Известия НАН Армении. Математика, том 49, н. 1, 2014, стр. 3-22.

О ПРОБЛЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ СЛЕДОВ ДЛЯ УСЕЧЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ И ОПЕРАТОРОВ

М. С. ГИНОВЯН, А. А. СААКЯН

Институте Математики, НАН Армении, Ереван, Армения
Бостонский университет, Бостон, США[1],

Ереванский государственный университет, Армения
E-mails: *ginovyan@math.bu.edu; sart@ysu.am*

Аннотация. Статья посвящена проблемам аппроксимации следов произведения усеченных теплицевых операторов и матриц, порожденных интегрируемыми, действительными четными функциями определенными на действительной оси (соответственно, на единичной окружности), и оценки соответствующих погрешностей. Эти приближения и соответствующие оценки погрешностей важны в статистическом анализе стационарных процессов с непрерывным или дискретным временем (асимптотическое распределение и большие уклонения для теплицевых квадратических функционалов и форм, параметрическое и непараметрическое оценивание и т.д.). Мы даем обзор известных результатов связанных с проблемой аппроксимации следов и приводим некоторые новые результаты.

MSC2010 numbers: 60G10; 62M20; 47B35.

Ключевые слова: Аппроксимация следов, теплицевы матрицы, усеченный теплицев оператор, оценки погрешностей, сингулярность.

1. Введение

Теплицевы матрицы и операторы, которые представлют большой самостоятельный интерес и имеют широкий спектр применения в различных областях науки (экономика, инженерия, финансы, гидрология, физика, передача сигналов и т.д.) естественным образом возникают в анализе стационарных процессов – ковариантные матрицы (операторы) стацинарных процессов с дискретным (непрерывным) временем являются усеченными теплицевыми матрицами (операторами), порожденными спектральной плотностью этого процесса. И наоборот, произвольная неотрицательная суммируемая функция порождает теплицевую матрицу (оператор), которую можно рассматривать как спектральную плотность некоторого стационарного процесса с дискретным (непрерывным) временем, и, следовательно, соответствующая усеченная матрица (оператор) является ковариантной матрицей (оператором) этого процесса.

[1]Исследования М. Гиновяна были частично поддержаны Национальным научным фондом Grant #DMS-1309009.

Усеченные теплицевы матрицы и операторы играют важную роль в различных областях спектрального и статистического анализа стационарных процессов с дискретным и непрерывным временем таких, как предельные теоремы и большие уклонения для теплицевых случайных квадратичных форм и функционалов, оценки спектральных параметров и функционалов, ассимптотические разложения оценок и т.д. (см., например, , [1], [2], [4], [6] - [17], [19], [22], [24], [25]).

Настоящая статья посвящена проблемам аппроксимации следов произведения усеченных теплицевых матриц (операторов) порожденных интегрируемыми, действительными четными функциями, определенными на единичной окружности (на действительной оси), и оценивание соответствующих погрешностей.

Статья построена следующим образом. В остальной части этого параграфа мы формулируем проблему аппрксимации следов. В параграфе 2 мы обсуждаем проблему следов для теплицевых матриц. В параграфе 3 рассматриваем эту проблему для теплицевых операторов. В параграфе 4 приведены вспомогательные леммы. В параграфе 5 доказываются теоремы 3.1 - 3.4. В параграфе 6 мы обсуждаем некоторые примеры.

1.1. Проблема аппроксимации следов. Проблему аппроксимации следов произведений усеченных Теплицевых матриц и операторов можно сформулировать следующим образом.

Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ – набор интегрируемых, действительных, четных функций, определенных на множестве Λ, где $\Lambda = \mathbb{R} := (-\infty, \infty)$ или $\Lambda = \mathbb{T} := (-\pi.\pi]$, и пусть $A_T(h_k)$ означает либо T-усеченный теплицевый оператор, либо теплицева $(T \times T)$-матрица, порожденная функцией h_k (соответствующие определения приведены ниже). Далее, пусть $\tau := \{\tau_k : \tau_k \in \{-1, 1\},\ k = \overline{1,m}\}$ – заданная последовательность чисел ± 1. Положим

$$S_{A,\mathcal{H},\tau}(T) := \frac{1}{T} \operatorname{tr} \left[\prod_{k=1}^{m} \{A_T(h_k)\}^{\tau_k} \right],$$

где $\operatorname{tr}[A]$ обозначает след A,

$$M_{\Lambda,\mathcal{H},\tau} := (2\pi)^{m-1} \int_\Lambda \prod_{k=1}^{m} [h_k(\lambda)]^{\tau_k} d\lambda,$$

и

$$\Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T) := |S_{A,\mathcal{H},\tau}(T) - M_{\Lambda,\mathcal{H},\tau}|.$$

Проблема состоит в аппроксимации $S_{A,\mathcal{H},\tau}(T)$ величиной $M_{\Lambda,\mathcal{H},\tau}$ в оценке погрешности $\Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T)$ при $T \to \infty$. Точнее, для заданной последовательности $\tau = \{\tau_k \in \{-1,1\},\ k = \overline{1,m}\}$ нужно найти условия на функции $\{h_k(\lambda),\ k = \overline{1,m}\}$ такие, что :

$$\text{Проблема (A):}\quad \Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T) = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

$$\text{Проблема (B):}\quad \Delta_{A,\Lambda,\mathcal{H},\tau}(T) = O(T^{-\gamma}), \quad \gamma > 0, \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Проблема аппроксимации следов была рассмотрена еще в монографии Гренадера и Сеге [19]. Она интенсивно изучалась в литературе (см., например, Kac [21], Ibragimov [20], Rosenblatt [23], Taniguchi [24], Avram [1], Fox and Taqqu [7], Dahlhaus [6], Giraitis and Surgailis [17], Ginovyan [8]-[11], Taniguchi and Kakizawa

[25], Lieberman and Phillips [22], Giraitis et al. [16], Ginovyan and Sahakyan [12]-[15]).

В настоящей статье мы суммируем известные результаты по проблемам (A) и (B) и доказываем некторые новые результаты для теплицевых матриц и операторов, сформулированные в параграфах 2 и 3. Результаты о теплицевых операторах доказаны в параграфе 5. Доказательства соответствующих результатов о теплицевых матрицах аналогичны и мы их не приводим.

Мы выделяем следующий частный случай, который важен для приложений и широко обсужден в литературе: $m = 2\nu$, $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$, и

$$h_1(\lambda) = h_3(\lambda) = \cdots = h_{2\nu-1}(\lambda) := f(\lambda)$$
$$h_2(\lambda) = h_4(\lambda) = \cdots = h_{2\nu}(\lambda) := g(\lambda).$$

В дальнейшем буквами C, c и M, с индексами или без, мы обозначаем положительные постоянные, которые могут быть разными в разных формулах. Мы предполагаем также, что все функции, определенные на $\mathbb{T}$ продолжены на всю ось $\mathbb{R}$ с периодом 2π.

2. Проблема следов для Теплицевых матриц

Пусть $f(\lambda)$ – интегрируемая, четная функция на $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$. Для $T = 1, 2, \ldots$ через $B_T(f)$ обозначим теплицевую $(T \times T)$-матрицу, порожденную функцией f, т. е.

$$B_T(f) := \|\widehat{f}(s-k)\|_{s,k=\overline{1,T}},$$

где

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{i\lambda k} f(\lambda)\, d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

суть коэффиценты Фурье функции f.

Отметим, что

$$\frac{1}{T}\mathrm{tr}\,[B_T(f)] = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) d\lambda. \tag{2.1}$$

Что будет, если мы заменим матрицу $B_T(f)$ произведением теплицевых матриц? Заметим, что произведение теплицевых матриц не является теплицевой матрицей.

