Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 2, 2014, стр. 3-24.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ФРАНКЛИНА

Г. Г. ГЕВОРКЯН

Ереванский государственный университет, Армения [1]
E-mails: *ggg@ysu.am*

Аннотация. Рассматривается общая система Франклина, порожденная сильно регулярным разбиением отрезка $[0;1]$. Для таких систем доказываются: 1) абсолютная сходимость ряда Фурье-Франклина в точке является локальным свойством; 2) ряд Фурье-Франклина функции ограниченной вариации почти всюду абсолютно сходится; 3) любая почти всюду конечная измеримая функция представляется почти всюду абсолютно сходящимся рядом по этой системе.

MSC2010 numbers: 42C15; 42C25.

Ключевые слова: Абсолютная сходимость; общая система Франклина.

1. Введение

Определение 1.1. *Последовательность (разбиение)* $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ *называется допустимой, если* $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in (0;1)$, $n \geq 2$, $\mathcal{T}$ *всюду плотно в* $[0;1]$ *и каждая точка* $t \in (0;1)$ *встречается в* $\mathcal{T}$ *не более чем два раза.*

Пусть $\mathcal{T} = \{t_n : n \geq 0\}$ допустимая последовательность. Для $n \geq 2$ обозначим $\mathcal{T}_n = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$. Допустим π_n получается из $\mathcal{T}_n$ неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \leq \tau_{i+1}^n, 0 \leq i \leq n-1\}$, $\pi_n = \mathcal{T}_n$. Тогда через S_n обозначим пространство функций определенных на $[0;1]$, которые непрерывны слева, линейны на $(\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и непрерывны в τ_i^n, если $\tau_{i-1}^n < \tau_i^n < \tau_{i+1}^n$. Ясно, что $dim S_n = n+1$ и $S_{n-1} \subset S_n$. Следовательно, существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\|f\|_2 = 1$. Эту функцию называют n-ой функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$. Известно, что $f(t_n) \neq 0$. Поэтому полагается $f(t_n) > 0$.

Определение 1.2. *Общая система Франклина* $\{f_n(x) : n \geq 0\}$ *соответствующая разбиению* $\mathcal{T}$ *определяется по правилу* $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \sqrt{3}(2x-1)$ *и*

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта 13-11A006.

для $n \geq 2$ функция $f_n(x)$ есть n-ая функция Франклина, соответствующая разбиению $\mathcal{T}$.

Общая система Франклина исследуется начиная с работы [1], где доказано, что если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции f, то

$$|S_n(x)| \leq C \cdot \mathcal{M}(f,x), \tag{1.1}$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x)$ частичная сумма ряда Фурье-Франклина, а $\mathcal{M}(f,x)$ максимальная функция Харди-Литлвуда функции f.

Далее в работах [2], [3] для исследования свойств общей системы Франклина введены понятия сильной и слабой регулярности разбиения $\mathcal{T}$. Приведем необходимые определения.

Определение 1.3. *Последовательность $\mathcal{T}$ называется квазидиадической, если $t_{2^k+1} < t_{2^k+2} < ... < t_{2^{k+1}}$ и между двумя соседними точками из $\{t_n : 0 \leq n \leq 2^k\}$ находится по одной точке из $\{t_n : 2^k < n \leq 2^{k+1}\}$.*

Определение 1.4. *Последовательность $\mathcal{T}$ называется сильно регулярной, если существует постоянная $\gamma > 1$, такая что*

$$\gamma^{-1} < \frac{\tau_{i+1}^n - \tau_i^n}{\tau_i^n - \tau_{i-1}^n} < \gamma, \quad \text{для} \quad n = 2, 3, ..., \quad i = 1, 2, ..., n-1.$$

Если в последовательности π_n точкой t_n является точка τ_i^n, то обозначаются $t_n^- = \tau_{i-1}^n$ и $t_n^+ = \tau_{i+1}^n$. Иными словами для фиксированного n через t_n^- и t_n^+ обозначаются ближайшие к t_n точки из $\mathcal{T}_{n-1}$, соответственно, слева и справа. Интервалы $(t_n^-; t_n)$ и $(t_n; t_n^+)$ назовем смежными.

Определение 1.5. *Последовательность $\mathcal{T}$ называется слабо регулярной, если существует постоянная $\gamma > 1$, такая что*

$$\gamma^{-1} < \frac{t_n^+ - t_n}{t_n - t_n^-} < \gamma, \quad \text{для} \quad n = 2, 3, ...$$

Иными словами последовательность $\mathcal{T}$ слабо регулярная, если отношение длин смежных интервалов снизу и сверху ограничены числами $1/\gamma$, γ, соответственно.

Ясно, что если $\mathcal{T}$ слабо (сильно) регулярная, то в ней каждая точка встречается один раз, т.е. двойных точек нет.

Отметим, что если последовательность $\mathcal{T}$ диадическая, т.е. $t_n = \frac{2m-1}{2^{k+1}}$, где $n = 2^k + m$, $1 \leq m \leq 2^k$, $k = 0, 1, 2, ...$, то соответствующая система Франклина есть классическая система Франклина [7].

Условимся о некоторых обозначениях.

Для $f \in L_1$ через $a_n(f)$, $n = 0, 1, 2, ...$, обозначим коэффициенты Фурье-Франклина функции f, т. е. $a_n(f) = \int_0^1 f(t) f_n(t) dt$.

Через $c, C, C_1, C_\gamma, ...$, обозначаются постоянные зависящие только от своих индексов. Значения этих постоянных в разных формулах могут быть разными.

Длину отрезка I обозначим через $|I|$.

$\rho(t, I)$-это расстояние между точкой t и интервалом I, и вообще $\rho(A, B)$-расстояние между множествами A и B, т.е. $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|$.

Через $d_n(t, x)$ обозначим количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые находятся между точками t и x. В случае $x = t_n$, вместо $d_n(t, t_n)$ обозначим $d_n(t)$, т.е. $d_n(t)$-количество точек из $\mathcal{T}_n$, которые находятся между точками t_n и t. Для множества A через $d_n(A)$ обозначим $d_n(A) = \min_{t \in A} d_n(t)$.

Запись $a \sim b$ означает, что существуют положительные постоянные c и C, такие что $c \cdot a \leq b \leq C \cdot a$, а запись $a \sim_\gamma b$ означает, что эти постоянные могут зависеть от γ.

Через $\chi_A(x)$ обозначим характеристическую функцию множества A, а через $\mu(A)$-лебегову меру множества A, A^c - дополнение множества A.

$V_I(f)$-вариация функции f на отрезке I, а $BV(I)$-множество функций ограниченной вариации на I. Если $I = [0; 1]$, то просто обозначим $V(f)$ и BV.

2. Некоторые свойства общей системы Франклина

Семейство интервалов линейности первых $n+1$ функций $\{f_k(x)\}_{k=0}^n$ обозначим через $\mathcal{I}_n$. Ясно, что интервалы семейства $\mathcal{I}_n$ получаются разбиением отрезка $[0; 1]$ точками $\mathcal{T}_n$. Обозначим также $\mathcal{I} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{I}_n$. Следующая лемма доказана в работе [4], (см. лемму 2.2).

Лемма 2.1. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и интервалы I, I_1 с общим концом α принадлежат некоторому $\mathcal{I}_{n_1}$. Тогда, если $I_k \in \mathcal{I}_{n_k}$, $k = 1, ..., m$, различные интервалы, с общим концом α, $I_k \subset I_{k-1}$ и $I \in \mathcal{I}_{n_m}$, то $m \leq C_\gamma$.*

В исследованиях общей системы Франклина важную роль играют интервалы J_n и Δ_n связанные с функцией f_n. Для определения этих интервалов напомним, что при определении слабой регулярности мы определили точки t_n^- и t_n^+ как ближайшие к t_n точки из $\mathcal{T}_{n-1}$, соответственно, слева и справа. Тогда обозначим через Δ_n интервал $(t_n^-; t_n^+)$. Известно, что функция $|f_n(x)|$ достигает наибольшего значения на $[t_n^-; t_n^+]$. Поэтому интервал Δ_n называют интервалом пика функции f_n. Определим еще точки t_n^{--} и t_n^{++} как точки из $\mathfrak{I}_{n-1}$, соответственно, ближайшие к t_n^- слева и к t_n^+ справа. Тогда, если $t_n = \tau_i^n$, то $t_n^{--} = \tau_{i-2}^n$, $t_n^- = \tau_{i-1}^n$, $t_n^+ = \tau_{i+1}^n$ и $t_n^{++} = \tau_{i+2}^n$. Из интервалов $[\tau_{i-2}^n; \tau_i^n]$, $[\tau_{i-1}^n; \tau_{i+1}^n]$, $[\tau_i^n; \tau_{i+2}^n]$ тот, который имеет наименьшую длину обозначим $I^* = [\tau_{i^*}^n; \tau_{i^*+2}^n]$. Интервал J_n один из интервалов $[\tau_{i^*}^n; \tau_{i^*+1}^n]$ и $[\tau_{i^*+1}^n; \tau_{i^*+2}^n]$ с условием, что $|J_n| = \max(|[\tau_{i^*}^n; \tau_{i^*+1}^n]|, |[\tau_{i^*+1}^n; \tau_{i^*+2}^n]|)$.

