Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 73-80.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ НЕПРИВОДИМОСТИ АЛГЕБРЫ $C^*_\varphi(X)$

С. А. ГРИГОРЯН, А. Ю. КУЗНЕЦОВА, Е. В. ПАТРИН

Казанский государственный энергетический университет, Казань, Россия[1]
Казанский федеральный университет, институт Физики, Казань, Россия.
E-mails: *gsuren@inbox.ru*; *alla_kuznetsova@rambler.ru*; *evgeniipatrin@mail.ru*

Аннотация. В работе приводится критерий неприводимости C^*-алгебры $C^*_\varphi(X)$ на гильбертовом пространстве $l^2(X)$, порожденной отображением φ счетного множества X в себя. Данный критерий позволяет строить примеры C^*-алгебр, неприводимых на $l^2(X)$.

MSC2010 numbers: 46L05, 46L55.

Ключевые слова: C^*-алгебра, частичная изометрия, неприводимое представление.

1. Введение

Отображение вложения счетного множества X в себя может, с точностью до канонического изоморфизма, породить только две C^*-алгебры — алгебру Теплица и подалгебру алгебры всех непрерывных функций на единичной окружности. Алгебра Теплица, которая имеет различные приложения в современной математической физике, порождается отображением сдвига $\varphi(n) = n + 1$ на множестве натуральных чисел (или оператором правого сдвига на $l^2(\mathbb{N})$, теорема Кобурна [1, 2]). Существуют различные обобщения алгебры Теплица (см. [3] – [5]) и их приложения (см. [6]– [8]). Отметим, что алгебра Теплица порождается неприводимым представлением бициклической полугруппы (см. [9]).

В работе [14] было начато исследование C^*-алгебры $C^*_\varphi(X)$, порожденной отображением $\varphi : X \longrightarrow X$ счетного множества в себя, которое в общем случае не является вложением. В статьях [14]-[19] был описан ряд свойств этой алгебры, в частности показано, что $C^*_\varphi(X)$ относится к категории ядерных алгебр, обладает нетривиальной AF-подалгеброй, и при условии отсутствия циклических для φ элементов является $\mathbb{Z}$-градуированной.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект No 12-01-97016).

В данной статье, продолжая эти исследования, мы приводим критерий неприводимости "естественного"представления $C^*_\varphi(X)$ на $l^2(X)$.

2. Необходимые сведения

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ отображение счетного множества X в себя, удовлетворяющее условию $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$. Мы предполагаем, что в X нет *φ-циклических* элементов, т. е. $\varphi^n(x) \neq x$ ни при каких $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$. Также будем полагать, что граф (X, φ) с вершинами в точках множества X и ребрами $(x, \varphi(x))$ является связным.

На гильбертовом пространстве $l^2(X)$ с естественным базисом $\{e_x\}_{x\in X}$, где $e_x(y) = \delta_{x,y}$ ($\delta_{x,y}$ — символ Кронекера), отображение φ индуцирует оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad T_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Если $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$, но $\sup\limits_x \operatorname{card}\varphi^{-1}[x] = \infty$, то оператор T_φ допускает замыкание и является всюду плотно определенным ([17]). В этом случае он представим в виде счетной суммы операторов частичной изометрии,

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \cdots + \sqrt{m}U_m + \cdots,$$

где либо $U_k e_x = 0$, либо $U_k e_x = \frac{1}{\sqrt{k}}(\sum\limits_{y\in\varphi^{-1}[x]} e_y)$ при $\operatorname{card}\varphi^{-1}[x] = k$. Заметим, что $U_i U_j^* = U_j^* U_i = 0$ если $i \neq j$.

Обозначим через $C^*_\varphi(X)$ равномерно замкнутую C^*-подалгебру алгебры $B(l^2(X))$, порожденную операторами частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Порождающее семейство частичных изометрий удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} U_1^*U_1 + U_2^*U_2 + \cdots + U_m^*U_m + \cdots = P, \\ U_1U_1^* + U_2U_2^* + \cdots + U_mU_m^* + \cdots = Q, \end{cases}$$

где операторы P и Q — проекторы, определенные заданным на множестве отображением (см.[15, 17, 18]).

Таким образом, $C^*_\varphi(X)$ можно в некотором смысле отнести к C^*-алгебрам, порожденным изометриями, удовлетворяющими определенным соотношениям. Исследование таких алгебр начались с работы Кунца [10] (см., также [11]- [13]).

