

ЗАВИСЯЩИЕ ОТ НАПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЕЧЕНИЙ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Г. С. АРУТЮНЯН, В. К. ОГАНЯН

Ереванский государственный университет, Армения

E-mails: hrach87@gmail.com; victo@aua.am

Аннотация. В статье изучаются функции распределения в направлении для некоторых ограниченных, выпуклых тел на плоскости и в пространстве. В частности, приведены формулы для распределения длины хорды в направлении для правильного многоугольника и эллипса. Функция распределения длины хорды в направлении известна только в случае круга и треугольника. Получены выражения для распределения площади случайного сечения выпуклого тела плоскостью для эллипсоида и цилиндра. Функция распределения случайного сечения известна только в случае шара.

MSC2010 numbers: 60D05; 52A22; 53C65.

Keywords: ограниченное выпуклое тело; функция распределения длины хорды в направлении; ковариограмма; функция распределения площади сечения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть G пространство прямых на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ $g \in G$, (p, φ) – полярные координаты перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую g ; $p \geq 0$, $\varphi \in S^1$ (S^1 – единичная окружность на плоскости с центром в начале координат).

В пространстве G рассмотрим локально конечную меру $\mu(\cdot)$, инвариантную относительно группы всех евклидовых движений плоскости (т.е. вращений и параллельных переносов). Элемент этой меры с точностью до постоянного множителя имеет вид (см. [3]) $\mu(dg) = dp d\varphi$, где dp – одномерная мера Лебега, а $d\varphi$ – угловая мера на S^1 .

Для выпуклой области D и для некоторой точки O внутри D обозначим через $S_D(\varphi)$ опорную функцию в направлении $\varphi \in S^1$, т.е. максимальное значение p относительно точки O для которой прямая $g(p, \varphi)$ пересекает D :

$$S_D(\varphi) = \max\{p : g(p, \varphi) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Если D имеет центр симметрии, то обычно за точку O берется центр симметрии.
 Функция

$$b_D(\varphi) = S_D(\varphi) + S_D(\varphi + \pi)$$

называется функцией ширины и не зависит от выбора точки O .

Для области D зависящая от направления функция распределения длины хорды $F_D(x, \varphi)$ определяется как вероятность, что случайная хорда $\chi(g) = g \cap D$, для g из пучка прямых имеющих направление φ или $\varphi + \pi$, будет иметь длину не превосходящую x . Случайная прямая которая перпендикулярна направлению φ и пересекает D имеет пересечение (обозначим точку пересечения через y) с прямой параллельной направлению φ и проходящей через начало координат. Точка пересечения y равномерно распределена в интервале $[-S_D(\varphi + \pi), S_D(\varphi)]$ (или $[0, b_D(\varphi)]$). Таким образом, имеем

$$(1.1) \quad F_D(x, \varphi) = \frac{L_1\{y : \chi(g_y(\varphi)) \leq x\}}{b_D(\varphi)},$$

где $g_y(\varphi)$ есть прямая перпендикулярная направлению φ и пересекает отрезок $[-S_D(\varphi + \pi), S_D(\varphi)]$ в точке y .

С 30-х годов 20-ого века изучаются не только виды этих функции для различных областей но и возможность единственным образом восстановить ограниченную выпуклую область с помощью этих функций.

В [2] Матерон ввел понятие ковариограммы сформулировав гипотезу, что ковариограмма выпуклого тела D определяет D в классе всех выпуклых тел, с точностью до параллельных переносов и отражений.

Пусть $\mathbb{R}^n$ n -мерное евклидово пространство, $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная выпуклая область с внутренними точками, S^{n-1} — $(n-1)$ -мерная единичная сфера с центром в начале координат, а $L_n(\cdot)$ — n -мерная Лебегова мера в $\mathbb{R}^n$. Функция

$$C_D(x) = L_n(D \cap \{D + x\}) \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n$$

называется ковариограммой области D . Ковариограмма $C_D(x)$ инвариантна относительно параллельных переносов и отражений. Ж. Матерон (см. [2]) доказал, что для $t > 0$ и $\varphi \in S^{n-1}$

$$(1.2) \quad \frac{\partial C_D(t\varphi)}{\partial t} = -L_{n-1}(\{y \in \varphi^\perp : L_1(D \cap (l_\varphi + y)) \geq t\}),$$

где $l_\varphi + y$ есть прямая, параллельная направлению φ и проходящая через точку y , а $\varphi^\perp$ — ортогональное дополнение к φ .

Нетрудно убедиться, что для $n = 2$ (1.2) эквивалентна следующему выражению:

$$(1.3) \quad -\frac{\partial C_D(t\varphi)}{\partial t} = \left(1 - F_D\left(t, \varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right) b_D\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

т.е. гипотеза о восстановлении выпуклого тела D по ковариограмме эквивалентна гипотезе восстановления тела D через зависящую от направления функцию распределения длины хорды.

В [6] доказана гипотеза Матерона для $n = 2$. В [7] доказано, что для $n \geq 4$ гипотеза не верна. Для $n = 3$ проблема пока не решена.

Все вышеупомянутые результаты и факты говорят о том, что распределения длины хорды в направлении, а так же ковариограмма, являются ключевыми понятиями при изучении ограниченных, выпуклых тел, и изучение этих функций в частных случаях могут дать результаты, которые могут быть обобщены на все ограниченные выпуклые тела, или на некоторый подкласс этих тел.

В 3-мерном пространстве можно рассматривать два типа распределений зависящих от направления. Первое представляет собой вероятность того, что хорда образованная при пересечении пространственной прямой с телом имеет длину меньше или равную данного числа. Во втором случае рассматриваются случайные плоскости и их пересечения с телом.

Обозначим через E пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Каждое $e \in E$ можно определить направлением $\omega = (\varphi, \theta) \in S^2$ ($\varphi \in S^1$, $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$) и расстоянием p плоскости e от начала координат. Обозначим через $A(e)$ площадь сечения тела D плоскостью e , а через $S_D(\omega)$ опорную функцию в направлении ω относительно некоторой внутренней точки O области D :

$$S_D(\omega) = \max\{p : e(p, \omega) \cap D \neq \emptyset\}.$$

Случайная плоскость которая имеет направление ω и пересекает D имеет точку пересечения y с прямой параллельной направлению ω и проходящей через начало координат. Точка пересечения y равномерно распределена в интервале $[0, b_D(\omega)]$, где $b_D(\omega)$ функция ширины в направлении ω ($b_D(\omega) = S_D(\omega) + S_D(-\omega)$), которая не зависит от точки O . Мы можем отождествлять точки отрезка $[0, b_D(\omega)]$ с плоскостями, которые пересекают D и имеют направление ω . Таким образом, имеем

$$(1.4) \quad F_D(x, \omega) = \frac{L_1\{y : A(e_y(\omega)) \leq x\}}{b_D(\omega)},$$

где $e_y(\omega)$ есть плоскость которая имеет направление ω и пересекает отрезок $[0, b_D(\omega)]$ в точке y .

Целью настоящей статьи является расширение класса тел для которых известен вид функции распределения длины хорды (ковариограмма) и функции распределения площади сечения в направлении. Получены следующие результаты:

- (1) Функция распределения длины хорды в направлении для правильного многоугольника,
- (2) Ковариограмма и функция распределения длины хорды в направлении для эллипса,
- (3) Функция распределения площади сечения в направлении для эллипсоида,
- (4) Функция распределения площади сечения в направлении для цилиндра.

2. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Рассмотрим правильный n -угольник Π со сторонами a_k , $k = 1, 2, \dots, n$, длины a . Мы полагаем, что начало координат совпадает с центром многоугольника, а ось OX проходит через вершину многоугольника.

Очевидно, что $F_{\Pi}(x, \varphi) = 0$, если $x \leq 0$ и $F_{\Pi}(x, \varphi) = 1$, если $x > \chi_{\max}(\varphi)$, где $\chi_{\max}(\varphi)$ максимальная хорда в направлении φ . Пусть $0 < x \leq \chi_{\max}(\varphi)$.

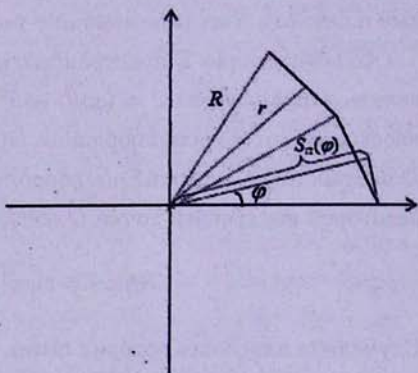
Пусть R и r радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно.

Нетрудно убедиться, что a_k есть множество точек (x, y) которые принадлежат прямой l_k проходящей через a_k и удовлетворяют $r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$.

Нормальное уравнение прямой l_k имеет следующий вид:

$$x \cos \frac{2k-1}{n} \pi + y \sin \frac{2k-1}{n} \pi - r = 0,$$

следовательно,



$$\partial\Pi = \bigcup_{k=1}^n \left\{ (x, y) \mid x \cos \frac{2k-1}{n}\pi + y \sin \frac{2k-1}{n}\pi - r = 0, r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R \right\}.$$

Пусть $S_{\Pi}(\varphi)$ опорная функция многоугольника Π в направлении φ отнесенная к началу координат. Мы будем рассматривать только случай $\varphi \in [0, \frac{\pi}{n}]$, поскольку $S_{\Pi}(\varphi)$ и $F_{\Pi}(x, \varphi)$ являются периодическими функциями от φ с периодом $\frac{2\pi}{n}$, и, кроме того, для $\varphi \in [\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}]$

$$S_{\Pi}(\varphi) = S_{\Pi}\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) \quad \text{и} \quad F_{\Pi}(x, \varphi) = F_{\Pi}\left(x, \frac{2\pi}{n} - \varphi\right).$$

Для $\varphi \in [0, \frac{\pi}{n}]$ и $p \in [0, S_{\Pi}(\varphi)]$, $S_{\Pi}(\varphi) = R \cos \varphi$. Рассмотрим нормальное уравнение прямой $g(p, \varphi)$ и ее пересечения с границей Π :

$$(2.1) \quad \begin{cases} x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0 \\ x \cos \frac{2k-1}{n}\pi + y \sin \frac{2k-1}{n}\pi - r = 0 \\ r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем

$$(2.2) \quad \begin{cases} x = \frac{p \sin \frac{2k-1}{n}\pi - r \sin \varphi}{\sin(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi)} \\ y = -\frac{p \cos \frac{2k-1}{n}\pi - r \cos \varphi}{\sin(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi)} \\ r^2 \leq \frac{p^2 - 2pr \cos(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi) + r^2}{\sin^2(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi)} \leq R^2. \end{cases}$$

Легко убедиться, что левая часть третьего неравенства системы (2.2) всегда выполняется. Действительно, $r^2 \leq \frac{p^2 - 2pr \cos(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi) + r^2}{\sin^2(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi)}$ эквивалентно неравенству

$$\frac{(p - r \cos(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi))^2}{\sin^2(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi)} \geq 0.$$

Понятно, что для фиксированного направления $\varphi \in [0, \frac{\pi}{n}]$ прямые $g(p, \varphi)$ пересекаются только с некоторыми сторонами многоугольника, когда p изменяется на отрезке $[0, S_{\Pi}(\varphi)]$.

$$(2.3) \quad \left| \sin\left(\frac{2k-1}{n}\pi - \varphi\right) \right| \geq \frac{r}{R} = \cos \frac{\pi}{n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right).$$

Решая (2.3) получаем, что прямые $g(p, \varphi)$, где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{n}]$, пересекаются только со сторонами $a_1, a_2, \dots, a_{i(\varphi)}$ и $a_{j(\varphi)}, a_{j(\varphi)+1}, \dots, a_n$, где

$$i(\varphi) = \left\lceil \frac{n}{4} + \frac{n\varphi}{2\pi} \right\rceil \quad \text{и} \quad j(\varphi) = \left\lfloor \frac{3n}{4} + \frac{n\varphi}{2\pi} \right\rfloor + 1,$$

и $\lceil x \rceil$ наименьшее целое число не меньше x , а $\lfloor x \rfloor$ наибольшее целое число не больше x .

Далее, найдем значения p для которых прямая $g(p, \varphi)$ пересекает пару сторон (a_i, a_j) , где $i \in \{1, 2, \dots, i(\varphi)\}$, $j \in \{j(\varphi), j(\varphi) + 1, \dots, n\}$. Нетрудно убедиться, что для $\varphi \in [0, \frac{\pi}{n}]$

если $p \in [R \cos(\frac{2\pi}{n} - \varphi), S_{II}(\varphi)]$, то $g(p, \varphi)$ пересекает a_1 и a_n ,

если $p \in [R \cos(\frac{2\pi}{n} + \varphi), R \cos(\frac{2\pi}{n} - \varphi)]$, то $g(p, \varphi)$ пересекает a_2 и a_n ,

если $p \in [R \cos(\frac{4\pi}{n} - \varphi), R \cos(\frac{2\pi}{n} + \varphi)]$, то $g(p, \varphi)$ пересекает a_2 и a_{n-1} ,

.....

если $p \in [0, R \cos(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n} - \varphi)]$, то $g(p, \varphi)$ пересекает $a_{i(\varphi)}$ и $a_{j(\varphi)}$.

Пусть $p \in [R \cos(\frac{2\pi k}{n} + \varphi), R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi)]$. Имеем, что прямая $g(p, \varphi)$ пересекает a_{k+1} и a_{n+1-k} , при этом точки пересечения удовлетворяют системам

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{p \sin \frac{2k+1}{n} \pi - r \sin \varphi}{\sin(\frac{2k+1}{n} \pi - \varphi)}, \\ y_{k+1} = -\frac{p \cos \frac{2k+1}{n} \pi - r \cos \varphi}{\sin(\frac{2k+1}{n} \pi - \varphi)}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_{n-k+1} = \frac{p \sin \frac{2(n-k+1)}{n} \pi - r \sin \varphi}{\sin(\frac{2(n-k+1)}{n} \pi - \varphi)}, \\ y_{n-k+1} = -\frac{p \cos \frac{2(n-k+1)}{n} \pi - r \cos \varphi}{\sin(\frac{2(n-k+1)}{n} \pi - \varphi)}. \end{cases}$$

Расстояние между точками (x_{k+1}, y_{k+1}) и (x_{n-k+1}, y_{n-k+1}) (т.е. $\chi(p, \varphi)$) равно

$$\chi(p, \varphi) = 2 \frac{(r \cos(\frac{\pi}{n} - \varphi) - p \cos \frac{2k}{n} \pi) \sin \frac{2k}{n} \pi}{\sin(\frac{2k+1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k+1}{n} \pi + \varphi)}.$$