Очевидно, что если последовательность слабо регулярная, то $|J_n| \sim_\gamma |\Delta_n|$. Поэтому, ради удобства, в оценках полученных в работах [2], [5] для функций f_n мы можем J_n заменить на Δ_n. Приведем некоторые оценки для функций Франклина, доказанные в работах [2] и [5]. Во первых, существует такая постоянная C_γ, что для всех n и x выполняются

$$|f_n(x)| \le C_\gamma q^{d_n(\delta)} \frac{|\Delta_n|^{\frac{1}{2}}}{|\Delta_n| + \rho(\delta, \Delta_n) + |\delta|} \quad \text{когда} \quad x \in \delta, \tag{2.1}$$

где q здесь и далее равно $\frac{2}{3}$, а δ-любой интервал линейности функции f_n, т.е. $\delta \in \mathfrak{I}_n$.

Далее, для любого $p \in [1; \infty)$ и некоторого $\epsilon \in (0; 1)$ имеют место

$$\int_{\tau_{i-2}^n}^{\tau_{i-1}^n} |f_n(x)|^p dx \le \epsilon^p \int_{\tau_{i-1}^n}^{\tau_i^n} |f_n(x)|^p dx \quad \text{если} \quad \tau_i^n < t_n, \tag{2.2}$$

$$\int_{\tau_{i+1}^n}^{\tau_{i+2}^n} |f_n(x)|^p dx \le \epsilon^p \int_{\tau_i^n}^{\tau_{i+1}^n} |f_n(x)|^p dx \quad \text{если} \quad \tau_i^n > t_n, \tag{2.3}$$

и

$$\|f_n\|_{L_p(\Delta_n)} \sim_\gamma \|f_n\|_p \sim_\gamma |\Delta_n|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \quad \text{когда} \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2.4}$$

Лемма 2.2. *Для*

$$f_n^{(-1)}(x) := \int_0^x f_n(t)dt, \quad x \in [0; 1], \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

верна оценка

$$\left|f_n^{(-1)}(x)\right| \le C_\gamma q^{d_n(\delta)} \frac{|\Delta_n|^{\frac{1}{2}}|\delta|}{|\Delta_n| + \rho(\delta, \Delta_n) + |\delta|} \quad \textit{когда} \quad x \in \delta, \tag{2.5}$$

где δ любой интервал линейности функции f_n.

Доказательство. Когда $x \in \delta$ и δ левее Δ_n оценка (2.5) следует из (2.1) и (2.2). В случае когда δ правее Δ_n, учитывая, что $\int_0^1 f_n(t)dt = 0$, $f_n^{(-1)}(x)$ можно заменить на $-\int_x^1 f_n(t)dt$ и применить (2.1) и (2.3). Лемма доказана.

Для $I \in \mathfrak{I}$ обозначим

(2.6) $$D_I = \{n : f_n \text{ линейна на } I\} \quad \text{и} \quad D_{I,k} = \{n \in D_I : d_n(I) = k\}.$$

В работе [3] доказана следующая (см. [3] лемма 3.4.)

Лемма 2.3. *Пусть последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для любого интервала $I \in \mathfrak{I}$ и любого числа k имеет место*

$$\sum_{n:n\in D_{I,k}} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(I,\Delta_n) + |I|} \le C_\gamma(k+1).$$

3. Свойство локализации абсолютной сходимости рядов Фурье-Франклина

В этом разделе будет доказано, что абсолютная сходимость ряда Фурье-Франклина в точке x локальное свойство, т.е. если $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$ ряд Фурье-Франклина функции f, то сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(x)|$ зависит от поведения функции f в некоторой окрестности точки x. Для классической системы Франклина аналогичные вопросы рассмотрены в работе [8].

Лемма 3.1. *Пусть последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда если $f \in L_1[0;1]$ и $f(t) = 0$, когда $t \in [0;\beta]$, то*

1) $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f) f_n(x)| \le C_{\gamma,f,x} \qquad \text{для} \quad x < \beta.$$

2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f) f_n(x)|$ равномерно сходится на $[0;\beta']$, при любом $\beta' < \beta$.

Эта лемма вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.2. *Пусть последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярная с параметром γ, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина и $k_0 > 2$. Допустим n_0 такое, что в интервале $(x;\beta)$ есть по крайней мере k_0 точек из $\mathfrak{T}_{n_0}$. Тогда если $f \in L_1[0;1]$ и $f(t) = 0$, когда $t \in [0;\beta]$, то*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n f_n(x)| \le C_\gamma \frac{\|f\|_1 q^{k_0}}{(\beta - x)}, \quad \text{когда} \quad x < \beta,$$

где $a_n = a_n(f)$.

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

Первый случай. $\Delta_n \subset (x;\beta)$. Применяя (2.1), получаем

$$|a_n| \le C_\gamma \frac{|\Delta_n|^{1/2}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n,\beta)} q^{d_n(\beta)} \|f\|_1. \tag{3.1}$$

Поэтому в силу (2.1), имеем

$$|a_n f_n(x)| \le C_\gamma \frac{|\Delta_n| \|f\|_1 q^{d_n(\beta)+d_n(x)}}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n,\beta))(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n,x))}$$

Нетрудно заметить, что

$$\frac{|\Delta_n|}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n,\beta))(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n,x))} \le \frac{1}{\beta - x}.$$

Поэтому для $\Delta_n \subset (x;\beta)$ имеем

$$|a_n f_n(x)| \le C_\gamma \frac{\|f\|_1}{\beta - x} q^{d_n(\beta)+d_n(x)}.$$

Отсюда, учитывая, что выражение $d_n(\beta) + d_n(x)$, с условием $\Delta_n \subset (x;\beta)$, растет вместе с n, принимая только натуральные значения не меньше k_0, получаем

$$\sum_{n:\Delta_n \subset (x;\beta)} |a_n f_n(x)| \le C_\gamma \frac{\|f\|_1 q^{k_0}}{\beta - x}. \tag{3.2}$$

Второй случай. $x \in \Delta_n$ и $n \ge n_0$. Применяя (2.1) получаем (3.1). Тогда в силу (2.4), получаем

$$|a_n f_n(x)| \le C_\gamma q^{d_n(\beta)} \frac{\|f\|_1}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n,\beta)}.$$

Из леммы 2.1 следует, что величина $d_n(\beta)$ каждое натуральное значение может принимать не более чем C_γ раз. Поэтому из неравенства $d_n(\beta) \ge k_0$ следует

$$\sum_{n \ge n_0 : x \in \Delta_n} |a_n f_n(x)| \le C_\gamma \frac{\|f\|_1 q^{k_0}}{\beta - x}. \tag{3.3}$$

Третий случай. $\Delta_n \subset [0;x)$. Используя (2.1), получаем (3.1) и вновь используя (2.1) получаем

$$\begin{aligned} |a_n f_n(x)| &\le C_\gamma \frac{|\Delta_n| \|f\|_1 \cdot q^{d_n(\beta)+d_n(x)}}{(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n,\beta))(|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_{n,x}) + |I_{n,x}|)} \\ &\le C_\gamma \frac{\|f\|_1}{(\beta - x)} \cdot \frac{|\Delta_n| q^{d_n(\beta)+d_n(x)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_{n,x}) + |I_{n,x}|}, \end{aligned}$$