3. Мономы

Операторы частичной изометрии из множеств $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ будем называть *элементарными мономами*, конечное произведение элементарных мономов — *мономом*. По определению положим $\operatorname{ind} U_k = 1$ и $\operatorname{ind} U_k^* = -1$. Индексом ненулевого монома V ($\operatorname{ind} V$) будем называть число, равное сумме индексов элементарных мономов, произведение которых равно V. Индекс нулевого монома положим равным нулю. При отсутствии циклических элементов индекс монома не зависит от его представления в виде произведения элементарных мономов (см. [16, 18]). Моном V назовем *правым делителем* монома W, если $W = V'V$, где V' — некоторый моном. Моном W будем называть *положительно определенным* относительно данного представления (далее положительно определенным) если индекс любого его правого делителя неотрицателен. Если W положительно определен относительно $\prod\limits_{k=1}^{m} U'_{j_k}$, где $U'_{j_k} \in \{U_{j_k} \cup U^*_{j_k}\}$, то $\operatorname{ind}\big(\prod\limits_{k=l}^{m} U'_{j_k}\big) \geq 0$ для любого $l \geq 1$.

Лемма 3.1. *Пусть W положительно определенный моном нулевого индекса. Тогда W — положительный оператор с конечным спектром и множество $\{e_x\}_{x\in X}$ является подмножеством собственных векторов оператора W.*

Приведем набросок доказательства. Заметим, что отображение φ индуцирует на множестве X частичный порядок, а именно $x \prec y$, если найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n(y) = x$. Распространим этот порядок на базис $\{e_x\}_{x\in X}$, полагая $e_x \prec e_y$ если $\varphi^n(y) = x$.

Пусть $W = \prod\limits_{k=1}^{m} U'_{j_k}$, $\operatorname{ind}\big(\prod\limits_{k=1}^{m} U'_{j_k}\big) = 0$, и пусть $We_x \neq 0$. Рассмотрим его правые делители $V_l = \prod\limits_{k=l}^{m} U'_{j_k}$. По условию индекс любого V_l неотрицателен, и $V_m = U_{j_m}$. Если $(U_{j_m}e_x, e_y) \neq 0$, то $e_x \prec e_y$. Далее рассмотрим $V_{m-1} = U'_{j_{m-1}}U_{j_m}$ и такой элемент e_z, что $(U'_{j_{m-1}}U_{j_m}e_x, e_z) \neq 0$. Индекс правого делителя V_{m-1} либо 0, либо 2. В первом случае получаем $e_z = e_x$, во втором $e_x \prec e_y \prec e_z$. Продолжая таким образом, приходим к выводу, что для любого правого делителя V_l, $l \leq m$, из условия $(V_le_x, e_z) \neq 0$ следует, что $e_x \preceq e_z$, причем равенство выполняется для делителя индекса 0. Поскольку $W = V_1$ имеет нулевой индекс и $(We_x, e_x) \neq 0$, то $We_x = \lambda_x e_x$. Из построения операторов $\{U_k\}$ все $\lambda_x > 0$. В статье [18] (лемма 2.5) было доказано, что множество матричных коэффициентов $\{(We_x, e_y)\}_{x,y\in X}$ конечно. Отсюда $W = \alpha_1\mathcal{P}_1 + \alpha_2\mathcal{P}_2 + \dots + \alpha_n\mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$ — попарно ортогональные проекторы, для которых $\{e_x\}_{x\in X}$ являются собственными векторами с собственными значениями 0 или 1. □

Пусть $\operatorname{Mon}(X)$ — множество всех мономов. Если предположить, что нулевой моном W_0 ($W_0e_x = 0$) принадлежит множеству $\operatorname{Mon}(X)$, то $\operatorname{Mon}(X)$ есть полугруппа относительно произведения. Пусть $\mathrm{Mon}^+(X)$ — подполугруппа полугруппы $\mathrm{Mon}(X)$, состоящая из W_0 и всех положительно определенных мономов. Также введем $\mathrm{Mon}_0(X)$ – подполугруппу мономов нулевого индекса. Пусть $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ — подполугруппа полугруппы $\mathrm{Mon}^+(X)$, состоящая из W_0 и всех положительных мономов индекса ноль, а $\mathfrak{U}$ – подполугруппа $\mathrm{Mon}^+(X)$, состоящая из мономов, в представлении которых участвуют только элементарные мономы из $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Заметим, что $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ является коммутативной подполугруппой полугруппы мономов $\mathrm{Mon}(X)$.