Отсюда получаем, что когда $p \in [R \cos(\frac{2\pi k}{n} + \varphi), R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi)]$ максимальная длина хорд образованных прямыми $g(p, \varphi)$ равна

$$(2.4) \quad M_k(\varphi) = 2 \frac{(r \cos(\frac{\pi}{n} - \varphi) - R \cos(\frac{2\pi k}{n} + \varphi) \cos \frac{2k}{n} \pi) \sin \frac{2k}{n} \pi}{\sin(\frac{2k+1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k+1}{n} \pi + \varphi)}$$

а минимальная —

$$(2.5) \quad m_k(\varphi) = 2 \frac{(r \cos(\frac{\pi}{n} - \varphi) - R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi) \cos \frac{2k}{n} \pi) \sin \frac{2k}{n} \pi}{\sin(\frac{2k+1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k+1}{n} \pi + \varphi)}.$$

Итак, для $x \in [m_k(\varphi), M_k(\varphi)]$ хорда длины x образована прямой $g(p, \varphi)$, где

$$p = \frac{2r \sin \frac{2k}{n} \pi \cos(\frac{\pi}{n} - \varphi) - x \sin(\frac{2k+1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k+1}{n} \pi + \varphi)}{\sin \frac{4k}{n} \pi},$$

следовательно, мера значений p образующих хорды длиной не превышающих x равна

(2.6)

$$p_k(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq m_k(\varphi), \\ R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi) - \frac{2r \sin \frac{2k}{n} \pi \cos(\frac{\pi}{n} - \varphi) - x \sin(\frac{2k+1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k+1}{n} \pi + \varphi)}{\sin \frac{4k}{n} \pi}, & \text{если } m_k(\varphi) < x \leq M_k(\varphi), \\ R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi) - R \cos(\frac{2\pi k}{n} + \varphi), & \text{если } x > M_k(\varphi). \end{cases}$$

Теперь пусть $p \in [R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi), R \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \varphi)]$. В этом случае прямая $g(p, \varphi)$ пересекает a_k и a_{n+1-k} , и точки пересечения удовлетворяют системам

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{p \sin \frac{2k-1}{n} \pi - r \sin \varphi}{\sin(\frac{2k-1}{n} \pi - \varphi)}, \\ y_{k+1} = -\frac{p \cos \frac{2k-1}{n} \pi - r \cos \varphi}{\sin(\frac{2k-1}{n} \pi - \varphi)}, \end{cases} \quad \text{И} \quad \begin{cases} x_{n-k+1} = \frac{p \sin \frac{2(n-k)+1}{n} \pi - r \sin \varphi}{\sin(\frac{2(n-k)+1}{n} \pi - \varphi)}, \\ y_{n-k+1} = -\frac{p \cos \frac{2(n-k)+1}{n} \pi - r \cos \varphi}{\sin(\frac{2(n-k)+1}{n} \pi - \varphi)}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\chi(p, \varphi) = 2 \frac{(r \cos \varphi - p \cos \frac{2k-1}{n} \pi) \sin \frac{2k-1}{n} \pi}{\sin(\frac{2k-1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k-1}{n} \pi + \varphi)},$$

следовательно, когда $p \in [R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi), R \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \varphi)]$ длина максимальной хорды равна

$$(2.7) \quad M'_k(\varphi) = 2 \frac{(r \cos \varphi - R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi) \cos \frac{2k-1}{n} \pi) \sin \frac{2k-1}{n} \pi}{\sin(\frac{2k-1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k-1}{n} \pi + \varphi)}$$

а длина минимальной хорды —

$$(2.8) \quad m'_k(\varphi) = 2 \frac{(r \cos \varphi - R \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \varphi) \cos \frac{2k-1}{n} \pi) \sin \frac{2k-1}{n} \pi}{\sin(\frac{2k-1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k-1}{n} \pi + \varphi)}.$$

Итак, если $x \in [m'_k(\varphi), M'_k(\varphi)]$, то хорда длины x образована прямой $g(p, \varphi)$, где

$$p = \frac{2r \sin \frac{2k-1}{n} \pi \cos \varphi - x \sin(\frac{2k-1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k-1}{n} \pi + \varphi)}{\sin \frac{4k-2}{n} \pi},$$

следовательно, мера значений p образующих хорды длиной не превышающих x равна

(2.9)

$$p'_k(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq m'_k(\varphi), \\ R \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \varphi) - \frac{2r \sin \frac{2k-1}{n} \pi \cos \varphi - x \sin(\frac{2k-1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2k-1}{n} \pi + \varphi)}{\sin \frac{4k-2}{n} \pi}, & \text{если } m'_k(\varphi) < x \leq M'_k(\varphi), \\ R \cos(\frac{2\pi(k-1)}{n} + \varphi) - R \cos(\frac{2\pi k}{n} - \varphi), & \text{если } x > M'_k(\varphi). \end{cases}$$

Если $p \in [0, R \cos(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n} - \varphi)]$, то $g(p, \varphi)$ пересекает $a_{i(\varphi)}$ и $a_{j(\varphi)}$, и для точек пересечения имеем

$$\begin{cases} x_{i(\varphi)} = \frac{p \sin \frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - r \sin \varphi}{\sin(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi)}, \\ y_{i(\varphi)} = -\frac{p \cos \frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - r \cos \varphi}{\sin(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi)}, \end{cases} \quad \text{И} \quad \begin{cases} x_{j(\varphi)} = \frac{p \sin \frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - r \sin \varphi}{\sin(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi)}, \\ y_{j(\varphi)} = -\frac{p \cos \frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - r \cos \varphi}{\sin(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi)}. \end{cases}$$

Так как,

$$\chi(p, \varphi) = 2 \frac{(r \cos(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi) - p \cos \frac{i(\varphi)-j(\varphi)}{n} \pi) \sin \frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n} \pi}{\sin(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi) \sin(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi)},$$

то подставляя $p = 0$ в последнем выражении, получаем

$$(2.10) \quad \frac{r \cos \left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) \sin \frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n} \pi}{2 \sin \left(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) \sin \left(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right)},$$

и подставляя $R \cos \left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n} - \varphi \right)$, получаем

$$(2.11) \quad \frac{\left(r \cos \left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) - R \cos \left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n} - \varphi \right) \cos \frac{i(\varphi)-j(\varphi)}{n} \pi \right) \sin \frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n} \pi}{2 \sin \left(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) \sin \left(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right)}.$$

Обозначим через $M_0(\varphi)$ максимум из (2.10) и (2.11), а через $m_0(\varphi)$ — минимум. Итак, для $x \in [m_0(\varphi), M_0(\varphi)]$ хорда длины x образовывается прямой $g(p, \varphi)$, где

$$p = \frac{2r \sin \frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n} \pi \cos \left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) - x \sin \left(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) \sin \left(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right)}{\sin \frac{2(j(\varphi)-i(\varphi))}{n} \pi},$$

следовательно, мера значений p образующих хорды длиной не превышающих x равна

$$(2.12) \quad p_0(x, \varphi) = R \cos \left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n} - \varphi \right) - \frac{2r \sin \frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n} \pi \cos \left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) - x \sin \left(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) \sin \left(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right)}{\sin \frac{2(j(\varphi)-i(\varphi))}{n} \pi},$$

если максимальная хорда получается при значении $p = 0$, и равна

$$(2.13) \quad p_0(x, \varphi) = \frac{2r \sin \frac{j(\varphi)-i(\varphi)}{n} \pi \cos \left(\frac{i(\varphi)+j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) - x \sin \left(\frac{2i(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right) \sin \left(\frac{2j(\varphi)-1}{n} \pi - \varphi \right)}{\sin \frac{2(j(\varphi)-i(\varphi))}{n} \pi}$$

в противном случае. Кроме того, из (2.12) и (2.13) следует, что $p_0(x, \varphi)$ равен 0, если $x \leq m_0(\varphi)$ и равен $R \cos \left(\frac{2(i(\varphi)-1)\pi}{n} - \varphi \right)$, если $x > M_0(\varphi)$.