где $I_{n,x}$ тот интервал линейности функции f_n, которому принадлежит точка x. Интервалы $I_{n,x}$ вложены. Через I_x^j обозначим те из интервалов $I_{n,x}$, которые не повторяются, т.е. $I_x^{j+1} \subset I_x^j$ и для любого n найдется такое j, что $I_{n,x} = I_x^j$. Тогда

$$\sum_{n:\Delta_n \subset [0;x)} |a_n f_n(x)| \le \tag{3.4}$$

$$C_\gamma \frac{\|f\|_1}{\beta - x} \sum_j \sum_{m\geq 1} q^m \sum_{\substack{n:\Delta_n \subset [0;x) \\ I_{n,x}=I^j, d_n(x)=m}} \frac{|\Delta_n| q^{d_n(\beta)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I_x^j) + |I_x^j|}.$$

Применяя лемму 2.3 и обозначив $\xi_{j,\beta} = \min_{n:I_{n,x}=I_x^j} d_n(\beta)$, из (3.4) получим

$$\text{(3.5)} \qquad \sum_{n:\Delta_n \subset [0;x)} |a_n f_n(x)| \leq C_\gamma \frac{\|f\|_1}{\beta - x} \sum_j q^{\xi_{j,\beta}} \sum_{m\geq 1} q^m (m+1) \leq C_\gamma \frac{\|f\|_1}{\beta - x} \sum_j q^{\xi_{j,\beta}}.$$

Заметим, что числа $\xi_{j,\beta}$ принимают натуральные значения не меньше k_0. Из леммы 2.1, следует, что числа $\xi_{j,\beta}$ каждое натуральное значение могут принимать не более C_γ раз. Поэтому из (3.5) получим

$$\text{(3.6)} \qquad \sum_{n\geq n_0, \Delta_n \subset [0;x)} |a_n f_n(x)| \leq \frac{C_\gamma \|f\|_1 q^{k_0}}{\beta - x}.$$

Четвертый случай. $\beta \in \Delta_n$. В этом случае, с учетом (2.4) и (2.1), получим

$$\text{(3.7)} \qquad |a_n f_n(x)| \leq C_\gamma \frac{\|f\|_1 \cdot q^{d_n(x)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, x)}.$$

Из леммы 2.1 следует, что $d_n(x)$ каждое натуральное значение может принимать не более C_γ раз. Поэтому из (3.7), с учетом того, что $d_n(x) \geq k_0$, следует

$$\text{(3.8)} \qquad \sum_{\beta \in \Delta_n} |a_n f_n(x)| \leq C_\gamma \frac{\|f\|_1 q^{k_0}}{\beta - x}.$$

Пятый случай. $\Delta_n \subset (\beta; 1)$. Напомним, что $\Delta_n = (t_n^-; t_n^+)$. Обозначим $V_n^- = (\beta; t_n^-)$, $V_n^+ = (t_n^+; 1)$. Тогда

$$a_n = \int_{V_n^-} f(t) f_n(t) dt + \int_{\Delta_n} f(t) f_n(t) dt + \int_{V_n^+} f(t) f_n(t) dt =: a_{n,1} + a_{n,2} + a_{n,3}$$

и

$$\sum_{\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_n f_n(x)| \leq \sum_{i=1}^{3} \sum_{\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_{n,i} f_n(x)|.$$

А) Оценим $\sum_{\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_{n,2} f_n(x)|$. Из неравенства (см. (2.4)) $|a_{n,2}| \leq C_\gamma |\Delta_n|^{-1/2} \int_{\Delta_n} |f(t)| dt$ и с учетом (2.1), получаем

$$|a_{n,2} f_n(x)| \leq C_\gamma \frac{q^{d_n(x)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, x)} \int_{\Delta_n} |f_n(t)| dt \leq C_\gamma \frac{q^{d_n(x)}}{\beta - x} \int_{\Delta_n} |f_n(t)| dt.$$

Следовательно

$$\text{(3.9)} \qquad \sum_{\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_{n2} f_n(x)| \leq \frac{C_\gamma}{\beta - x} \sum_{k\geq k_0} q^k \sum_{n:d_n(x)=k} \int_{\Delta_n} |f_n(t)| dt.$$

Из леммы 2.1 следует, что количество вложенных интервалов Δ_n с условием $d_n(x) = k$ не превосходит C_γ. Поэтому из (3.9), учитывая, что $d_n(x) \geq k_0$, имеем

$$\sum_{\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_{n2} f_n(x)| \leq \frac{C_\gamma}{\beta - x} \sum_{k \geq k_0} q^k \|f\|_1 \leq \frac{C_\gamma \|f\|_1 q^{k_0}}{\beta - x}. \tag{3.10}$$

B) Оценим $\sum_{\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_{n3} f_n(x)|$. Напомним, что t_n^+ правая соседная с t_n точка из π_n. Нетрудно заметить, что если $n_1 < n_2 < \ldots$ такие числа, что $d_{n_m}(x) = k$, то $t^+_{n_{m+1}} < t^+_{n_m}$ и $d_{n_m}(t^+_{n_l}) \geq m - l$, когда $m > l$. Положим также $t_{n_0} = 1$. Тогда в силу (2.1) получим

$$|a_{n_m,3}| \leq \sum_{l:l \leq m} \int_{t^+_{n_l}}^{t^+_{n_{l-1}}} |f(x)||f_{n_m}(x)|dx \leq C_\gamma \sum_{l:l \leq m} |\Delta_{n_m}|^{-1/2} q^{m-l} \int_{t^+_{n_l}}^{t^+_{n_{l-1}}} |f(x)|dx.$$

С учетом (2.1), для n_m с условиями $\Delta_{n_m} \subset (\beta;1)$ и $d_{n_m}(x) = k$ имеем

$$|a_{n_m,3} f_{n_m}(x)| \leq C_\gamma \frac{q^k}{\beta - x} \sum_{l:l \leq m} q^{m-l} \int_{t^+_{n_l}}^{t^+_{n_{l-1}}} |f(x)|dx.$$

Следовательно

$$\sum_{m:d_{n_m}(x)=k} |a_{n_m,3} f_{n_m}(x)| \leq C_\gamma \frac{q^k}{\beta - x} \sum_{m:d_{n_m}(x)=k} \sum_{l:l \leq m} q^{m-l} \int_{t^+_{n_l}}^{t^+_{n_{l-1}}} |f(x)|dx$$

$$\leq C_\gamma \frac{q^k}{\beta - x} \sum_l \int_{t^+_{n_l}}^{t^+_{n_{l-1}}} |f(x)|dx \leq C_\gamma \frac{q^k \|f\|_1}{\beta - x}.$$

Последнее неравенство суммируя по k и учитывая, что $k \geq k_0$, получим

$$\sum_{n:\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_{n_m,3} f_{n_m}(x)| \leq C_\gamma \frac{\|f\|_1 q^{k_0}}{\beta - x}. \tag{3.11}$$

C) Оценим $\sum_{\Delta_n \subset (\beta;1)} |a_{n,1} f_n(x)|$. Для фиксированного натурального i обозначим

$$\mathcal{N}_i = \{n : \Delta_n \subset (\beta;1), \text{в } (x;\beta) \text{ есть } i \text{ интервалов линейности функции } f_n\},$$

и пусть Λ_i тот из этих интервалов линейности, который ближе β. При фиксированных i, k и для n, с условием $d_n(\Lambda_i) = k$ обозначим через $L_{n,j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, интервалы линейности функции f_n, пересекающиеся с V_n^-, причем $\max L_{n,j} = \min L_{n,j+1}$. Тогда

$$|a_{n,1}| \leq \sum_{j=1}^k \int_{L_{n,j}} |f_n(t)||f(t)|dt \leq C_\gamma \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_n|^{1/2} q^{k-j}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, L_{n,j}) + |L_{n,j}|} \int_{L_{n,j}} |f(t)|dt.$$

Следовательно (см. (2.1))

$$|a_{n,1} f_n(x)| \leq C_\gamma \frac{q^{k+i}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, x)} \sum_{j=1}^k \frac{|\Delta_n| q^{k-j}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, L_{n,j}) + |L_{n,j}|} \int_{L_{n,j}} |f(x)|dx.$$