Лемма 3.2. *Пусть e_x и e_y — такие элементы базиса $\{e_x\}_{x\in X}$, что для любого монома V из $\mathfrak{U}$ и любого W из $\mathrm{Mon}^+(X)$ выполняется равенство*

$$(WV^*e_x, V^*e_x) = (WV^*e_y, V^*e_y).$$

Тогда это же равенство выполняется и для любого V из $\mathfrak{U}$ и любого W из $\mathrm{Mon}(X)$.

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции по длине монома. Заметим, что $W \in \mathrm{Mon}_0^+(X)$, в противном случае тождество выполняется автоматически.

Проверим, что лемма верна для мономов нулевого индекса длины два. Таких не равных нулю мономов только два: $W_1 = U_j^*U_j$ и $W_2 = U_jU_j^*$. По условию леммы для $W_1 \in \mathrm{Mon}_\varphi^+(X)$ выполнено $(W_1V^*e_x, V^*e_x) = (W_1V^*e_y, V^*e_y)$. Отсюда

$$\begin{aligned}(W_2V^*e_x, V^*e_x) &= (U_jU_j^*V^*e_x, V^*e_x) = (U_jU_j^*U_jU_j^*V^*e_x, V^*e_x) = \\ &= (U_j^*U_jU_j^*V^*e_x, U_j^*V^*e_x) = (U_j^*U_jV'^*e_x, V'^*e_x) = \\ &= (U_j^*U_jV'^*e_y, V'^*e_y) = (W_2V^*e_y, V^*e_y).\end{aligned}$$

Предположим, что лемма верна для мономов индекса ноль длины $2n$. Последовательно перебирая все варианты, а именно: моном длины $2n+2$ имеет хотя бы один правый делитель положительного индекса (заканчивается на U_j); не является положительно определенным (заканчивается на U_j^*), при этом начинается на U_k; не является положительно определенным и начинается на U_k^*; можно показать, используя предыдущую лемму, что доказываемое утверждение верно и для мономов длины $2n+2$. Лемма доказана.

4. Основные результаты

Приведем основные результаты нашей работы. Согласно лемме 3.1, каждый моном W из $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ диагонализуется относительно базиса $\{e_x\}_{x\in X}$ и представляется в виде конечной комбинации проекторов:

$$W = \sum_{i=1}^{n(W)} \alpha_i P_i^{(W)}, \quad P_i^{(W)} P_j^{(W)} = P_j^{(W)} P_i^{(W)}.$$

Таким образом, полугруппа мономов $\mathrm{Mon}_0^+(X)$ порождает семейство проекторов

$$\bigcup_{W\in \mathrm{Mon}_0^+(X)} \{P_i^{(W)}\}_{i=1}^{n(W)}.$$

Теорема 4.1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) $C_\varphi^*(X)$ *неприводима на* $l^2(X)$*;*

2) из равенства $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$ *для любого* $W \in \mathrm{Mon}(X)$ *следует* $e_x = e_y$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) — доказательство очевидно.

2) $\Rightarrow$ 1). Зафиксируем f из $l^2(X)$. Пусть $(f, e_{x_0}) \neq 0$. Сначала покажем, что $e_{x_0} \in \overline{C_\varphi^*(X)f}$. Для простоты положим, что $f = e_{x_0} + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_{x_i}$. Пусть $\Delta_+(x_0)$ — множество проекторов P из $\bigcup\limits_{W\in \mathrm{Mon}_0^+(X)} \{P_i^{(W)}\}_{i=1}^{n(W)}$, для которых

$$Pe_{x_0} = e_{x_0} \quad \text{и} \quad Pe_{x_i} = \begin{cases} 0; \\ e_{x_i}. \end{cases}$$

С помощью этого семейства проекторов получим новую функцию $f_0 = \Bigl(\prod\limits_{P\in\Delta_+(x_0)} P\Bigr) f$. Заметим, что $\prod\limits_{P\in\Delta_+(x_0)} P \in B(l^2(X))$ может и не принадлежать $C_\varphi^*(X)$, но

$$\Bigl(\prod_{P\in\Delta_+(x_0)} P\Bigr) f \in \overline{C_\varphi^*(X)f}.$$

Очевидно, что

$$f_0 = e_{x_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i' e_{x_i}, \quad \text{где} \quad \alpha_i' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i. \end{cases}$$

Покажем, что семейства проекторов $\Delta_+(x_i)$ для всех e_{x_i}, участвующих в разложении f_0, совпадают. Действительно, допустим, что e_{x_1} участвует в разложении и $\Delta_+(x_1) \supset \Delta_+(x_0)$. Тогда найдется такой проектор $P \in \Delta_+(x_1)$, что $Pe_{x_1} = e_{x_1}$, а $Pe_{x_0} = 0$. Но тогда $(I - P) \in \Delta_+(x_0)$. С другой стороны $(I - P)e_{x_1} = 0$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, для оставшихся в разложении базисных векторов все $\Delta_+(x_i)$ совпадают.