Обозначим

$$(2.14) \quad G_{\Pi}(x, \varphi) = p_0(x, \varphi) + \sum_{k=1}^{i(\varphi)-2} p_k(x, \varphi) + \sum_{k=1}^{i(\varphi)-1} p'_k(x, \varphi).$$

Окончательно, для функции распределения длины хорды в направлении φ для правильного n -угольника получаем

$$(2.15) \quad F_{\Pi}(x, \varphi) = \frac{G_{\Pi}(x, \varphi) + G_{\Pi}(x, \varphi + \pi)}{S_{\Pi}(\varphi) + S_{\Pi}(\varphi + \pi)} = \frac{G_{\Pi}(x, \varphi) + G_{\Pi}(x, \varphi + \pi)}{b_{\Pi}(\varphi)}.$$

2.1. **Правильный треугольник.** Рассмотрим частный случай (2.15), когда Π есть правильный треугольник со стороной a . Обозначим его через T_a . Нетрудно убедиться, что в случае $n = 3$

$$i(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}, \\ 2, & \text{если } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \end{cases} \quad \text{и} \quad j(\varphi) = 3.$$

Пусть $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$. Имеем (см. (2.10), (2.11)),

$$M_0(\varphi) = \frac{a \cos \varphi}{2 \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}, \quad m_0(\varphi) = 0 \quad \text{и} \quad G_{T_a}(x, \varphi) = p_0(x, \varphi), \quad \text{где}$$

$$(2.16) \quad p_0(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{x \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}{\sin \frac{\pi}{3}}, & \text{если } 0 < x \leq \frac{a \cos \varphi}{2 \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}, \\ R \cos \varphi, & \text{если } x > \frac{a \cos \varphi}{2 \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}, \end{cases}$$

Если $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, то

$$(2.17) \quad m_0(\varphi) = \frac{a \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi)}{2 \sin \varphi \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)} \quad M_0(\varphi) = \frac{a \sqrt{3}}{2 \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)} = \chi_{\max}(\varphi) \quad \text{и}$$

$$p_0(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \frac{a \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi)}{2 \sin \varphi \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}, \\ -R \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi) + \frac{x \sin \varphi \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}{\sin \frac{2\pi}{3}}, & \text{если } \frac{a \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi)}{2 \sin \varphi \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)} < x \leq \chi_{\max}(\varphi). \end{cases}$$

Далее, из (2.7) и (2.8) следует, что

$$M'_1(\varphi) = \frac{a \sqrt{3}}{2 \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)} = M_0(\varphi) = \chi_{\max}(\varphi), \quad m'_1(\varphi) = 0 \quad \text{и}$$

$$(2.18) \quad p'_1(x, \varphi) = \frac{x \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}{\sin \frac{2\pi}{3}}, \quad \text{если } 0 < x \leq \chi_{\max}(\varphi).$$

Из (2.17) и (2.18) получаем, что если $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, то

$$(2.19) \quad G_{T_a}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{x \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}{\sin \frac{2\pi}{3}}, & \text{если } 0 < x \leq \frac{a \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi)}{2 \sin \varphi \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}, \\ -R \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi) + \frac{x \cos(\varphi - \frac{\pi}{6}) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}{\sin \frac{2\pi}{3}}, & \text{если } \frac{a \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi)}{2 \sin \varphi \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)} < x \leq \chi_{\max}(\varphi). \end{cases}$$

Итак, из (2.16) и (2.19) (для $\frac{\pi}{3} - \varphi$), получаем, что когда $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$,

$$F_{T_a}(x, \varphi) = \frac{x \cos(\varphi - \frac{\pi}{6}) \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}{\sin \frac{2\pi}{3} (R \cos \varphi + R \cos(\frac{\pi}{3} - \varphi))} = \frac{2x \sin(\frac{\pi}{3} + \varphi)}{a \sqrt{3}} = \frac{x}{\chi_{\max}(\varphi)}.$$

Тот же результат мы получаем в случае $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, следовательно

$$(2.20) \quad F_{T_a}(x, \varphi) = \frac{x}{\chi_{\max}(\varphi)}, \quad \varphi \in S^1.$$

(2.20) есть частный случай результата полученного в [8] когда треугольник правильный.

2.2. Случай квадрата. Рассмотрим квадрат S_a со стороной a . Нетрудно убедиться, что для $n = 4$ (мы полагаем $\varphi \leq \frac{\pi}{4}$) $i(\varphi) = 2$ и $j(\varphi) = 3$. Имеем (см. (2.10), (2.11)),

$$M_0(\varphi) = m_0(\varphi) = \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{4} + \varphi)} = \chi_{\max}(\varphi),$$

поэтому

$$(2.21) \quad p_0(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \chi_{\max}(\varphi), \\ R \sin \varphi, & \text{если } x = \chi_{\max}(\varphi). \end{cases}$$

Итак, $\chi_{\max}(\varphi)$ тяжелая точка для $F_{S_a}(x, \varphi)$. Этот факт связан с присутствием параллельных сторон в квадрате.

Из (2.7) и (2.8) получаем $M'_1(\varphi) = \chi_{\max}(\varphi)$ и $m'_1(\varphi) = 0$, следовательно

$$(2.22) \quad p'_1(x, \varphi) = x \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \frac{x \cos 2\varphi}{2}, \quad \text{если } 0 < x \leq \chi_{\max}(\varphi).$$

Окончательно, имеем

$$(2.23) \quad F_{S_a}(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ \frac{x \cos 2\varphi}{a\sqrt{2} \cos \varphi}, & \text{если } 0 < x < \chi_{\max}(\varphi), \\ \frac{x \cos 2\varphi}{a\sqrt{2} \cos \varphi} + \tan \varphi & \text{если } x = \chi_{\max}(\varphi), \end{cases}$$

где $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$ и $\chi_{\max}(\varphi) = \frac{a}{\sin(\frac{\pi}{4} + \varphi)}$.

3. СЛУЧАЙ ЭЛЛИПСА

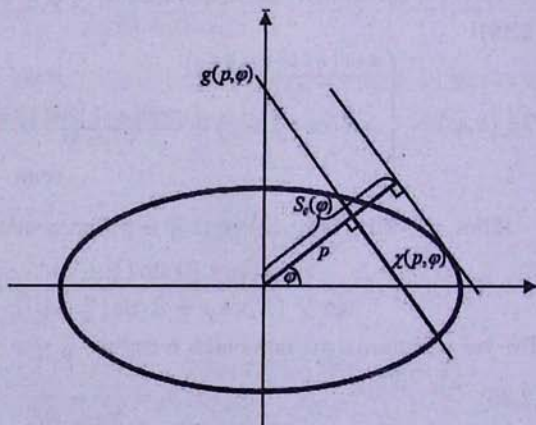
Рассмотрим эллипс E

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Обозначим через $S_e(\varphi)$ опорную функцию эллипса в направлении φ .

Найдем $S_e(\varphi)$, а также $\chi(p, \varphi)$ для любого $\varphi \in S^1$ и $p \in [0, S_e(\varphi)]$.