Поэтому

$$\sum_{n:d_n(\Lambda_i)=k} |a_{n,1}f_n(x)|$$

$$\le C_\gamma \frac{q^{k+i}}{|\Delta_n|+\rho(\Delta_n,x)} \sum_{n:d_n(\Lambda_i)=k} \sum_{j=1}^{k} \frac{|\Delta_n|q^{k-j}}{|\Delta_n|+\rho(\Delta_n,L_{n,j})+|L_{n,j}|} \int_{L_{n,j}} |f(x)|dx.$$

Заметим, что при фиксированном j интервалы $L_{n,j}$ либо не пересекаются, либо имеют общий левый конец. Через $L^*_{j,p}$, $p=1,2,...$, обозначим максимальные из них. Пусть J такой интервал, что для некоторых n и j имеет место $J=L_{n,j}$. Тогда $d_n(J)=k-j$. Из леммы 2.3 имеем

$$\sum_{n:d_n(J)=k-j} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n|+\rho(\Delta_n,J)+|J|} \le C_\gamma(k-j+1).$$

Заметим также, что если $L_{n_1,j} \supset L_{n_2,j} \supset ... \supset L_{n_{m_j},j}$, то интервалы линейности $L_{n_l,j-1}$, $l=1,2,...m_j$ неизменны. Поэтому в силу леммы 2.1 имеем $m_j \le C_\gamma$. Поэтому

$$\sum_k \sum_{n:d_n(\Lambda_i)=k} |a^1_n f_n(x)| \tag{3.12}$$

$$\le \frac{C_\gamma}{\beta-x} \sum_k q^{k+i} \sum_{j=1}^{k} q^{k-j}(k-j+1) \sum_p \int_{L^*_{j,p}} |f(x)|dx \le \frac{C_\gamma}{\beta-x} q^i \|f\|_1.$$

Суммируя (3.12) по i и учитывая, что $i \ge k_0$ получим

$$\sum_{n:\Delta_n\subset(\beta;1)} |a^1_n f_n(x)| \le \frac{C_\gamma q^{k_0}\|f\|_1}{\beta-x}. \tag{3.13}$$

Из (3.10), (3.11), (3.13) следует

$$\sum_{n:\Delta_n\subset(\beta;1)} |a_n f_n(x)| \le \frac{C_\gamma \|f\|_1}{\beta-x}. \tag{3.14}$$

Из (3.2), (3.3), (3.6), (3.8) и (3.14) следует утверждение леммы.

Аналогично доказываются следующие утверждения.

Лемма 3.3. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда если $f \in L_1[0;1]$ и $f(t)=0$, когда $t \in [\alpha;1]$, то*

1) $\sum_{n=0}^\infty |a_n(f)f_n(x)| \le C_{\gamma,f,x}$, когда $x>\alpha$.

2) ряд $\sum_{n=0}^\infty |a_n f_n(x)|$ равномерно сходится на $[\alpha';1]$, при любом $\alpha'>\alpha$.

Лемма 3.4. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина и $k_0 > 2$. Допустим n_0 такое, что в интервале $(\alpha; x)$ есть по крайней мере k_0 точек из $\mathcal{T}_{n_0}$. Тогда если $f \in L_1[0;1]$ и $f(t) = 0$, когда $t \in [\alpha; 1]$, то*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n f_n(x)| \le C_\gamma \frac{\|f\|_1 q^{k_0}}{(\alpha - x)}, \quad \text{когда} \quad x > \alpha,$$

где $a_n = a_n(f)$.

Из лемм 3.1, 3.3 получаются теоремы 3.1 и 3.2.

Теорема 3.1. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда если $f \in L_1[0;1]$ и $f(x) = 0$, когда $x \in (\alpha; \beta)$, то*

1)$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f) f_n(x)| \le C_{\gamma,f,x}$, когда $x \in (\alpha; \beta)$,

2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f) f_n(x)|$ равномерно сходится на $[\alpha'; \beta'] \subset (\alpha; \beta)$.

Теорема 3.2. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда если $f, g \in L_1[0;1]$ и $f(x) = g(x)$, когда $x \in (\alpha; \beta)$, то*

1)$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f) - a_n(g)||f_n(x)| \le C_{\gamma,f,x}$, когда $x \in (\alpha; \beta)$,

2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(f) - a_n(g)||f_n(x)|$ равномерно сходится на $[\alpha'; \beta'] \subset (\alpha; \beta)$, т.е. ряды Фурье функций f и g равномерно абсолютно равносходятся на $[\alpha'; \beta']$.

Теорема 3.1 указывает на то, что абсолютная сходимость ряда Фурье-Франклина интегрируемой функции f в точке x зависит от поведения функции f в некоторой окрестности точки x. Следующая теорема указывает на то, что абсолютная сходимость ряда Фурье-Франклина интегрируемой функции f в точке x не зависит от тех функций f_n, интервалы пика которых не находятся в некоторой окрестности точки x.

Теорема 3.3. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда если f интегрируемая функция и $x \in (\alpha; \beta)$, то*

$$\sum_{\Delta_n \not\subset (\alpha;\beta)} |a_n f_n(x)| < \infty,$$

где $a_n = a_n(f)$.

Доказательство. В силу теоремы 3.2, без ограничения общности можно предположить, что $f(t) = 0$, когда $t \notin (\alpha; \beta)$. Количество тех n, для которых $x \in \Delta_n$

и $\Delta_n \not\subset (\alpha;\beta)$ ограничено. Поэтому достаточно доказать неравенства

$$\sum_{\alpha\in\Delta_n, x\notin\Delta_n} |a_n f_n(x)| < \infty, \qquad \sum_{\beta\in\Delta_n, x\notin\Delta_n} |a_n f_n(x)| < \infty, \tag{3.15}$$

$$\sum_{\Delta_n\subset(0;\alpha)} |a_n f_n(x)| < \infty, \qquad \sum_{\Delta_n\subset(\beta;1)} |a_n f_n(x)| < \infty. \tag{3.16}$$

Неравенства (3.15) доказываются как четвертый случай леммы 3.2. Неравенства (3.16) доказываются как третий случай леммы 3.2. Теорема 3.3 доказана.

4. Абсолютная сходимость рядов Фурье-Франклина функций ограниченной вариации

Теорема 4.1. *Пусть последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярная с параметром γ, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина и $f \in BV$. Тогда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \le C_\gamma V(f).$$

Доказательство. Через $L_{n,i}$, $i = \pm1, \pm2, ...$, обозначим тот інтервал линейности функции f_n, для которого $d_n(L_{n,i}) = |i|$ и интервал $L_{n,i}$ находится правее Δ_n, если $i > 0$ и левее Δ_n, если $i < 0$. Обозначим также $L_{n,0} = \Delta_n$. Тогда $[0;1] = \cup_i L_{n,i}$ и интервалы $L_{n,i}$ взаимно не пересекаются. Поэтому

$$|a_n| = \left|\int_0^1 f(t) f_n(t) dt\right| = \left|\int_0^1 f_n^{(-1)}(t) df(t)\right| = \left|\sum_i \int_{L_{n,i}} f_n^{(-1)}(t) df(t)\right|. \tag{4.1}$$

С учетом леммы 2.2, из (4.1) получим

$$|a_n| \le \sum_i \max_{t\in L_{n,i}} |f^{(-1)}(t)| V_{L_{n,i}}(f) \tag{4.2}$$

$$\le C_\gamma \sum_i \frac{|\Delta_n|^{1/2} |L_{n,i}| q^{d_n(L_{n,i})}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, L_{n,i}) + |L_{n,i}|} V_{L_{n,i}}(f).$$

Поскольку $\|f_n\|_1 \le C_\gamma |\Delta_n|^{1/2}$, то из (4.2) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \le C_\gamma \sum_n \sum_i \frac{|\Delta_n| |L_{n,i}| q^{d_n(L_{n,i})}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, L_{n,i}) + |L_{n,i}|} V_{L_{n,i}}(f). \tag{4.3}$$

