lambda_{j_0} < d_l/\lambda_{j_0}$ при всех $j < l, \quad j, l = 0, ..., M$, то существует единственный индекс $j_1 : 0 \le j_1 \le M$ для которого $m_{j_0}(j_1) = m^0_{j_0}$, так как в обратном случае при $j, l \in B_1, j < l$ имели бы

$$m_{j_0}(j) = \frac{d_j - \chi}{\lambda_{j_0}} < \frac{d_l - \chi}{\lambda_{j_0}} = m_{j_0}(l).$$

Отсюда имеем, что

$$\{j\}_{j=0}^M = \{j_1\} \cup \{j : 0 \le j \le M, m_{j_0}(j) < m_{j_0}(j_1)\} \cup$$
$$\cup \{j : 0 \le j \le M, m_{j_0}(j) > m_{j_0}(j_1)\} \equiv \{j_1\} \cup G_1 \cup G_2.$$

Рассмотрим следующие возможные случаи

1. $\lambda' \not\le 0$ 2. $\lambda' \le 0$ где $\lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$.

Пусть $\lambda' \not\le 0$. Тогда, существует $l : 1 \le l \le k$ такое, что $\lambda_l > 0$. Рассмотрим поведение отношения

$$D^{m_{j_0}(j_1)}_{j_0} P(\xi)/P(\xi)$$

на последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty \subset R^n$, где $\xi^s_j = a_j s^{\lambda_j} \quad j = 1, ..., n, \quad j \ne$ $\ne j_0$ и $\xi^s_{j_0} = s^{\lambda_{j_0}} \quad s = 1, 2, ...$, а точка $a(j_0) = (a_1, ..., a_{j_0-1}, a_{j_0+1}, ..., a_n) \in$ $\in R^{n-1}_0$ выбрано так, чтобы

$$\sum_{\alpha\in(P),\alpha_{j_0}=m_{j_0}(j_1)} a_\alpha \cdot a^{\alpha(j_0)}(j_0)\cdot m_{j_0}(j_1)! \equiv c_1 \ne 0. \tag{3.10}$$

С некоторой постоянной $c_2 > 0$ при достаточно больших $s$ имеем

$$|P(\xi^s)| = \sum_{j=0}^M |P_j(\xi^s)| \le c_2\cdot s^{d_0}(1 + 0(1)). \tag{3.11}$$

Из определений чисел $m_{j_0}(j_1)$ и $\chi$, в силу (3.9) при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

(3.12)

$$|D^{m_{j_0}(j_1)}_{j_0} P_{j_1}(\xi^s)| = |\sum_{\alpha\in(P),\alpha_{j_0}=m_{j_0}(j_1)} a_\alpha \cdot a^{\alpha(j_0)}(j_0)\cdot m_{j_0}(j_1)! \cdot s^{(\alpha,\lambda)-m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}}| =$$

$$= c_1 \cdot s^{d_{j_1} - m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}} = c_1 \cdot s^{\chi}.$$

При $j \in G_1$ из определений чисел $m_{j_0}(j)$ и $j_1$ имеем, что

$$D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_{j_1}(\xi^s) = 0 \quad s = 1, 2, ... \tag{3.13}$$

Так как $\lambda_{j_0} < 0$ и $m_{j_0}(j) > m_{j_0}(j_1)$, то при $j \in G_2$, с некоторой постоянной $c_3 > 0$ имеем, что

(3.14)

$$|D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_{j_1}(\xi^s)| = |\sum_{\alpha \in (P), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(j_1)} a_\alpha \cdot \frac{\alpha_{j_0}!}{(\alpha_{j_0} - m_{j_0}(j_1))!} (\xi^s_{j_0})^{\alpha_{j_0} - m_{j_0}(j_1)} \cdot (\xi^s(j_0))^{\alpha(j_0)}| =$$

$$= c_3 \cdot s^{d_j - m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}} = 0(s^{d_j - m_{j_0}(j_1)\lambda_{j_0}}) = 0(s^{\chi}).$$

Так как $\lambda_{j_0} < 0, \quad m_{j_0}(0) > 0$, следовательно в силу (3.8) $d_0 < d_0 - m_{j_0}(0)\,\lambda_{j_0} \le \chi$, то из оценок (3.9) - (3.13) при $s \to \infty$ имеем

$$\left| \frac{D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| = \frac{|D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_{j_1}(\xi^s)| - \sum\limits_{j \in G_1 \cup G_2} |D_{j_0}^{m_{j_0}(j_1)} P_j(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \ge \frac{c_1 s^{\chi}(1 + 0(1))}{c_2 s^{d_0}(1 + 0(1))} \to \infty.$$

Это противоречит условию леммы и доказывает, что при условии леммы случай 1) не возможен. Рассмотрим случай 2). Сначала покажем, что при условии леммы в случае 2) $\lambda' = 0$ и следовательно $k + 1 \le j_0 \le n \quad (\lambda_{j_0} < 0)$.