Чтобы найти $S_e(\varphi)$ нам нужно найти расстояние касательной параллельной прямой



$g(p, \varphi)$ от начала координат. Переходим к параметрическим уравнениям:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = b \sin t \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \tan \varphi = -1,$$

где t_0 параметр соответствующий точке, где касательная к кривой перпендикулярна прямой $y = x \tan \varphi$. Не умаляя общности будем полагать, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $x(t_0) \geq 0$, $y(t_0) \geq 0$. Имеем,

$$\frac{b \cos t_0}{a \sin t_0} = \cot \varphi \quad \text{или} \quad \cot t_0 = \frac{a}{b} \cot \varphi.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\cos t_0 = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \sin t_0 = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}},$$

следовательно уравнение касательной в точке $(x(t_0), y(t_0))$ имеет вид

$$(3.1) \quad y - \frac{b^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \cot \varphi \left(x - \frac{a^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \right).$$

Подставляя $y = x \tan \varphi$ и решая (3.1) мы находим абсцису точки пересечения касательной в точке $(x(t_0), y(t_0))$ с прямой $y = x \tan \varphi$:

$$x = x_{S_e(\varphi)} = \cos \varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Очевидно, что $S_e(\varphi) = \frac{x_{S_e(\varphi)}}{\cos \varphi}$. Окончательно получаем:

$$S_e(\varphi) = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Найдем длину хорды $\chi(p, \varphi)$. Концевые точки хорды $\chi(p, \varphi)$ равны

$$x_{1,2} = \frac{a^2 p \cos \varphi \pm ab |\sin \varphi| \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - p^2}}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

С другой стороны очевидно, что $\chi(p, \varphi) = \frac{|x_1 - x_2|}{|\sin \varphi|}$, следовательно

$$(3.2) \quad \chi(p, \varphi) = \frac{2ab \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - p^2}}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2ab \sqrt{S_e^2(\varphi) - p^2}}{S_e^2(\varphi)}$$

для всех $\varphi \in S^1$ и $p \in [0, S_e(\varphi)]$.

Нетрудно убедиться, что для фиксированной φ и $p \in [0, S_e(\varphi)]$, $\chi(p, \varphi) \leq x$ тогда и только тогда, когда $p \geq S_e(\varphi) \sqrt{1 - \frac{x^2 S_e^2(\varphi)}{4a^2 b^2}}$, следовательно получаем

$$F_e(x, \varphi) = \frac{S_e(\varphi) - S_e(\varphi) \sqrt{1 - \frac{x^2 S_e^2(\varphi)}{4a^2 b^2}}}{S_e(\varphi)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 S_e^2(\varphi)}{4a^2 b^2}}.$$

Окончательно, для функции распределения длины хорды в направлении φ для эллипса с полуосями a и b получаем:

$$(3.3) \quad F_e(x, \varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)}{4a^2b^2}}, & \text{если } 0 \leq x \leq \chi_{\max}(\varphi), \\ 1, & \text{если } x \geq \chi_{\max}(\varphi), \end{cases}$$

где $\chi_{\max}(\varphi)$ есть максимальная хорда в направлении φ :

$$\chi_{\max}(\varphi) = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Подставляя в (3.3) $a = b = r$, получаем функцию распределения длины хорды в направлении φ для круга.

Используя (1.3) получаем, что для ковариограммы эллипса имеет место следующее равенство

$$-\frac{\partial C_e(t\varphi)}{\partial t} = 2S_e(\varphi)(1 - F_e(t, \varphi)),$$

следовательно

$$C_e(t\varphi) - C_e(0) = -2S_e(\varphi) \int_0^t \sqrt{1 - \frac{x^2(a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi)}{4a^2b^2}} dx,$$

или

$$(3.4) \quad C_e(t\varphi) = \pi ab - t \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1 - \frac{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}{4a^2b^2} t^2} - 2ab \arcsin \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}{2ab} t.$$

Фактически, ковариограмма эллипса связана с максимальной хордой следующим образом:

$$(3.5) \quad C_e(t\varphi) = \begin{cases} 2ab \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)} \sqrt{1 - \frac{t^2}{\chi_{\max}^2(\varphi)}} - \arcsin \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)} \right), & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\varphi), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В (3.5) выражение $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)} \sqrt{1 - \frac{t^2}{\chi_{\max}^2(\varphi)}} - \arcsin \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$ есть функция от $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$. Похожая зависимость получена и в [8], поскольку доказано, что ковариограмма треугольника имеет вид

$$C_{\Delta}(t\varphi) = \begin{cases} A_{\Delta} \left(1 - \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)} \right)^2 & \text{если } 0 \leq t \leq \chi_{\max}(\varphi), \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где A_{Δ} площадь треугольника Δ .

Кроме того, нетрудно видеть, что функция посредством которой ковариограмма зависит от $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$ с точностью до постоянного множителя совпадает с неопределенным интегралом границы соответственной области.

Отсюда возникают следующие вопросы:

- (1) При каких условиях ковариограмма $C_D(t\varphi)$ выпуклой области D зависит от φ через функцию $\chi_{\max}(\varphi)$: $C_D(t\varphi) = C_D(t, \chi_{\max}(\varphi))$?
- (2) При каких условиях ковариограмма $C_D(t\varphi)$ выпуклой области D есть функция зависящая только от $\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}$:

$$C_D(t\varphi) = C_D\left(\frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}\right)?$$

- (3) Пусть $y = f(x)$ уравнение границы области D в окрестности точки пересечения ∂D с лучом φ . При каких условиях $C_D(t\varphi)$ представимо в виде

$$C_D(t\varphi) = C_1 + C_2 \int_0^{C_3 \frac{t}{\chi_{\max}(\varphi)}} f(x) dx,$$

где C_1 , C_2 и C_3 постоянные?

4. СЛУЧАЙ ЭЛЛИпсоиДА

Пусть дан эллипсоид E с уравнением

$$(4.1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Найдем функцию распределения площади случайного сечения эллипсоида. Из (1.4) имеем

$$F_E(x, \omega) = \frac{L_1\{p: A(p, \omega) \leq x\}}{S_E(\omega)}.$$

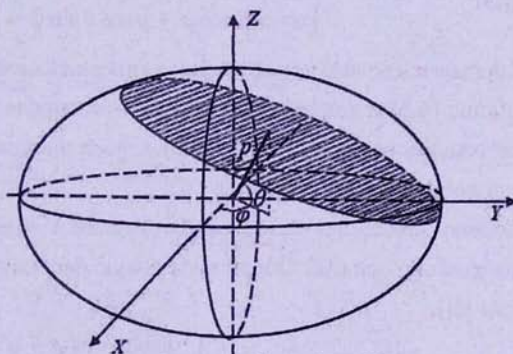
Для нахождения $S_E(\omega)$ нужно найти расстояние касательной плоскости E с нормалью имеющей направление $\omega \in S^2$ от начала координат.