Из обозначений (2.6) и из (4.3) следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \le C_\gamma \sum_{I\in\mathfrak{I}} V_I(f) |I| \sum_{n\in D_I} \frac{|\Delta_n| q^{d_n(I)}}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I) + |I|} \tag{4.4}$$

$$= C_\gamma \sum_{I\in\mathfrak{I}} V_I(f) |I| \sum_k q^k \sum_{n\in D_{I,k}} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I) + |I|}.$$

Из леммы 2.3 имеем
$$\sum_{n\in D_{I,k}} \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n| + \rho(\Delta_n, I) + |I|} \le C_\gamma(k+1).$$
Поэтому из (4.4) получим
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \le C_\gamma \sum_{I\in\mathfrak{I}} V_I(f)|I|. \tag{4.5}$$
Рангом интервала $I \in \mathfrak{I}$ назовем количество интервалов из $\mathfrak{I}$, которые содержат интервал I и различны между собой. Ясно, что ранг интервала $[0;1]$ равен 1. Нетрудно заметить, что любой интервал ранга k есть объединение двух непересекающихся интервалов ранга $k+1$. Следовательно, если обозначить
$$R_k = \{I \in \mathfrak{I} : \text{ранг интервала} \quad I \quad \text{равен} \quad k\},$$
то имеем
$$[0;1] = \bigcup_{I\in R_k} I, \quad \text{для любого} \quad k.$$
С учетом сильной регулярности $\mathcal{T}$ имеем также
$$|I| \le \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k \quad \text{когда} \quad I \in R_k. \tag{4.6}$$
Из (4.5), (4.6) получим
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \|f_n\|_1 \le C_\gamma \sum_k \sum_{I\in R_k} |I| V_I(f)$$
$$\le C_\gamma \sum_k \left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^k \sum_{I\in R_k} V_I(f) \le C_\gamma V(f).$$
Теорема 4.1 доказана.

В работе [10] для классической системы Франклина доказано более сильное утверждение. А именно, доказано что если $f \in BV$ и a_n-коэффициенты Фурье функции f по классической системе Франклина, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \le C \cdot V(f)$.

Следствие 4.1. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина и $f \in BV$. Тогда ряд Фурье-Франклина функции f почти всюду абсолютно сходится.*

Отсюда и из теоремы 3.2 получается

Следствие 4.2. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина и интегрируемая на $[0;1]$ функция f на отрезке $[a;b]$ имеет ограниченную вариацию. Тогда ряд Фурье-Франклина функции f на $(a;b)$ почти всюду абсолютно сходится.*

Замечание 4.1. *В следствии 4.1 нельзя утверждать не только всюду абсолютную сходимость, но и сходимость всюду.*

В работе [8] доказано, что если интегрируемая функция в точке x_0 имеет разрыв первого рода, то ее ряд Фурье по классической системе Франклина в точке x_0 расходится. В общем случае аналогичное утверждение нам не удалось доказать. Однако, верно следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ допустимая и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для почти всех x, если $f \in L_1[0;1]$ и функция f в точке x имеет разрыв первого рода, то ряд Фурье-Франклина функции f в точке x ограничено расходится.*

Для доказательства этой теоремы нам нужна следующая

Лемма 4.1. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ допустимая и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для почти всех $x \in [0;1]$ выполняется*

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \int_0^x f_n(t)dt \right| |f_n(x)| > c_1. \tag{4.7}$$

Доказательство. В работе [5] доказано, что существуют постоянные c и C, такие, что для любого p, $1 \le p \le \infty$, выполняется следующая цепочка неравенств:

$$c|J_n|^{1/p-1/2} \le \|f_n\|_{L_p(J_n)} \le \|f_n\|_p \le C|J_n|^{1/p-1/2}. \tag{4.8}$$

Определение интервала J_n приведено перед (2.1). Однако, здесь важно то, что J_n один из интервалов $(t_n^{--};t_n^{-})$, $(t_n^{-};t_n)$, $(t_n;t_n^{+})$, $(t_n^{+};t_n^{++})$, на которых функция f_n линейная, и в концах интервала J_n функция f_n принимает значения разных знаков. Допустим $J_n = (\alpha;\beta)$ и $f_n(t) = a_n(t - z_n)$ когда $t \in [\alpha;\beta]$, где $z_n \in J_n$. Тогда из первого неравенства в (4.8) получим

$$|a_n| \ge c|J_n|^{-3/2}. \tag{4.9}$$

Очевидно, что функция

$$\phi_n(x) = \int_{z_n}^x f_n(t)dt, \quad x \in J_n \tag{4.10}$$

не меняет знак на J_n и

$$|\phi_n(x)| = \frac{1}{2}|a_n|(x - z_n)^2.$$

Следовательно

$$\mu\left\{x \in J_n : |\phi_n(x)| \le \frac{|a_n|}{72}|J_n|^2\right\} \ge \frac{|J_n|}{6} \tag{4.11}$$

и

$$\mu\left\{x \in J_n : |\phi_n(x)| \ge \frac{|a_n|}{18}|J_n|^2\right\} \ge \frac{|J_n|}{6} \tag{4.12}$$

Из (4.9)—(4.12) следует, что для функции

$$\psi_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt = \int_0^{z_n} f_n(t)dt + \phi_n(x)$$

выполняется

$$\mu\left\{x \in J_n : |\psi_n(x)| > \frac{c}{50}|J_n|^{1/2}\right\} \ge \frac{|J_n|}{6}. \tag{4.13}$$

Из линейности функции f_n на J_n и первого неравенства в (4.8) следует

$$\mu\left\{t \in J_n : |f_n(t)| \ge \frac{c}{10}|J_n|^{-1/2}\right\} \ge \frac{9}{10}|J_n|. \tag{4.14}$$

Из (4.13) и (4.14) получим

$$\left\{x \in J_n : |\psi_n(x) f_n(x)| \ge \frac{c^2}{500}\right\} \ge \frac{|J_n|}{15}. \tag{4.15}$$

Нетрудно заметить, что

$$\mu\left(\limsup J_n\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} J_n\right) = 1.$$

Поэтому из (4.15) следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 4.2. Пусть для точки x выполняется (4.7) и интегрируемая функция f в точке x имеет разрыв первого рода. Обозначим

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad t < x, \\ f(x) - f(x-0), & \text{когда} \quad t = x, \\ f(x+0) - f(x-0), & \text{когда} \quad t > x. \end{cases}$$

Ясно, что интегрируемая функция $\varphi(t) = f(t) - \chi(t)$ непрерывна в точке x и ограничена в некоторой окрестности точки x. Тогда в силу (1.1) частичные суммы ряда Фурье функции φ ограничены в некоторой окрестности точки x и сходятся в точке x. Учитывая, что $\int_0^1 f_n(t)dt = 0$, когда $n > 0$, для коэффициентов $a_n(\chi)$ получим

$$a_n(\chi) = d\int_0^x f_n(t)dt \quad \text{для} \quad n > 0,$$

где $d = f(x+0) - f(x-0)$. Применяя лемму 4.2, получим

$$\limsup |a_n(\chi) f_n(x)| > d \cdot c_1.$$

Следовательно, ряд Фурье-Франклина функции f в точке x расходится. Теорема 4.2 доказана.

5. Представление функций абсолютно сходящимися рядами

В этом разделе доказываются теоремы о представлении измеримых функций п.в. абсолютно сходящимися рядами по общей системе Франклина, соответствующей сильно регулярному разбиению.

Лемма 5.1. *Пусть последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Допустим $I=[\alpha;\beta]\in\mathfrak{I}_{n_0}$, и $supp\varphi\subset I$. Тогда, если $I\subset\Delta\in\mathfrak{I}$, то*

$$\sum_{n:n\in D_\Delta}|a_n|\|f_n\|_1\leq C_\gamma\|\varphi\|_1,$$

где $D_\Delta=\{n:\Delta-$ интервал линейности функции $f_n\}$ и $a_n=a_n(\varphi)$.