Предположим обратное, что при условии леммы в случае 2) для некоторого $l : 1 \le l \le k \quad \lambda_l < 0$. Так как $\lambda$ - нормаль $(n-1)$ - мерной некоординатной грани многогранника $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$, то существует мультииндекс $\beta \in \Re^0(P \cup \cup \tilde{\Pi}''(P)) \cap (P)$ для которого $\beta_l \ne 0$ и $(\beta, \lambda) = d_0$. Поскольку, в силу определения множества $\Pi''(P) \quad \beta'' = (\beta_{k+1}, ..., \beta_n) \in \Re(\Pi''(P)) \subset R_+^{n-k}$, то $(0', \beta'') \in \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$ и следовательно

$$(\beta'', \lambda'') \le d_0 = (\beta, \lambda).$$

Откуда $(\beta', \lambda') \ge 0$. Это противоречит предположению $\lambda_l > 0$ так как $\beta_l > > 0, \quad \beta_j \ge 0$ и $\lambda_j \le 0 \quad j = 1, ..., k, \quad j \ne l$. Полученное противоречие доказывает, что при условии леммы в случае 2) $\lambda' = 0$. Тогда

$$(P_0) = \{\alpha \in (P), \quad (\alpha, \lambda) = d_0\} = \{\alpha = (\alpha'\alpha'') \in (P), \quad (\alpha'', \lambda'') = d_0\}.$$

Пусть

$$m_0' = \max_{\alpha \in (P_0)} |\alpha'|, \quad A_0(P) \equiv \{\alpha \in (P_0), |\alpha| = m_0'\}.$$

Рассмотрим поведение отношения

$$D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P(\xi)/P(\xi)$$

на последовательности $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$, где $\xi_j^s = s^{\varepsilon}$ $j = 1, ..., k$ $(\xi'')^s = a \cdot s^{\lambda''}$, $\varepsilon > 0$ пока произвольное число, а точка $a \in R_0^{n-k}$ выбрано так, чтобы

$$(3.15) \qquad \sum_{\alpha \in A_0(P)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha''(j_0)}(j_0) = c_4 \neq 0,$$

где для точки $b = (b_{k+1}, ..., b_n) \in R_0^{n-k}$ и числа $j_0 : k+1 \leq j_0 \leq n$

$$b(j_0) = (b_{k+1}, ..., b_{j_0-1}, b_{j_0+1}, ..., b_n).$$

Так как $\lambda' = 0$, следовательно $(\alpha'', \lambda'') = d_j$ для любого $\alpha \in (P_j)$ $j = 0, ..., M$, то с некоторой постоянной $c_5 > 0$ при всех $s$ имеем

$$(3.16) \qquad |P(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M} |P_j(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M} \Big| \sum_{\alpha \in (P), (\alpha'', \lambda'') = d_j} a_\alpha \cdot (s^{\varepsilon})^{\alpha'} \cdot (a \cdot s^{\lambda''})^{\alpha''} \Big| \leq$$

$$\leq c_5 \sum_{j=0}^{M} s^{d_j + \varepsilon \cdot m'} \leq c_5 \cdot s^{d_0 + \varepsilon \cdot m'} (1 + 0(1)),$$

где $m' \equiv \max_{\alpha \in (P)} |\alpha'| \geq m_0'$. Из определения числа $m_{j_0}(0)$, в силу (3.14) при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

$$|D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_0(\xi^s)| = \Big| \sum_{\alpha \in (P_0), \alpha_{j_0} = m_{j_0}(0)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha''(j_0)}(j_0) \cdot s^{\varepsilon|\alpha'|} \cdot s^{(\alpha'', \lambda'') - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0}} \Big| \geq$$

$$(3.17) \qquad \geq \Big| \sum_{\alpha \in A_0(P)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha(j_0)}(j_0) \Big| \cdot s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m_0'} -$$

$$- \Big| \sum_{\alpha \in (P_0) \setminus A_0(P)} a_\alpha \cdot m_{j_0}(0)! a^{\alpha(j_0)}(j_0) \Big| \cdot s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon(m_0' - 1)} =$$

$$= c_4 s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m_0'} (1 + 0(1)).$$