Идея состоит в приближении следа произведения теплицевых матриц следом теплицевой матрицы, порожденной произведением порождающих функций. Точнее, для набора $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ действительных, четных и интегрируемых на $\mathbb{T}$ функций мы полагаем

$$S_{B,\mathcal{H}}(T) := \frac{1}{T}\mathrm{tr}\left[\prod_{i=1}^{m} B_T(h_i)\right], \qquad M_{\mathbb{T},\mathcal{H}} := (2\pi)^{m-1}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\prod_{i=1}^{m} h_i(\lambda)\right] d\lambda, \tag{2.2}$$

и пусть

$$\Delta(T) := \Delta_{B,\mathbb{T},\mathcal{H}}(T) = |S_{B,\mathcal{H}}(T) - M_{\mathbb{T},\mathcal{H}}|.$$

Отметим, что согласно (2.1),

$$M_{\mathbb{T},\mathcal{H}} = \frac{1}{T}\mathrm{tr}\left[B_T\left(\prod_{i=1}^{m} h_i(\lambda)\right)\right].$$

Как хорошо приближается $S_{B,\varkappa}(T)$ величиной $M_{\mathbb{T},\varkappa}$? Какова скорость стремления к нулю погрешности $\Delta_{B,\mathbb{T},\varkappa}(T)$, когда $T \to \infty$? В этом состоят проблемы (A) и (B) в рассматриваемом случае.

2.1. Проблема (A) для теплицевых матриц. Напомним, что проблема (A) состоит в нахождении условий на функции $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, ..., $h_m(\lambda)$ в (2.2) таких, что $\Delta_{B,\mathbb{T},\varkappa}(T) = o(1)$ при $T \to \infty$.

В теореме 2.1 и замечании 2.2 мы суммируем результаты по проблеме (A) для теплицевых матриц в случае, когда $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\Delta_{B,\mathbb{T},\varkappa}(T) = |S_{B,\varkappa}(T) - M_{\mathbb{T},\varkappa}|$. *Каждое из следующих условий достаточно для выполнения условия*

$$\Delta_{B,\mathbb{T},\varkappa}(T) = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{2.3}$$

(A1) $h_i \in L^{p_i}(\mathbb{T})$, *где* $1 \le p_i \le \infty$, $i = \overline{1,m}$ *и* $1/p_1 + \ldots + 1/p_m \le 1$.

(A2) *Функция* $\varphi(\mathbf{u})$, *определенная равенством*

$$\varphi(\mathbf{u}) := \int_{-\pi}^{\pi} h_1(\lambda)h_2(\lambda-u_1)h_3(\lambda-u_2)\cdots h_m(\lambda-u_{m-1})\,d\lambda, \tag{2.4}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, *принадлежит* $L^{m-2}(\mathbb{T}^{m-1})$ *и непрерывна в точке* $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Замечание 2.1. Утверждение (A1) было доказано Аврамом [1]. В частном случае $p_i = \infty$, $i = \overline{1,m}$, когда все функции h_i ограничены, оно было доказано Гренадерем и Сеге ([19], Sec. 7.4). В случае $m = 4$; $p_1 = p_3 = 2$; $p_2 = p_4 = \infty$, (A1) было доказано Ибрагимовым [20] и Розенблаттом [23]. Утверждение (A2), в случае $m = 4$, $h_1 = h_3 := f$ и $h_2 = h_4 := g$, было доказано Гиновяном и Саакяном [12].