Доказательство. Если $I\subset\Delta\in\mathfrak{I}$ и f_n линейна на Δ, то (см. (2.1))

$$|a_n|\leq C_\gamma\|\varphi\|_1\cdot\frac{|\Delta_n|^{1/2}}{|\Delta_n|+\rho(\Delta_n,\Delta)+|\Delta|}\cdot q^{d_n(\Delta)},$$

и поэтому

$$|a_n|\|f_n\|_1\leq C_\gamma\|\varphi\|_1\cdot\frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n|+\rho(\Delta_n,\Delta)+|\Delta|}\cdot q^{d_n(\Delta)}.$$

Обозначим $D_{\Delta,k}=\{n\in D_\Delta:d_n(\Delta)=k\}$. С применением леммы 2.3, суммируя последнее неравенство, получим

$$\sum_{n:n\in D_\Delta}|a_n|\|f_n\|_1\leq C_\gamma\|\varphi\|_1\sum_{n\in D_\Delta}\frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n|+\rho(\Delta_n,\Delta)+|\Delta|}q^{d_n(\Delta)}$$

$$=C_\gamma\|\varphi\|_1\sum_k q^k\sum_{n\in D_{\Delta,k}}\frac{|\Delta_n|}{|\Delta_n|+\rho(\Delta_n,\Delta)+|\Delta|}\leq C_\gamma\|\varphi\|_1\sum_k q^k(k+1)\leq C_\gamma\|\varphi\|_1.$$

Лемма 5.1 доказана.

Лемма 5.2. *Пусть последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для произвольных $[a;b]\in\mathfrak{I}_{n_0}$ и $\varepsilon\in(0;0,1)$ существует полином $\phi(t)=\sum_{n=n_0}^{M}a_nf_n(t)$, такой что*

1. $\phi(t)=0$, *когда* $t\notin(a;b)$,
2. $\phi(t)=1$, *когда* $t\in E\subset[a;b]$ *и* $\mu(E)>(1-\varepsilon)(b-a)$,
3. $\int_0^1\sum_{n=n_0}^{M}|a_nf_n(t)|dt\leq C_\gamma(b-a)\ln\varepsilon^{-1}$,
4. $|\phi(t)|\leq\frac{C_\gamma}{\varepsilon}$.

Доказательство. Через $I_{a,i}$, $i=0,1,2,...$, обозначим интервалы из $\mathfrak{I}$ с левым концом a, причем $[a;b]=I_{a,0}$, $I_{a,i+1}\subset I_{a,i}$. Аналогично, через $I_{b,j}$, $j=0,1,2,...$, обозначим интервалы из $\mathcal{J}$ с правым концом b. Учитывая сильную регулярность последовательности $\mathcal{T}$, имеем

$$\frac{1}{\gamma+1}|I_{a,i}| \le |I_{a,i+1}| \le \frac{\gamma}{\gamma+1}|I_{a,i}| \quad \text{и} \quad \frac{1}{\gamma+1}|I_{b,i}| \le |I_{b,i+1}| \le \frac{\gamma}{\gamma+1}|I_{b,i}|. \tag{5.1}$$

Пусть i_0, j_0 такие, что

$$|I_{a,i_0}| < \frac{\varepsilon}{2}(b-a), \quad |I_{b,j_0}| < \frac{\varepsilon}{2}(b-a) \tag{5.2}$$

и

$$|I_{a,i_0-1}| \ge \frac{\varepsilon}{2}(b-a), \quad |I_{b,j_0-1}| \ge \frac{\varepsilon}{2}(b-a). \tag{5.3}$$

Из (5.1) и (5.3) следует, что

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)^{i_0-1} \ge \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$i_0 \le C_\gamma \ln \varepsilon^{-1}. \tag{5.4}$$

Аналогично

$$j_0 \le C_\gamma \ln \varepsilon^{-1}. \tag{5.5}$$

Пусть a' правый конец интервала I_{a,i_0}, а b'-левый конец интервала I_{b,j_0}, т.е. $I_{a,i_0} = [a;a']$, $I_{b,j_0} = [b',b]$. Обозначим также через a'', b'', соответственно, правый и левый концы интервалов I_{a,i_0+1} и I_{b,j_0+1}, т.е. a''-точка из $\mathcal{T} \cap I_{a,i_0}$ с наименьшим индексом и b''-точка из $\mathcal{T} \cap I_{b,j_0}$ с наименьшим индексом.

Обозначим

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = a'', \\ 0, & \text{когда} \quad t \notin (a;a'), \\ \text{линейная на интервалах} & [a;a''], [a'';a']; \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\varphi_b(t) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad t = b'', \\ 0, & \text{когда} \quad t \notin (b';b), \\ \text{линейная на интервалах} & [b';b''], [b'';b]; \end{cases} \tag{5.7}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{когда} \quad t \in [0;a] \bigcup [b;1] \\ 1 & \text{когда} \quad t \in [a';b'] \\ \text{линейная на интервалах} & [a;a'], [b';b]. \end{cases} \tag{5.8}$$

Положим

$$\phi(t) = \varphi(t) - \alpha\varphi_a(t) - \beta\varphi_b(t), \tag{5.9}$$

где числа α и β определяются из условий

$$\int_0^1 \phi(t)(ct+d)dt = 0 \quad \text{для любых} \quad c, d. \tag{5.10}$$

Из (5.10) следует, что $a_n(\phi) = 0$, когда $n < n_0$, а из (5.6)-(5.9) следует, что $a_n(\phi) = 0$, когда $a'', b'' \in \mathfrak{T}_n$. Поэтому $\phi(t)$ имеет вид $\sum_{n=n_0}^{M} a_n f_n(t)$, где

$$M = \min\{n : a'' \in \mathfrak{T}_n, b'' \in \mathfrak{T}_n\}$$

Из (5.6)-(5.9) и (5.2) следуют пункты 1 и 2 леммы.

Для доказательства пунктов 3 и 4, сначала оценим α и β. Для выполнения (5.10) достаточно выполнение соотношений

$$\int_0^1 \phi(t)dt = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \phi(t)\omega(t)dt, \tag{5.11}$$

где $\omega(t) = t - \frac{a+b}{2}$. Равенства (5.11) равносильны системе

$$\begin{cases} h_{11}\alpha + h_{12}\beta = h_1, \\ h_{21}\alpha + h_{22}\beta = h_2, \end{cases}$$

где

$$h_{11} = \int_0^1 \varphi_a(t)dt, \quad h_{12} = \int_0^1 \varphi_b(t)dt, \quad h_1 = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

и

$$h_{21} = \int_0^1 \varphi_a(t)\omega(t)dt, \quad h_{22} = \int_0^1 \varphi_b(t)\omega(t)dt, \quad h_2 = \int_0^1 \varphi(t)\omega(t)dt.$$

Нетрудно заметить, что

$$h_{11}, h_{12} \sim_\gamma \varepsilon(b-a), \quad h_1 \sim b-a,$$

$$-h_{21}, h_{22} \sim_\gamma \varepsilon(b-a)^2, \quad h_2 \sim (b-a)^2.$$

Поэтому, учитывая, что

$$\alpha = \frac{h_1 h_{22} - h_2 h_{12}}{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{h_2 h_{11} - h_1 h_{21}}{h_{11}h_{22} - h_{21}h_{12}},$$

получаем

$$\alpha \sim_\gamma \frac{1}{\varepsilon}, \quad \beta \sim_\gamma \frac{1}{\varepsilon}. \tag{5.12}$$

Из (5.12), (5.6)-(5.9) следует пункт 4 леммы. Оценим $\sum_{n=n_0}^{M} \int_0^1 |a_n f_n(t)|dt$. Ясно, что $a_n = a_n(\phi) = a_n(\varphi) - \alpha a_n(\varphi_a) - \beta a_n(\varphi_b)$.