С некоторой постоянной $c_6 > 0$, при $j = 1, ..., M$, аналогичным образом имеем

$$(3.18) \qquad |D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_j(\xi^s)| \leq c_6 \cdot s^{d_j - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m'}.$$

Из оценок (3.15)-(3.17), так как $d_j < d_0$ $j = 1, ..., k$, $\lambda_{j_0} < 0$ и $m_{j_0}(0) > 0$ то, при достаточно малых $\varepsilon > 0$, когда $s \to \infty$ имеем

$$(3.19) \qquad \left| \frac{D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P(\xi^s)}{P(\xi^s)} \right| = \frac{|D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_0(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M} |D_{j_0}^{m_{j_0}(0)} P_j(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \geq$$

$$\geq \frac{c_4 \cdot s^{d_0 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m_0'} - c_6 \cdot s^{d_1 - m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon m'} (1 + 0(1))}{c_5 \cdot s^{d_0 + \varepsilon m'}} = \frac{c_4}{c_5} s^{-m_{j_0}(0) \cdot \lambda_{j_0} + \varepsilon(m_0' - m')} \to \infty.$$

Это противоречит условию леммы так как $(\xi^s)' \to \infty$ при $s \to \infty$. Следовательно, многогранник $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$ правильный. Лемма 3.2 доказана. □

**Лемма 3.3.** *При условии леммы 3.2 для любого* $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$ $\lambda'' \equiv (\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n) > 0$.

*Доказательство.* В силу леммы 3.2 имеем, что для любого $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$, $\lambda \geq 0$. Предположим, обратное, что при условии леммы существуют $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$ и индекс $j_0 : k+1 \leq j_0 \leq n$ (не умаляя общности будем считать, что $j_0 = k+1$) для которого с учетом выше сказанного $\lambda_{k+1} = 0$. Проводя аналогичные рассуждения как при доказательстве пункта 4) леммы 2.2 и учитывая, что $\lambda_{k+1} = 0$ получим $\lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_k) = 0$. Так как $\lambda$ нормаль к $(n-1)$- мерной некоординатной грани многогранника $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$, то в силу вышесказанного существует индекс $j_1 : k+2 \leq j_1 \leq n$ для которого $\lambda_{j_1} > 0$. Пусть ради определенности $\lambda_j = 0 \quad j = 1, ..., k+l, \quad 1 \leq l < n-k$ и $\lambda_j >> 0 \quad j = k+l+1, ..., n$. Представим многочлен $P$ в виде суммы $\lambda$ - однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in (P), (\alpha,\lambda) = d_j} a_\alpha \cdot \xi^\alpha,$$

где $d_0 > ... > d_M$. В силу предположения $\lambda_j = 0 \quad j = 1, ..., k+l$ имеем, что

$$(P_0) = \{\alpha \in (P), (\alpha, \lambda) = d_0\} = \{\alpha \in (P), \sum_{j=k+l+1}^{n} \alpha_j \lambda_j = d_0\} = \{\alpha \in (P), (\alpha'', \lambda'') = d_0\}.$$

Так как $\lambda$ - нормаль к $(n-1)$- мерной некоординатной грани $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$, то существует мультииндекс $\beta \in (P_0)$ для которого $\beta_{k+1} \neq 0$. Пусть

$$m_{k+1}(0) = \max_{\alpha \in (P_0)} \alpha_{k+1}, \quad A(P_0) = \{\alpha \in (P_0), \alpha_{k+1} = m_{k+1}(0)\},$$
$$m' = \max_{\alpha \in A(P_0)} |\alpha'|, \quad A_1(P_0) = \{\alpha \in A(P_0), |\alpha'| = m'\}.$$

Из определения множества $A_1(P_0)$ имеем, что $A_1(P_0) \neq \emptyset$, следовательно существует точка $b \in R_0^{n-k-1}$ для которого

$$\sum_{\alpha \in A_1(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0)! b^{\alpha(k+1)} \neq c_1 \neq 0, \tag{3.20}$$