Из цилиндрического уравнения плоскости $e(p, \omega)$ имеем ($\omega = (\varphi, \theta)$):

$$x \cos \theta \cos \varphi + x \cos \theta \sin \varphi + z \sin \theta - p = 0.$$

Уравнение касательной плоскости к E в точке $(x_0, y_0, z_0) \in E$ имеет вид:

$$(4.2) \quad \frac{x_0}{a^2} x + \frac{y_0}{b^2} y + \frac{z_0}{c^2} z - \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \right) = 0,$$



следовательно вектор $\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\}$ является нормалью касательной плоскости. Поскольку мы ищем касательную плоскость перпендикулярную направлению (φ, θ) , следовательно вектор $\{\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}, \frac{z_0}{c^2}\}$ должен быть параллельным вектору $\{\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta\}$, т.е. для некоторого t_0

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{x_0}{a^2} = t_0 \cos \theta \cos \varphi, \\ \frac{y_0}{b^2} = t_0 \cos \theta \sin \varphi, \\ \frac{z_0}{c^2} = t_0 \sin \theta. \end{cases}$$

Подставляя (4.3) в (4.1) получаем

$$|t_0| = \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \theta}}$$

Расстояние точки $(0, 0, 0)$ от касательной плоскости равно

$$\frac{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} = \frac{1}{|t_0|}.$$

Окончательно, получаем

$$(4.4) \quad S_E(\varphi, \theta) = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \theta}.$$

Теперь найдем $A(p, \varphi, \theta)$. Для этого нам нужно найти площадь замкнутой области с границей удовлетворяющей системе

$$(4.5) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi + z \sin \theta - p = 0. \end{cases}$$

Хорошо известно, что сечения эллипсоида являются эллипсами. Чтобы привести эллипс (4.5) к каноническому виду мы определим преобразование координатной системы, в результате которой полуоси эллипса совпадут с осями координат новой координатной системы.

Первым шагом мы вращаем систему OXY против часовой стрелки на угол φ относительно оси OZ . Обозначим новую систему координат через $OX'Y'Z'$. Имеем (см. [5]),

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \\ z = z'. \end{cases}$$

После этого вращения мы можем переписать (4.5) в виде:

$$(4.6) \quad \begin{cases} \frac{(x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2}{a^2} + \frac{(x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1, \\ x' \cos \theta + z' \sin \theta - p = 0. \end{cases}$$

Вторым шагом мы вращаем новую систему $OX'Y'Z'$ относительно оси OY' на угол $\frac{\pi}{2} - \theta$ против часовой стрелки. В результате получаем новую координатную систему $OX''Y''Z''$, где

$$\begin{cases} x' = x'' \sin \theta + z'' \cos \theta, \\ y' = y'', \\ z' = -x'' \cos \theta + z'' \sin \theta. \end{cases}$$

Следовательно, мы можем переписать (4.6) в виде

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{((x'' \sin \theta + z'' \cos \theta) \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2}{a^2} + \frac{((x'' \sin \theta + z'' \cos \theta) \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2}{b^2} + \\ + \frac{(-x'' \cos \theta + z'' \sin \theta)^2}{c^2} = 1, \\ z'' - p = 0. \end{cases}$$

И наконец, мы переносим центр координатной системы $OX''Y''Z''$ на величину p в направлении оси OZ'' . Новая координатная система $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ удовлетворяет

$$\begin{cases} \bar{x} = x'', \\ \bar{y} = y'', \\ \bar{z} = z'' - p. \end{cases}$$

Окончательно, для границы сечения $e(p, \varphi, \theta) \cap E$ имеем следующее представление:

$$(4.8) \quad \frac{((\bar{x} \sin \theta + p \cos \theta) \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi)^2}{a^2} + \frac{((\bar{x} \sin \theta + p \cos \theta) \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi)^2}{b^2} + \\ + \frac{(p \sin \theta - \bar{x} \cos \theta)^2}{c^2} = 1.$$

Кривая определенная уравнением (4.8) есть плоская кривая в $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ и имеет форму

$$(4.9) \quad a_{11}\bar{x}^2 + 2a_{12}\bar{x}\bar{y} + a_{22}\bar{y}^2 + 2a_{13}\bar{x} + 2a_{23}\bar{y} + a_{33} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}, \\ a_{12} &= a_{21} = -\frac{\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta}{a^2} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta}{b^2}, \\ a_{22} &= \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}, \\ a_{13} &= a_{31} = \frac{p \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{a^2} + \frac{p \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{b^2} - \frac{p \cos \theta \sin \theta}{c^2}, \\ a_{23} &= a_{32} = -\frac{p \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta}{a^2} + \frac{p \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta}{b^2}, \\ a_{33} &= \frac{p^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{p^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{b^2} + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{c^2} - 1. \end{aligned}$$



Кривые определенные посредством (4.9) есть кривые второго порядка (см. [5]), и известно что их образ зависит от инвариантов

$$(4.10) \quad \Delta = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I = a_{11} + a_{22}.$$

Нетрудно убедиться, что для (4.8) $D > 0$ и $\Delta I < 0$, и этот факт является еще одним доказательством что сечения эллипсоида являются эллипсами (см. [5]).

Кроме того, если кривая второго порядка является эллипсом, то ее площадь можно найти формулой (см. [5])

$$(4.11) \quad S = \pi \frac{|\Delta|}{\sqrt{D^3}}.$$

Используя (4.11) получаем

$$(4.12) \quad A(p, \varphi, \theta) = \pi abc \frac{S_E^2(\varphi, \theta) - p^2}{S_E^3(\varphi, \theta)} = \frac{\pi abc}{S_E(\varphi, \theta)} \left(1 - \frac{p^2}{S_E^2(\varphi, \theta)} \right).$$

Подставляя $p = 0$ в (4.12) мы находим максимальную площадь сечения в направлении (φ, θ) :

$$A_{\max}(\varphi, \theta) = \frac{\pi abc}{S_E(\varphi, \theta)}.$$

Очевидно что для любого направления (φ, θ) и $x \geq 0$ $A(p, \varphi, \theta) \leq x$ тогда и только тогда, когда

$$p \geq S_E(\varphi, \theta) \sqrt{1 - \frac{x S_E(\varphi, \theta)}{\pi abc}},$$

следовательно

$$F_E(x, \varphi, \theta) = \frac{S_E(\varphi, \theta) - S_E(\varphi, \theta) \sqrt{1 - \frac{x S_E(\varphi, \theta)}{\pi abc}}}{S_E(\varphi, \theta)} = 1 - \sqrt{1 - \frac{x S_E(\varphi, \theta)}{\pi abc}}.$$

Окончательно, получаем

$$(4.13) \quad F_E(x, \varphi, \theta) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - \sqrt{1 - \frac{x \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + c^2 \sin^2 \theta}}{\pi abc}}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi abc}{S_E(\varphi, \theta)}, \\ 1, & x \geq \frac{\pi abc}{S_E(\varphi, \theta)}. \end{cases}$$

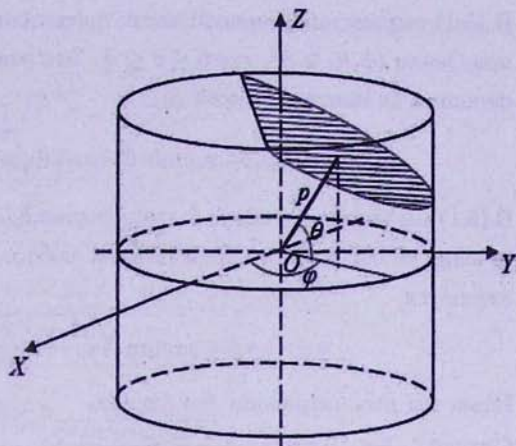
5. СЛУЧАЙ ЦИЛИНДРА

Рассмотрим эллиптический цилиндр C с полуосями a и b и высотой $2h$.