Тот элемент из семейства $\{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, для которого $U_k^* e_y \neq 0$ обозначим через U_y^*. Спустимся на один "этаж". Рассмотрим функцию $g = U_{x_0}^* f_0$. Очевидно, что

$$g = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]}}(e_{\varphi(x_0)} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i'' e_{\varphi(x_i)}), \quad \text{где} \quad \alpha_i'' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i'. \end{cases}$$

После применения U_{x_0} получаем

$$U_{x_0} g = \frac{1}{\operatorname{card}\varphi^{-1}(\varphi(x_0))}\Big(\sum_{x\in\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]} e_x + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i''' \sum_{x\in\varphi^{-1}[\varphi(x_i)]} e_x\Big), \quad \text{где} \quad \alpha_i''' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i''. \end{cases}$$

К получившейся функции опять применим проектора из $\Delta_+(x_0)$. После умножения на общий множитель $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]$ получаем функцию

$$f_1 = e_{x_0} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i''' e_{x_i}, \quad \text{где} \quad \alpha_i''' = \begin{cases} 0; \\ \alpha_i''. \end{cases}$$

В разложении f_1 по сравнению с f_0 остались такие базисные векторы e_{x_i}, у которых $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_i)] = \operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]$.

Далее рассмотрим функции (спустимся на два "этажа")

$$g_1 = U_{\varphi(x_0)}^* \left(\prod_{P\in\Delta_+(\varphi(x_0))} P \right) U_{x_0}^* f_1$$

и (поднимемся на два "этажа" и умножим на $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]\ \operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi^2(x_0)]$)

$$f_2 = \left(\prod_{P\in\Delta_+(x_0)} P \right) U_{x_0} \left(\prod_{P\in\Delta_+(\varphi(x_0))} P \right) U_{\varphi(x_0)} g_1.$$

В разложении f_2 по сравнению с f_0 остались те базисные векторы, у которых совпадают не только $\operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_i)] = \operatorname{card}\varphi^{-1}[\varphi(x_0)]$, но и $\operatorname{card}\varphi^{-2}[\varphi^2(x_i)] = \operatorname{card}\varphi^{-2}[\varphi^2(x_0)]$.

Продолжая эту процедуру, получим сходящуюся последовательность $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в $\overline{C_\varphi^*(X)f}$. Пусть $f' = \lim_{n\to\infty} f_n$. Очевидно, что по построению $(f', e_{x_0}) = (f, e_{x_0})$. Предположим, что найдется такой e_x, что $(f', e_x) \neq 0$. Тогда, по построению, $(f', e_x) = (f, e_x)$. Это значит, что для любого проектора $P \in \bigcup_{W\in\mathrm{Mon}_0^+(X)} \{P_i^{(W)}\}_{i=1}^{n(W)}$ выполняется

$$(PV^* e_{x_0}, V^* e_{x_0}) = (PV^* e_x, V^* e_x),$$

где V из $\mathfrak{U}$. Отсюда, согласно лемме 3.2, для любого монома W имеем $(We_{x_0}, e_{x_0}) = (We_x, e_x)$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $f' = e_{x_0}$.

Для завершения доказательства заметим, что для любых двух точек $x, y \in X$ найдутся такие числа m и n, что $\varphi^m(x) = \varphi^n(y)$. Теорема 4.1 доказана.

Данный критерий позволяет строить примеры неприводимых алгебр $C^*_\varphi(X)$. Кроме того, он позволяет получить интересные примеры неприводимых представлений $C^*_\varphi(X)$.

С помощью сформулированного в теореме 4.1 условия на базисных векторах можно ввести отношение эквивалентности на базисных элементах. Базисные элементы e_x и e_y эквивалентны ($e_x \sim e_y$), если для любого $W \in \mathrm{Mon}(X)$ выполняется $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$. Очевидно, что неприводимость $C^*_\varphi(X)$ означает, что все базисные элементы эквивалентны только самим себе.