где $\alpha(k+1) = (\alpha_{k+2}, ..., \alpha_n)$. Рассмотрим поведение отношения $D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P(\xi)/P(\xi)$ на последовательности $\{\xi_{s=1}^{\infty}\}$, где $\xi_j^s = a_j \cdot s^\varepsilon$, $j = 1, ..., k$, $a_j \in R$, $j = 1, ..., k$, $\xi_{k+1}^s = 0$, $\xi_j^s = b_j \cdot s^{\lambda_j}$, $j = k+2, ..., n$, а $\varepsilon > 0$ пока произвольное число. Из вида вектора $\lambda$ и определения числа $m'$ с некоторой постоянной $c_2 > 0$ при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

(3.21)

$$|P(\xi^s)| \leq |P_0(\xi^s)| + \sum_{j=1}^{M} |P_j(\xi^s)| \leq c_2 \cdot s^{d_0 + \varepsilon \cdot m'} + c_2 \sum_{j=1}^{M} s^{d_j + \varepsilon \cdot \bar{m}'} = c_2 \cdot s^{d_0 + \varepsilon \cdot m'}(1 + 0(1)).$$

где $\tilde{m}' = \max_{\alpha \in (P)} |\alpha'|$.

Из определения числа $m_{k+1}(0)$ и вида $\lambda \quad (\lambda_{k+1} = 0)$ в силу (3.18) при достаточно больших $s$ с некоторой постоянной имеем

$$(3.22) \quad |D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_0(\xi^s)| = |\sum_{\alpha \in A(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0)! b^{\alpha(k+1)} \cdot s^{\varepsilon \alpha'} \cdot s^{(\alpha'', \lambda'') - \alpha_{k+1} \cdot \lambda_{k+1}}| =$$

$$= |\sum_{\alpha \in A(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0) b^{\alpha(k+1)} \cdot s^{d_0 + \varepsilon |\alpha'|}| \geq |\sum_{\alpha \in A_1(P_0)} a_\alpha \cdot m_{k+1}(0) b^{\alpha(k+1)}| \cdot s^{d_0 + \varepsilon m'} -$$

$$- \sum_{\alpha \in A(P_0) \setminus A_1(P_0)} |a_\alpha \cdot m_{k+1}(0) b^{\alpha(k+1)}| \cdot s^{d_0 + \varepsilon |\alpha'|} \geq c_1 \cdot s^{d_0 + \varepsilon m'} - c_3 \cdot s^{d_0 + \varepsilon (m' - 1)} =$$

$$= c_1 \cdot s^{d_0 + \varepsilon m'} (1 + 0(1)).$$

Для $j = 1, ..., M$ аналогичным образом с некоторой постоянной $c_4 > 0$ при всех $s = 1, 2, ...$ имеем

$$(3.23) \qquad |D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_j(\xi^s)| =$$

$$\left| \sum_{\alpha \in (P_j), \alpha_{k+1} \geq m_{k+1}(0)} a_\alpha \cdot \frac{\alpha_{k+1}!}{(\alpha_{k+1} - m_{k+1}(0))!} \cdot s^{\varepsilon |\alpha'|} \cdot s^{(\alpha'', \lambda'') - (\alpha_{k+1} - m_{k+1}(0)) \cdot \lambda_{k+1}} \right| \leq$$

$$\leq c_3 \cdot s^{d_j + \varepsilon \tilde{m}'}.$$

Из оценок (3.19)-(3.21) при достаточно малых $\varepsilon > 0$, в силу того, что $d_j < < d_0 \quad j = 1, ..., M$ имеем

$$|\frac{D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P(\xi^s)}{P(\xi^s)}| \geq \frac{|D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_0(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M} |D_{k+1}^{m_{k+1}(0)} P_j(\xi^s)|}{|P(\xi^s)|} \geq$$

$$\geq \frac{c_1 \cdot s^{d_0 + \varepsilon m'} (1 + 0(1))}{c_2 \cdot s^{d_0 + \varepsilon m'}} \geq \frac{c_1}{c_2} (1 + 0(1)).$$

Полученное противоречие доказывает справедливость леммы 3.3. □

**Лемма 3.4.** *При условиях леммы 3.2, при всех $\nu'' \in \Pi''(P)$ для которых существует $0 \neq \nu' \in R_+^k$ такое, что $(\nu'; \nu'') \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$ многогранник*

$$\Im(P, \nu'') \equiv \{\beta' \in R_+^k, (\beta'; \nu'') \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))\} \subset R_+^k$$