Уравнение цилиндра C можно представить в виде

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ |z| \leq h \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \\ |z| \leq h. \end{cases}$$

Для любого $\omega = (\varphi, \theta) \in S^2$, плоскости $e(p, \omega)$ для различных значений p образуют сечения в виде эллипса, или в виде усеченного эллипса (эллипсы без одного или двух эллиптических сегментов). Найдем функцию распределения площади сечения цилиндра C .



Сперва найдем значения p в случаях когда сечения являются эллипсами.

По симметрии рассмотрим только случай $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Для любого p мы рассматриваем сечение плоскости $e(p, \omega)$ с C .

Есть два значения p для которых $e(p, \omega) \cap C$ является точкой. Одна из них является значением опорной функции в направлении (φ, θ) , а второе – значение после которого сечение меняет образ.

Чтобы найти эти пересечения решим следующую систему:

$$\begin{cases} x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi + h \sin \theta - p = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(p - h \sin \theta - x \cos \theta \cos \varphi)^2}{b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi} = 1,$$

которое является квадратическим уравнением вида $Ax^2 + Bx + C = 0$, где

$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi}, \quad B = -\frac{2(p - h \sin \theta) \cos \theta \cos \varphi}{b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi}, \quad C = \frac{(p - h \sin \theta)^2}{b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi} - 1.$$

Очевидно, что $e(p, \varphi, \theta)$ будет иметь пересечение с границей верхнего основания C тогда и только тогда, когда $B^2 - 4AC \geq 0$, т.е.

$$a^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi - (h \sin \theta - p)^2 \geq 0.$$

Последнее эквивалентно

$$(5.1) \quad h \sin \theta - \cos \theta \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi} \leq p \leq h \sin \theta + \cos \theta \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

В (5.1) выражение в правой части представляет собой опорную функцию в направлении $(\varphi, \theta) \in S^2$, где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Это означает что в общем случае опорная функция цилиндра C имеет вид:

$$S_C(\varphi, \theta) = h|\sin \theta| + \cos \theta \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

В (5.1) мы видим что могут быть значения θ (для фиксированной φ) для которых сечения не могут быть эллипсами для любого $p \in [0, S_C(\varphi, \theta)]$. Этими значениями являются

$$\theta \leq \arctan \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}{h}.$$

Итак, мы рассматриваем два случая:

Случай 1. $\theta \in \left[0, \arctan \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}{h}\right]$.

Чтобы найти уравнение границы сечения, нам нужно решить систему:

$$(5.2) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x \cos \theta \cos \varphi + y \cos \theta \sin \varphi + z \sin \theta - p = 0 \\ |z| \leq h. \end{cases}$$

Как в случае эллипсоида, мы преобразуем координатную систему, чтобы привести кривую (5.2) в плоскость, где она представима в каноническом виде. После преобразований

$$(5.3) \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -p \end{pmatrix}$$

сечение образованное плоскостью $e(p, \varphi, \theta)$ переводится на плоскость $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$ координатной системы $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$.

Из (5.3) имеем

$$\begin{cases} x = (\bar{x} \sin \theta + (\bar{z} + p) \cos \theta) \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi, \\ y = (\bar{x} \sin \theta + (\bar{z} + p) \cos \theta) \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi, \\ z = (\bar{z} + p) \sin \theta - \bar{x} \cos \theta, \end{cases}$$

которое означает что в новой координатной системе (5.2) будет иметь вид:

$$(5.4) \quad \begin{cases} \frac{((\bar{x} \sin \theta + p \cos \theta) \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi)^2}{a^2} + \frac{((\bar{x} \sin \theta + p \cos \theta) \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi)^2}{b^2} = 1 \\ |p \sin \theta - \bar{x} \cos \theta| \leq h. \end{cases}$$

Когда $\theta = 0$, то сечение является прямоугольником с площадью

$$A(p, \varphi, \theta) = \frac{4abh\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - p^2}}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

Когда $\theta \neq 0$, первое выражение системы (5.4) характеризует кривую второго порядка (см. (4.9)) где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{b^2} \\ a_{12} = a_{21} &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta}{a^2} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta}{b^2}, \\ a_{22} &= \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}, \\ a_{13} = a_{31} &= \frac{p \cos^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{a^2} + \frac{p \sin^2 \varphi \cos \theta \sin \theta}{b^2}, \\ a_{23} = a_{32} &= -\frac{p \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta}{a^2} + \frac{p \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta}{b^2}, \\ a_{33} &= \frac{p^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{p^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta}{b^2} - 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что эта кривая является эллипсом. Поскольку мы рассматриваем только те значения этого эллипса, для которых $|p \sin \theta - \bar{x} \cos \theta| \leq h$, нам нужно перевести его в каноническую форму чтобы разобраться с его сегментами.

В [5] доказано, что существует угол β , где $\cot 2\beta = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$, что вращение координат на угол β переводит кривую второго порядка в форму

$$\lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2 + \frac{\Delta}{D} = 0,$$

где λ_1 и λ_2 являются корнями квадратического уравнения $\lambda^2 - I\lambda + D = 0$ (I, D и Δ определяются по (4.11)).

Фактически, после вышеупомянутого преобразования (5.4) будет иметь вид эллипса усеченного двумя параллельными прямыми, которые могут не быть параллельными полуосям эллипса. Для нахождения площади этой области нам нужно найти площади двух эллиптических сегментов.

Для простоты рассмотрим случай кругового цилиндра, т.е. $a = b = r$. В этом случае (5.4) имеет следующий вид :

$$(5.5) \quad \begin{cases} ((\bar{x} \sin \theta + p \cos \theta) \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi)^2 + ((\bar{x} \sin \theta + p \cos \theta) \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi)^2 = r^2 \\ |p \sin \theta - \bar{x} \cos \theta| \leq h. \end{cases}$$

Когда $\theta \neq 0$, первое уравнение системы (5.5) характеризует эллипс вида

$$(5.6) \quad \sin^2 \theta (\bar{x} + p \cot \theta)^2 + \bar{y}^2 = r^2$$

Если перенести начало координат системы $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ в направлении $\bar{O}\bar{X}$:

$$\begin{cases} \bar{\bar{x}} = \bar{x} + p \cot \theta \\ \bar{\bar{y}} = \bar{y} \\ \bar{\bar{z}} = \bar{z}, \end{cases}$$

то (5.5) примет вид:

$$(5.7) \quad \begin{cases} \sin^2 \theta \bar{x}^2 + \bar{y}^2 = r^2 \\ \left| \frac{p}{\sin \theta} - \bar{x} \cos \theta \right| \leq h. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что площадь области A' замкнутым эллипсом $\frac{\bar{x}^2}{l^2} + \frac{\bar{y}^2}{q^2} = 1$ и прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ ($-l \leq x_1 < x_2 \leq l$) равен

$$(5.8) \quad A' = 2q \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} dx = q \left[x_2 \sqrt{1 - \frac{x_2^2}{l^2}} - x_1 \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{l^2}} \right] + lq \left[\arcsin \frac{x_2}{l} - \arcsin \frac{x_1}{l} \right].$$

Сравнивая (5.7) с (5.8) получаем, что $A(p, \varphi, \theta)$ равен

$$A(p, \varphi, \theta) = r \left[\frac{p + h \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p + h \sin \theta)^2}{r^2 \cos^2 \theta}} - \frac{p - h \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p - h \sin \theta)^2}{r^2 \cos^2 \theta}} \right] + \\ + \frac{r^2}{\sin \theta} \left[\arcsin \frac{p + h \sin \theta}{r \cos \theta} - \arcsin \frac{p - h \sin \theta}{r \cos \theta} \right],$$

где $0 \leq p \leq r \cos \theta - h \sin \theta$.