Применяя лемму 5.1, с учетом (5.2), получим

$$\sum_{n=n_0}^{M} \int_0^1 |a_n(\varphi_a) f_n(t)|dt = \sum_{i=0}^{i_0} \sum_{n:n\in D_{I_a,i}} \int_0^1 |a_n(\varphi_a) f_n(t)|dt \le (i_0+1)\|\varphi_a\|_1 \tag{5.13}$$

Из (5.13), с учетом (5.6), (5.4) и (5.12), следует

$$\alpha \sum_{n=n_0}^{M} \int_0^1 |a_n(\varphi_a) f_n(t)|dt \le C_\gamma(b-a)\ln\varepsilon^{-1}. \tag{5.14}$$

Аналогично, применяя (5.7), (5.5) и (5.12), получим

$$\beta\sum_{n=n_0}^{M}\int_0^1|a_n(\varphi_b)f_n(t)|dt\le C_\gamma(b-a)\ln\varepsilon^{-1}. \tag{5.15}$$

Для оценки $\sum_{n=n_0}^{M}\int_0^1|a_nf_n(t)|dt$ нам остается оценить $\sum_{n=n_0}^{M}\int_0^1|a_n(\varphi)f_n(t)|dt$. Пусть $I_{a,i}=[a;b_i]$, $i=0,1,...,i_0+1$, и $I_{b,j}=[a_j;b]$, $j=0,1,...,j_0+1$. Ясно, что $a'=b_{i_0}$, $a''=b_{i_0+1}$, $b'=a_{j_0}$ и $b''=a_{j_0+1}$. Обозначим

$$n_i=\min\{n:b_i\in\mathcal{T}_n\},\quad m_j=\min\{n:a_j\in\mathcal{T}_n\},$$

т.е. $b_i=t_{n_i}$, $a_j=t_{m_j}$. Далее, положим

$$L(i)=\{n:n_i<n\le n_{i+1}\},\quad R(j)=\{n:m_j<n\le m_{j+1}\},\quad S(i,j)=L(i)\cap R(j)$$

и

$$\phi_{i,j}(t)=\begin{cases}0,\text{когда}\quad t\notin(a;b),\\ 1,\text{когда}\quad t\in[b_i;a_j],\\ \text{линейная на отрезках}\quad[a;b_i],[a_j;b].\end{cases}$$

Из определения функций f_n следует, что

$$\int_0^1 f_n(t)\phi_{i,j}(t)dt=0,\quad\text{если}\quad n\in S(i,j).$$

Поэтому, для $n\in S(i,j)$

$$a_n(\varphi)=\int_0^1\varphi(t)f_n(t)dt=\int_0^1(\varphi(t)-\phi_{i,j}(t))\,f_n(t)dt=A_i(f_n)+B_j(f_n), \tag{5.16}$$

где

$$A_i(f_n)=\int_a^{b_i}(\varphi(t)-\phi_{i,j}(t))\,f_n(t)dt, \tag{5.17}$$

$$B_j(f_n)=\int_{a_j}^{b}(\varphi(t)-\phi_{i,j}(t))\,f_n(t)dt. \tag{5.18}$$

Применяя лемму 5.1, получим

$$\sum_{n\in S(i,j)}|A_i(f_n)|\|f_n\|_1\le C_\gamma(b_i-a) \tag{5.19}$$

$$\sum_{n\in S(i,j)}|B_j(f_n)|\|f_n\|_1\le C_\gamma(b-a_j). \tag{5.20}$$

Очевидно, что если $n\in[n_0;M]$, то $n\in S(i,j)$, для некоторых i, j и количество непустых $S(i,j)$ не превосходит i_0+j_0+2. Поэтому из (5.16)-(5.20), (5.4), (5.5) имеем

$$\sum_{n=n_0}^{M}|a_n(\varphi)|\|f_n\|_1\le C_\gamma(b-a)\ln\varepsilon^{-1}. \tag{5.21}$$

Из (5.14), (5.15), (5.21), (5.9) следует пункт 3 леммы. Лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина и $a, b \in \mathcal{T}$, $a < b$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и натурального N существует полином $\phi(t) = \sum_{n=N+1}^{M} a_n f_n(t)$ по системе $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, такой что*

1. $\phi(t) = 1$, *когда* $x \in E$, *где* E*-объединение интервалов из* $\mathfrak{I}$ *и* $\mu(E) > (1-\varepsilon)(b-a)$,
2. $\phi(t) = 0$ *когда* $x \notin [a; b]$,
3. $|\phi(t)| \le \frac{C_\gamma}{\varepsilon}$, *для любого* t,
4. $\sum_n \int_0^1 |a_n f_n(t)| dt < C_\gamma (b-a) \ln \varepsilon^{-1}$,
5. $\sum_n |a_n f_n(t)| < \delta$, *когда* $t \notin [a-\delta; b+\delta]$.

Доказательство. Напомним, что $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n \le \tau_{i+1}^n, 0 \le i \le n-1\}$ неубывающая перестановка чисел из $\mathcal{T}_n$. Пусть $n_0 > N$, такое, что $\max(\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) < \delta_1$, где число δ_1 будет выбрано позже и $a, b \in \mathcal{T}_{n_0}$. Для отрезков $[\tau_i^n; \tau_{i+1}^n] \subset [a; b]$ применяя лемму 5.2, получаем функции $\phi_i(t) = \sum_{n=n_0}^{M} a_{n,i} f_n(t)$, обладающие свойствами

А) $\phi_i(t) = 0$, когда $t \notin (\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$,
Б) $\phi_i(t) = 1$, когда $t \in E_i \subset (\tau_i^n; \tau_{i+1}^n)$ и $\mu(E_i) > (1-\varepsilon)(\tau_{i+1}^n - \tau_i^n)$,
В) $\int_0^1 \sum_{n=n_0}^{M} |a_n(\phi_i) f_n(t)| dt \le C_\gamma (\tau_{i+1}^n - \tau_i^n) \ln \varepsilon^{-1} \le C_\gamma \delta_1 \ln \varepsilon^{-1}$,
Г) $|\phi_i(t)| \le \frac{C_\gamma}{\varepsilon}$.

Положим $\phi(t) = \sum_i \phi_i(t) = \sum_{n=n_0}^{M} a_n f_n(t)$, где $a_n = \sum_i a_{n,i}$. Очевидно, что из А), Б), В) следуют пункты 1, 2, 4 леммы.

Из лемм 3.2, 3.4 имеем, что

$$\sum_{n=n_0}^{M} |a_{n,i} f_n(t)| \le \frac{C_\gamma q^{|i-j|} \|\phi_i\|_1}{\rho(t, (\tau_i^n; \tau_{i+1}^n))^2} \quad \text{когда} \quad t \in [\tau_j^n; \tau_{j+1}^n], \quad i \ne j. \tag{5.22}$$

При подходящем выборе δ_1, из (5.22) и В) получим пункт 5 леммы. Пункт 3 следует из Г) и (5.22). Лемма 5.3 доказана.

Лемма 5.4. *Пусть последовательность $\mathcal{T}$ сильно регулярная с параметром γ и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина. Тогда для любой почти всюду конечной измеримой функции $f(t)$, любого измеримого множества $A \subset [0; 1]$, любых положительных чисел ε, δ и любого натурального числа N существуют измеримые множества B, D и полином $\phi(t) = \sum_{n=N+1}^{M} a_n f_n(t)$ такие, что $B \subset A \subset D$*

1. $|\phi(t) - f(t)| < \delta$, *когда* $t \in B$ *и* $\mu(B) > (1-\varepsilon)\mu(A)$,
2. $\int_0^1 \sum_{n=N+1}^{M} |a_n f_n(t)| dt < \frac{C_\gamma}{\varepsilon} \int_B |f(t)| dt$,
3. $\sum_{n=N+1}^{M} |a_n f_n(t)| < \delta$, *когда* $t \in D^c$ *и* $\mu(D \backslash A) < \varepsilon \mu(A)$.

Доказательство. Без ограничения общности, можем считать, что функция f ограниченная и неотрицательная, т.е. $0 \le f(t) < K$. Пусть числа α_i такие, что

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_p = K \quad \text{и} \quad \alpha_i - \alpha_{i-1} < \delta.$$

Обозначим $G_i = \{t \in [0;1] : \alpha_{i-1} \le f(t) < \alpha_i\}$. Существуют интервалы $I_m \in \mathfrak{I}$ и числа ν_i, такие что $\nu_i < \nu_{i+1}$, $I_m \cap I_{m'} = \emptyset$, когда $m \ne m'$ и

$$\mu\left(\left(\bigcup_{m=\nu_{i-1}}^{\nu_i - 1} I_m\right) \bigcap G_i\right) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(G_i).$$

Применяя лемму 5.3, получим полиномы $\phi_m(t) = \sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} a_n f_n(t)$ и множества E_m, такие, что если $\nu_{i-1} \le m < \nu_i$, то

$$\phi_m(t) = \alpha_i, \quad \text{когда} \quad t \in E_m \subset I_m, \quad \mu(E_m) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\mu(I_m),$$

$$\int_0^1 \sum_{N_m+1}^{N_{m+1}} |a_n f_n(t)| dt < \frac{C_\gamma}{\varepsilon} \cdot \alpha_i \cdot \mu(I_m),$$

$$\sum_{N_m+1}^{N_{m+1}} |a_n f_n(t)| < \eta_m, \quad \text{когда} \quad t \notin [a_m - \delta_m; b_m + \delta_m],$$

где $[a_m; b_m] = I_m$, а η_m и δ_m некоторые положительные числа. При подходящем выборе чисел η_m и δ_m, полином $\phi(t) = \sum_{m=1}^{\nu_p} \phi_m(t)$ будет удовлетворять условиям леммы. Лемма 5.4 доказана.