*вполне правильный.*

*Доказательство.* Пусть $\{\lambda^j\}_{j=1}^m = \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))), \quad m \in N$. Тогда $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) = \{\nu \in R_+^n, (\nu, \lambda^j) \leq d(\lambda^j) \quad j = 1, ..., m\}$, где

$$d(\lambda^j) = \max_{\nu \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))} (\nu, \lambda^j) \quad j = 1, ..., m.$$

В силу пункта 5) леммы 2.2 и леммы 3.2 существует $r \in N, r \le m$ такое, что быть может после перенумерации $\{\lambda^j\}_{j=1}^m$ $\lambda^j > 0$ $j = 1, ..., r$ и $(\lambda')^j \equiv (\lambda_1^j, ..., \lambda_k^j) = 0$, $(\lambda'')^j \equiv (\lambda_{k+1}^j, ..., \lambda_n^j) > 0$, $j = r+1, ..., m$ если $r < m$. Так как

$$\Im(P, \nu'') = \{\beta' \in R_+^k, (\nu', (\lambda')^j) \le d(\lambda^j) - (\nu'', (\lambda'')^j) \quad j = 1, ..., m\},$$

а в силу условия $(\nu', \nu'') \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)), \nu' \neq 0$ леммы $(\nu'', (\lambda'')^j) < < d(\lambda^j)$ $j = 1, ..., r$, $(\nu'', (\lambda'')^j) \le d(\lambda^j)$, $(\nu', (\lambda')^j) = 0$ $j = r+1, ..., m$ если $r < m$, то

$$\Im(P, \nu'') = \{\beta' \in R_+^k, (\nu', (\lambda')^j) \le d(\lambda^j) - (\nu'', (\lambda'')^j) \quad j = 1, ..., r\}$$

Так как $(\lambda')^j > 0$ $j = 1, ..., r$ то отсюда получаем, что

$$\Lambda(\Im(P, \nu'')) \subset \{(\lambda')^j / |(\lambda')^j|\}_{j=1}^r,$$

следовательно $\Im(P, \nu') \in R_+^k$ является вполне правильным многогранником. Лемма 3.4 доказана. □

**Следствие 3.2.** *Если при условии леммы 3.2 для* $\alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P)$ $\alpha_j \neq 0$ $1 \le j \le k$, *то* $\alpha' - e^j \in \Im(P, \alpha'') \backslash \partial\Im(P, \alpha'')$, *где* $e^j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ *единичный орт по* $j$*-тому направлению в* $R^k$.

*Доказательство.* непосредственно следует из вполне правильности многогранника $\Im(P, \alpha'')$ (см. лемма 3.4). □

## 4. Основной результат

Пусть $k < n$, $(P) \subset N_0^n$ некоторый набор а множество $\Pi''(P), \Pi_j''(P)$ $j = 1, ..., k$ по набору $(P)$ и числа $k$ определены как в §2. Через $G(P)$ обозначим

$$G(P) \equiv \Re^0(P) \cap \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$$

где множество $\tilde{\Pi}''(P)$ по $\Pi''(P)$ определено в §3. Очевидно, что $G(P) = \Re^0(P)$ тогда и только тогда, когда $\Re(P)$ правильный.

**Лемма 4.1.** *Пусть* $k, n \in N, k < n$ *и для многочлена* $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ *с некоторой постоянной* $c_1 > 0$

$$\sum_{\alpha \in G(P)} |\xi^\alpha| \le c_1(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n. \tag{4.1}$$

*Если для любого* $j : j = 1, ..., k$ $\Re(\Pi_j''(P)) = \Re(\Pi''(P))$, *то существует постоянная* $c_2 > 0$ *для которой*

$$\sum_{\alpha \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P))} |\xi^\alpha| \le c_2(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n, |\xi'| \ge 1. \tag{4.2}$$