Для $p \geq r \cos \theta - h \sin \theta$ сечение является эллипсом отрезанный из одного конца, следовательно имеем:

$$A(p, \varphi, \theta) = \frac{r^2}{\sin \theta} \arccos \frac{p - h \sin \theta}{r \cos \theta} - r \frac{p - h \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p - h \sin \theta)^2}{r^2 \cos^2 \theta}}.$$

Случай 2. $\theta \in \left[\arctan \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}{h}, \frac{\pi}{2} \right)$.

В этом случае сечение образованное плоскостью $e(p, \varphi, \theta)$ может быть эллипсом, или эллипсом без одного эллиптического сегмента. Полноценными эллипсами являются сечения для которых

$$0 \leq p \leq h \sin \theta - \cos \theta \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi},$$

и в этом случае используя (4.12) получаем

$$(5.9) \quad A(p, \varphi, \theta) = \frac{\pi ab}{\sin \theta}.$$

(5.9) правильно (для всех p) и тогда, когда $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Теперь пусть $p \geq h \sin \theta - \cos \theta \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}$. Сного для простоты рассмотрим случай кругового цилиндра. Имеем эллипс (5.6), отрезанный прямой $x = \frac{p - h \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$, следовательно

$$(5.10) \quad A(p, \varphi, \theta) = \frac{r^2}{\sin \theta} \arccos \frac{p - h \sin \theta}{r \cos \theta} - r \frac{p - h \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p - h \sin \theta)^2}{r^2 \cos^2 \theta}}.$$

Заметим, что подставляя $p = h \sin \theta + r \cos \theta$ получаем $A(p, \varphi, \theta) = 0$, что логично.

Итак, мы получили следующие результаты:

- (1) Для любого эллиптического цилиндра с высотой $2h$ и полуосями a и b , если сечение образованный плоскостью $e(p, \varphi, \theta)$ является эллипсом (непрерывно $\theta \neq 0$), то его площадь равен

$$(5.11) \quad A(p, \varphi, \theta) = \frac{\pi ab}{|\sin \theta|},$$

Когда $\theta = 0$, имеем

$$A(p, \varphi, \theta) = \frac{4abh\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi - p^2}}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

В частном случае, когда имеем бесконечный эллиптический цилиндр ($h = \infty$), то все его сечения эллипсы $\theta \neq 0$, следовательно площадь сечения вычисляется через (5.11) (для бесконечного цилиндра $A(p, \varphi, 0) = \infty$).

- (2) Для кругового цилиндра с высотой $2h$ и радиусом r площадь сечения образованной плоскостью $e(p, \varphi, \theta)$ равен

$$(5.12) \quad A(p, \varphi, \theta) = \begin{cases} 4h\sqrt{r^2 - p^2}, & \text{если } \theta = 0, \\ r \left[\frac{p+h \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p+h \sin \theta)^2}{r^2 \cos^2 \theta}} - \frac{p-h \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p-h \sin \theta)^2}{r^2 \cos^2 \theta}} \right] + \\ + \frac{r^2}{\sin \theta} \left[\arcsin \frac{p+h \sin \theta}{r \cos \theta} - \arcsin \frac{p-h \sin \theta}{r \cos \theta} \right], & \text{если } 0 < |\theta| \leq \arctan \frac{r}{h}, p \leq r \cos \theta - h |\sin \theta|, \\ \frac{r^2}{|\sin \theta|} \arccos \frac{p-h |\sin \theta|}{r \cos \theta} - r \frac{p-h |\sin \theta|}{|\sin \theta| \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p-h |\sin \theta|)^2}{r^2 \cos^2 \theta}}, & \text{если } 0 < |\theta| \leq \arctan \frac{r}{h}, |p - r \cos \theta| \leq h |\sin \theta|, \\ \frac{\pi ab}{|\sin \theta|}, & \text{если } \arctan \frac{r}{h} < |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, p \leq h |\sin \theta| - r \cos \theta, \\ \frac{r^2}{|\sin \theta|} \arccos \frac{p-h |\sin \theta|}{r \cos \theta} - r \frac{p-h |\sin \theta|}{|\sin \theta| \cos \theta} \sqrt{1 - \frac{(p-h |\sin \theta|)^2}{r^2 \cos^2 \theta}}, & \text{если } \arctan \frac{r}{h} < |\theta| < \frac{\pi}{2}, |p - h |\sin \theta|| \leq r \cos \theta. \end{cases}$$

Чтобы найти функцию распределения площади сечения цилиндра нам нужно решить систему (5.12) относительно p . Как видно в некоторых случаях невозможно найти это решение в явном виде в терминах r, h, φ, θ и A . Поэтому мы не можем найти окончательный вид $F_C(x, \varphi, \theta)$, несмотря на то, что в некоторых случаях это возможно. Но благодаря системе (5.12) мы можем найти площадь случайного сечения. Кроме того, для фиксированной r, h , мы можем получить таблицу значений $F_C(x, \varphi, \theta)$ используя формулу

$$F_C(x, \varphi, \theta) = \frac{h |\sin \theta| + r \cos \theta - p_x}{h |\sin \theta| + r \cos \theta}.$$

где p_x , числовое решение системы (5.12) (относительно p), для которого площадь сечения равен x . Другое важное заключение, что можно сделать из (5.12), это факт, что $A(p, \varphi, \theta)$, следовательно и $F_C(x, \varphi, \theta)$, не зависят от φ (в случае эллиптического цилиндра мы такого не имеем). Далее, $A(p, \varphi, \theta)$ и $F_C(x, \varphi, \theta)$ непрерывны относительно p и x соответственно для любой фиксированной $(\varphi, \theta) \in S^2$, но в отличие от эллипсоида, они не являются непрерывными относительно (φ, θ) . Этот факт объясняется тяжестью точки $\theta = \frac{\pi}{2}$ и тем, что в точке $\theta = 0$ сечение превращается в прямоугольник.

Abstract. In the paper the orientation dependent chord length distribution functions for some bounded convex domains are obtained. In particular, formulae for the orientation dependent chord length distributions for a regular polygon and an ellipse are obtained. Explicit forms of the orientation dependent chord length distributions were known only in the cases of a disc and a triangle. We also obtain the cross-section area distribution functions for an ellipsoid and a cylinder. The cross-section area distribution function was known only in the case of a ball.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. A. Santalo, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, MA, (2004).
- [2] G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, New York, Wiley (1975).
- [3] Р.В. Амбарцумян, Й. Мекке, Д. Штоян, *Введение в стохастическую геометрию*, М., Наука (1990).
- [4] R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry*, Springer, Berlin-Heidelberg (2008).
- [5] П. С. Александров, *Лекции по аналитической геометрии, дополненные необходимыми сведениями из алгебры*, Москва, Наука (1968).
- [6] G. Bianchi and G. Averbok, "Confirmation of Matheron's Conjecture on the covariogram of a planar convex body", *Journal of the European Mathematical Society*, 11, 1187 – 1202 (2009).
- [7] G. Bianchi, "Matheron's conjecture for the covariogram problem", *J. London Math. Soc.*, 71, no. 1, 203 – 220 (2005).
- [8] A. G. Gasparyan, V. K. Ohanyan, "Recognition of triangles by covariogram", *Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of sciences)*, 48, no. 3, 110 – 122 (2013).

Поступила 3 июля 2013