Теорема 5.1. *Пусть последовательность $\mathfrak{T}$ сильно регулярная с параметром γ, $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина и $a, b \in \mathfrak{T}$, $a < b$. Тогда для любой почти всюду конечной измеримой функции f существует ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t)$, который почти всюду абсолютно сходится к $f(t)$, т.е.*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(t) = f(t)$ *п.в. на* $[0;1]$
2) $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n f_n(t)| < +\infty$ *п.в. на* $[0;1]$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_k = 2^{-k}$, $\delta_k = \varepsilon_{k+1}^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Применяя лемму 5.4 найдем множество $B_1 \subset [0;1]$ и полином $\phi_1(t) = \sum_{n=1}^{N_1} a_n f_n(t)$ такие, что

$$|f(t) - \phi_1(t)| < \delta_1, \quad x \in B_1, \quad \mu(B_1) > 1 - \varepsilon_1$$

и

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{N_1} |a_n f_n(t)| < \frac{C_\gamma}{\varepsilon_1} \int_{B_1} |f(t)| dt.$$

Теперь, применив лемму 5.4 к функции $f(t) - \phi_1(t)$ и множеству B_1, получим полином $\phi_2'(t) = \sum_{n=N_1+1}^{M_1} a_n f_n(t)$ и $E_2 \subset B_1$ такие, что

$$\mu(E_2) > (1 - \varepsilon_2)\mu(B_1), \tag{5.23}$$

(5.24) $$|\phi_2'(t) - (f(t) - \phi_1(t))| < \delta_2, \quad \text{когда} \quad t \in E_2,$$

(5.25) $$\int_0^1 \sum_{n=N_1+1}^{M_1} |a_n f_n(t)| dt < \frac{C_\gamma}{\varepsilon_2} \int_{E_2} |f(t) - \phi_1(t)| dt < \frac{C_\gamma}{\varepsilon_2} \delta_1 = C_\gamma \varepsilon_2.$$

Пусть $F_2 \supset B_1$ и $\mu(F_2) > 1 - \varepsilon_2$. Опять, применив лемму 5.4, найдем полином $\phi_2'' = \sum_{n=M_1+1}^{N_2} a_n f_n(t)$ и множества G_2, R_2, такие что

(5.26) $$G_2 \subset F_2 \backslash E_2 \subset R_2, \quad \mu((F_2 \backslash E_2) \backslash G_2) < \varepsilon_2,$$

(5.27) $$|\phi_2''(t) - (f(t) - \phi_1(t) - \phi_2'(t))| < \delta_2, \quad \text{когда} \quad t \in G_2,$$

(5.28) $$\sum_{M_1+1}^{N_2} |a_n f_n(t)| < \delta_2, \quad t \in R_2^c \quad \text{и} \quad \mu(R_2 \backslash (F_2 \backslash E_2)) < \varepsilon_2.$$

Обозначим $A_2 = E_2 \cap R_2^c$ и $\phi_2(t) = \phi_2'(t) + \phi_2''(t) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} a_n f_n(t)$. Из (5.23)-(5.28) следуют

$$\int_{A_2} \sum_{n=N_1}^{N_2} |a_n f_n(t)| dt < 2C_\gamma \varepsilon_2 \quad \text{и} \quad \mu(A_2) > 1 - \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2,$$

$$|f(t) - \phi_1(t) - \phi_2(t)| < 2\delta_2, \quad \text{когда} \quad t \in B_2,$$

где $B_2 \subset F_2$ и $\mu(F_2 \backslash B_2) < \varepsilon_2$.

Следовательно $\mu(B_2) > 1 - 2\varepsilon_2$. Продолжая этот процесс, получим множества B_m, A_m и полиномы $\phi_m(t) = \sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} a_n f_n(t)$ такие, что

(5.29) $$\left| f(t) - \sum_{n=1}^{N_m} \phi_n(t) \right| < 2\delta_m, \quad t \in B_m, \quad \mu(B_m) > 1 - \varepsilon_m,$$

(5.30) $$\int_{A_m} \sum_{n=N_m+1}^{N_{m+1}} |a_n f_n(t)| dt < 2C_\gamma \varepsilon_m, \quad \mu(A_m) > 1 - \varepsilon_{m-1} - 2\varepsilon_m.$$

Из последнего вытекает

$$\int_{\bigcap_{n \geq m} A_n} \sum_{n=N_m+1}^{\infty} |a_n f_n(t)| dt < 2C_\gamma \sum_{n \geq m} \varepsilon_n < +\infty$$

и

$$\mu\Big(\bigcap_{n \geq m} A_m\Big) > 1 - 4\varepsilon_{m-1} - 4\varepsilon_m.$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(t)$ почти всюду на $[0;1]$ абсолютно сходится. Из (5.29) следует, что почти всюду сходится к $f(t)$. Теорема доказана.

Когда последовательность $\mathcal{T}$ слабо регулярная и квазидиадическая и $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ соответствующая ей общая система Франклина, возможность представления измеримых функций почти всюду абсолютно сходящимися рядами по системе

$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ доказана в работе [6]. Для классической системы Франклина аналог теоремы 5.1 была доказана в работе [11]. Вопросы представления измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по другим системам были рассмотрены в работах [12]–[15].

Abstract. The paper considers general Franklin systems generated by strong regular partitions of the segment $[0; 1]$. For such systems we prove the following assertions: 1) the absolute convergence of a Fourier-Franklin series at a point is a local property; 2) the Fourier-Franklin series of a function of bounded variation absolute converges almost everywhere; 3) any almost everywhere finite measurable function can be represented by an almost everywhere absolutely convergent series by a general Franklin system.

Список литературы

[1] Z. Ciesielski, A. Kamont, *Projections onto piecewise linear functions*. Funct. Approx. Comment. Math. **25** 129–143, 1997.

[2] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, *On general Franklin systems*. Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **374** 1–59, 1998.

[3] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, *General Franklin system as bases in $H^1[0,1]$*, . Studia Math. **167** 259 –292, 2005.

[4] Г. Г. Геворкян, *О рядах по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **48**, No. 5, 3-30, 2013,

[5] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, *Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$*. Studia Math. **164** 161 – 204, 2004.

[6] А. А. Степанян, *О представлении измеримых функций рядами по общей системе Франклина*, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **42**, No. 3, 13-22, 2007

[7] Ph. Franklin, *A set of continuos orthogonal functions*. Math. Ann. **100** 522–528, 1928.

[8] Г. Г. Геворкян, *О рядах по системе Франклина*. Analysis Mathematica, **16** 87-114, 1990.

[9] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system*. Studia Math. **23** 141 – 157, 1963.

[10] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system, II*. Studia Math. **27** 289 – 323, 1966.

[11] Г. Г. Геворкян, *О представлении измеримых функций абсолютно сходящимися рядами по системе Франклина*. Докл. АН Арм. ССР, **83**, no. 1, 15-18, 1986.

[12] Ф. Г. Арутюнян, *О рядах по системе Хаара*, Докл. АН Арм. ССР, **42**, в 3, 134-140, 1966.

[13] Р.С. Давтян, *О представлении функций ортогональными рядами, обладающими мартингальными свойствами*, Мат. заметки, **19**, 673-680, 1976.

[14] G. G. Gevorkyan, *Representation of measurable functions by martingales*, Analysis Math., **8**, 239-256, 1982.

[15] G. G. Gevorkyan, *Representation of measurable functions by absolutely convergent series of translates and dilates of one function*, East J. Approx., **2** No 4, 439-458, 1996.

Поступила 14 декабря 2013