*Доказательство.* Так как для любого набора $A \subset N_0^n$ $\Re^0(A) \subset A$ и $\tilde{\Pi}''(P) = \{(0';\alpha'') \in N_0^n,\ \exists \alpha' \in N_0^k\, (\alpha';\alpha'') \in (P)\}$, то $\Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) = G(P) \cup \{\alpha'' \in \Re^0(\Pi''(P))\}$. Следовательно для любого $\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \backslash G(P) \beta' = 0$. Так как по условию леммы $\Re(\Pi''_j(P)) = \Re(\Pi''(P))$ $j = 1, ..., k$, то для любых $\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \backslash G(P)$ и индекса $j : 1 \leq j \leq k$ существует мультииндекс $\alpha^j(\beta'') = (0, ..., 0, \alpha_j(\beta''), 0, ..., 0, \beta''), \alpha_j(\beta'') \neq 0$ такой, что $(\alpha_j(\beta''), \beta'') \in \Re^0(Q_j)$ (см. следствие 2.4), где многочлен $Q_j$ по многочлену $P$ и индексу $j : 1 \leq j \leq k$ определено в пункте 1) предложения 2.1. Отсюда непосредственно получаем, что $\alpha^j(\beta'') \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$ следовательно $\alpha^j(\beta'') \in G(P)$ $\quad (\alpha_j(\beta'') \neq 0), j = 1, ..., k$.

Тогда для любого $\xi \in R^n$ при $|\xi'| \geq 1$ в силу оценки (4.1) с некоторыми постоянными $c_3, c_4 > 0$ имеем

$$\sum_{\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P))} |\xi^\beta| = \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + \sum_{\beta \in \Re^0(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \backslash G(P)} |\xi^\beta| =$$
$$= \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + \sum_{\beta'' \in \Re^0(\Pi''(P))} |(\xi'')^{\beta''}| \leq$$
$$\leq \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + c_3 \sum_{\beta'' \in \Re^0(\Pi''(P))} \sum_{j=1}^{k} |(\xi'')|^{\beta''} |\xi_j^{\alpha_j(\beta'')}| =$$
$$= \sum_{\beta \in G(P)} |\xi^\beta| + c_3 \sum_{\beta'' \in \Re^0(\Pi''(P))} \sum_{j=1}^{k} |\xi^{\alpha^j(\beta)}| \leq$$
$$\leq c_4 \sum_{\alpha \in G(P)} |\xi^\alpha| \leq c_4 \cdot c_1(|P(\xi)| + 1).$$

Лемма 4.1 доказана. □

**Замечание 4.1.** *(см. [4] или [5])*

(1) *Если многочлен $Q(\xi) = Q(\xi_1, ..., \xi_n)$ регулярен, то*
   (a) *для любого $\alpha \in \Re(Q) \backslash \partial \Re(Q)$ при $|\xi| \to \infty$ $\quad \xi^\alpha / Q(\xi) \to 0$,*
   (b) *существует постоянная $c > 0$ для которого*
   $$\sum_{\alpha \in \Re(Q)} |\xi^\alpha| \leq c(|Q(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n.$$
(2) *Если х.м. регулярного многочлена правильный, то $Q(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$.*

**Теорема 4.1.** *Пусть $k < n$. Если для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$*

(1) *для любого $j : 1 \leq j \leq k$ $\quad \Re(\Pi''(P)) = \Re(\Pi''_j(P))$,*
(2) *с некоторой постоянной $c_1 > 0$ выполняется оценак (4.1),*

(3) $\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$ *правильный,*

(4) $\Lambda^+\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \neq \emptyset$ *и для любого* $\lambda \in \Lambda(\Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)))$

$$\lambda'' = (\lambda_{k+1}, ..., \lambda_n) > 0,$$

(5) *для любого* $\alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P), \alpha' \neq 0$ $\Im(P, \alpha'')$*- вполне правильный,*

*то многочлен* $P$ *гипоэллиптичен относительно* $\xi' = (\xi_1, ..., \xi_k)$.

*Доказательство.* В силу работы [7] достаточно показать, что для любой последовательности $\{\xi\}_{s=1}^{\infty} \subset R^n$ при $s \to \infty$

$$\sum_{j=1}^{n} |D_j P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \to 0 \tag{4.3}$$

как только $|(\xi')^s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Из условия теоремы, в силу леммы 4.1 и пункта 1) замечания 4.1 существует постоянная $c_2 > 0$ для которого

$$h_P(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \cap N_0^n} |\xi^\alpha| \leq c_2(|P(\xi)| + 1) \quad \forall \xi \in R^n, \quad |\xi'| \geq 1. \tag{4.4}$$

В силу пункта 2) замечания 4.1 и условия 3) теоремы из оценки (4.4) следует, что существуют постоянные $c_3 > 0$ и $t > 0$ для которых

$$h_P(\xi) \leq c_4 |P(\xi)| \quad \forall \xi \in R^n, \quad |\xi'| \geq t. \tag{4.5}$$