Приведем без доказательства один результат, касающийся приводимых $C^*_\varphi(X)$.

Теорема 4.2. *Пусть число классов эквивалентности базисных элементов конечно. Тогда*

$$C^*_\varphi(X) \simeq C(S^1, B) \oplus M,$$

где B — некоторая конечномерная алгебра, а M — прямая сумма конечного числа матричных алгебр, размерности которых не превышают число классов эквивалентности.

Следствие 4.1. *Пусть число классов эквивалентности базисных элементов конечно, причем для любых двух $e_x \sim e_y$ не существует такого элемента $z \in X$ и $k \in \mathbb{N}$, что соответствующие элементы x и y лежат в k-ом прообразе элемента z. Тогда $C^*_\varphi(X) \simeq C(S^1, B)$, где B — некоторая конечномерная алгебра.*

Abstract. The paper gives a criterion of irreducibility of C^*-algebra $C^*_\varphi(X)$ in the Hilbert space $l^2(X)$, generated by the map φ of a countable set X to itself. The criterion makes it possible to construct examples of C^*-algebras, irreducible on $l^2(X)$.

Список литературы

[1] L. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry I*, Bull. Am. Math. Soc. **73** 722–726 (1967).

[2] L. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry II*, Trans. Amer. Math. Soc. **137** 211–217 (1969).

[3] M. A. Aukhadiev, V. H. Tepoyan, *Isometric representations of totally ordered semigroups* , Lobachevskii J. of Math. **33**(3) 239–243 (2012).

[4] S. A. Grigoryan, V. H. Tepoyan, *On isometric representations of the perforated semigroup*, Lobachevskii J. of Math. **34**(1) 85–88 (2013).

[5] В. А. Тепоян, *Об изометрических представлениях полугруппы* $\mathbb{Z}_+\backslash\{1\}$, Известия НАН Армении, серия Математика, **48**(2) 51–57 (2013).

[6] M. A. Aukhadiev, S. A. Grigoryan, E. V. Lipacheva, *A compact quantum semigroup generated by an isometry*, Russian Mathematics (Iz VUZ) **55** (10) 78–81 (2011).

[7] M. A. Aukhadiev, S. A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, *Infinite-dimensional compact quantum semigroup*, Lobachevskii J. of Math. **32** (4) 304–316 (2011).

[8] X. Li, *Semigroups C^*-algebras and amenability of semigroups*, arXiv:1105.5539v2 [math.OA] 22 Feb 2012.
[9] В. А. Арзуманян, *$*$-представления инверсных полугрупп*, Известия Академии Наук Армянской ССР, серия Математика, **13**(2) 107–113 (1978).
[10] J. Cuntz, *On the simple C^*-algebras generated by isometries*, Comn. Math. Phys. **57** 173–185 (1977).
[11] J. Cuntz, W. Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56**(3) 251–268 (1980).
[12] A. Kumjian, *On certain Cuntz-Pimsner algebras*, arXiv:math.OA/0108194 v1 (2001).
[13] V. Deaconu, A. Kumjian, and P. Muhly, *Cohomology of topological graphs and Cuntz-Pimsner algebras*, arXiv:math/9901094v1[math.OA](1999).
[14] S. A. Grigoryan, A. Kuznetsova, *C^*-algebras generated by mappings*, Lobachevskii J. of Math. **29**(1) 5–8 (2008).
[15] С. А. Григорян, А. Ю. Кузнецова, *C^*-алгебры, порожденные отображениями*, Мат. Заметки, **87**(5) 694-703 (2010).
[16] S. A. Grigoryan, A. Yu. Kuznetsova, *AF-подалгебры C^*-алгебры, порожденной отображением* , Известия вузов, серия Математика, **54**(3) 82–87 (2010).
[17] А. Ю. Кузнецова, *Об одном класе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий*, Известия НАН Армении, серия Математика, **45**(6) 51-62 (2010).
[18] S. A. Grigoryan, A. Yu. Kuznetsova, *On a class of nuclear C^*-algebras*, An Operator Theory Summer, Proceedings of the 23rd intenational conference on operator theory (Timisoara, Romania) 39–50 (2010).
[19] А. Ю. Кузнецова, Е. В. Патрин, *Об одном классе C^*-алгебр, порожденных частичными изометриями и мультипликаторами*, Известия вузов, серия Математика, **56**(6) 44–55 (2012).

Поступила 11 ноября 2013