Из определения функции $h_P$ и оценки (4.5) непосредственно следует, что для доказательства соотношения (4.3) достаточно, показать, что для любых $\alpha \in (P)$ и $j : 1 \leq j \leq n$, при $\alpha_j \geq 1$

$$(\xi^s)^{\alpha - e^j} / h_P(\xi^s) \to 0. \tag{4.6}$$

когда $s \to \infty$, где $e^j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ единичный орт по $j$ - тому направлению в $R^n$. Если $k + 1 \leq j \leq n$, то в силу пункта 4) теоремы

$$\alpha - e^j \in \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P)) \backslash \partial \Re(P \cup \tilde{\Pi}''(P))$$

и выполнение соотношения (4.6) для таких $\alpha$ непосредственно следует из пункта 1) замечания 4.1 Пусть $\alpha = (\alpha'; \alpha'') \in (P)$ и $\alpha_j \geq 1$ $1 \leq j \leq k$. Тогда на основании пункта 5) теоремы, в силу леммы 3.4 $\Im(P, \alpha'') \subset R_+^k$ вполне правильный и в силу следствия 3.2. $\alpha' - (e')^j \equiv (\alpha_1, ..., \alpha_{j-1}, \alpha_j - 1, \alpha_{j+1}, ..., \alpha_k) \in \Im(P, \alpha'') \backslash \partial \Im(P, \alpha'')$. Пусть

$$h_P(\xi', \alpha'') \equiv \sum_{\beta' \in \Im^0(P, \alpha'')} |\xi'|^{\beta'}.$$

Тогда в силу пункта 1) замечания 4.1 при $s \to \infty$ (так как $|(\xi')^s| \to \infty$ при $s \to \infty$)

$$|((\xi')^s)^{\alpha' - |e'|^j}| / h_P((\xi')^s, \alpha'') \to \infty.$$

Так как (не трудно заметить) с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$|(\xi'')^{\alpha''}| \cdot h_P(\xi', \alpha'') \leq c_3 h_P(\xi) \quad \forall \xi \in R^n,$$

то отсюда, поскольку $h_P(\xi^s) \to \infty$ при $s \to \infty$,

$$|\frac{(\xi^s)^{\alpha - e^j}}{h_P(\xi^s)}| \leq \frac{\alpha|((\xi'')^s)^{\alpha''}| \cdot o(h_P((\xi')^s, \alpha''))}{|((\xi'')^s)^{\alpha''}| \cdot h_P((\xi')^s, \alpha'') + h_P(\xi^s)} \to 0$$

когда $s \to \infty$. Этим утверждение теоремы 4.1 доказана. □

**Теорема 4.2.** *Пусть $k, n \in N, k < n$ и для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n)$ выполняется оценка 4.1. Для того, чтобы многочлен P был гипоэллиптическим относительно $\xi' =$*

*$= (\xi_1, ..., \xi_k)$ необходимо и достаточно чтобы выполнялись условия 1), 3)-5) теоремы 4.1.*

*Доказательство.* непосредственно следует из лемм 3.1-3.4 и теоремы 4.1. □

**Abstract.** For a class of polynomials a necessary and sufficient condition is found for those polynomials to be hypoelliptic with respect to a group of variables.

## Список литературы

[1] Л. Хермандер, Анализ линейных дифференциалных операторов с частными производными, Мир, **2** (1986).

[2] L. Gording, B. Malgrange, "Operateurs differentieles partiallement hypoelliptiques et partiellment elliptiques", Mah. Scand. **9**, 5 – 21 (1961).

[3] R. J. Elliot, "Almost hypoelliptic differential operators", Proceed of the London Math. Society, **53**-19(3), 537 – 552 (1969).

[4] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Тр. МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1961).

[5] L. Volevich, S. Gindikin, The Method of Newtons Polyhedrons in the Theory of PDE, Kluwer Acad. Publ. (1962).

[6] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, **144**, no. 4, 767 – 769 (1962).

[7] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН. Арм. ССР, **21**, no. 5, 453 – 470 (1986).

[8] В. Н. Маргарян, С. Р. Айрапетян, "О некоторых свойствах гипоэллиптических относительно группы переменных многочленов", Вестник РАУ, no. 1, 16 – 26 (2013).

Поступила 23 ноября 2012