Замечание 2.2. В частном случае $m = 4$, $h_1 = h_3 := f$ and $h_2 = h_4 := g$, Гирайтис и Сургайлис [17] (см. также Гирайтис и др. [16]), и Гиновян и Саакян [12] доказали, что следующие условия также достаточны для выполнения (2.3):
(A3) (Гирайтис и Сургайлис [17]). $f \in L^2(\mathbb{T})$, $g \in L^2(\mathbb{T})$, $fg \in L^2(\mathbb{T})$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)g^2(\lambda-\mu)\,d\lambda \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda \quad \text{при} \quad \mu \to 0.$$

(A4) (Гиновян и Саакян [12]). Функции f и g удовлетворяют условиям

$$f(\lambda) \le |\lambda|^{-\alpha}L_1(\lambda) \quad \text{и} \quad |g(\lambda)| \le |\lambda|^{-\beta}L_2(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \in \mathbb{T},$$

для некотроых $\alpha < 1$, $\beta < 1$ с $\alpha + \beta \le 1/2$, и $L_i \in SV(\mathbb{R})$, $\lambda^{-(\alpha+\beta)}L_i(\lambda) \in L^2(\mathbb{T})$, $i = 1,2$, где $SV(\mathbb{R})$ – класс медленно меняющихся в нуле функций $u(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, точнее,

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{u(a\lambda)}{u(\lambda)} = 1 \quad \text{для всех} \quad a > 0,$$

при этом, $u(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{\lambda\to 0} u(\lambda) = 0$, $u(\lambda) = u(-\lambda)$ и $0 < u(\lambda) < u(\mu)$ при $0 < \lambda < \mu$.

Замечание 2.3. Утверждение (A4), в частном случае, когда $\alpha + \beta < 1/2$, доказали Фокс и Такку [7].

Замечание 2.4. Было бы интересно доказать (A3) и (A4) для произвольного $m > 4$.

2.2. Проблема (B) для теплицевых матриц. Напомним, что проблема (B) состоит в нахождении условий на функции $h_1(\lambda)$, $h_2(\lambda)$, ..., $h_m(\lambda)$ в (2.2), гарантирующих выполнение условия $\Delta_{B,\mathbb{T},\mathcal{H}}(T) = O(T^{-\gamma})$ при $T \to \infty$ для некоторого $\gamma > 0$.

В теореме 2.2 ниже подытожены результаты, касающиеся проблемы (B) для теплицевых матриц в случае, когда $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$. Сначала определим некоторые классы функций (см., например, [5, 24, 25]). Напомним, что $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ и положим

$$\mathcal{F}_1(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k||\widehat{f}(k)| < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} e^{i\lambda k} f(\lambda)\, d\lambda$, $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$, и

$$\mathcal{F}_2(\mathbb{T}) = \mathcal{F}_{ARMA}(\mathbb{T}) := \left\{ f : f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{A(e^{i\lambda})}{B(e^{i\lambda})} \right|^2, \quad \lambda \in \mathbb{T} \right\},$$

где $0 < \sigma^2 < \infty$, а полиномы

$$A(z) := \sum_{k=0}^{q} a_k z^k \quad \text{и} \quad B(z) := \sum_{k=0}^{p} b_k z^k \quad (q, p \in \mathbb{N})$$

отрезаны от нуля при $|z| \le 1$.

Для функции $\psi \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p \le \infty$, через $\omega_p(\psi, \delta)$ обозначим ее L^p–модуль непрерывности:

$$\omega_p(\psi, \delta) := \sup_{0<h\le\delta} \|\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)\|_{L^p}, \quad \delta > 0.$$

Для заданных чисел $0 < \gamma \le 1$ и $1 \le p \le \infty$, через $\mathrm{Lip}(\mathbb{T}; p, \gamma)$ обозначим L^p-Липшицовый класс функций на $\mathbb{T}$ (см., например, [5]):

$$\mathrm{Lip}(\mathbb{T}; p, \gamma) = \{\psi(\lambda) \in L^p(\mathbb{T}); \quad \omega_p(\psi; \delta) = O(\delta^\gamma), \quad \delta \to 0\}.$$

Заметим, что для $\psi \in \mathrm{Lip}(p, \gamma)$, существует постоянная C такая, что $\omega_p(\psi; \delta) \le C\,\delta^\gamma$ при $\delta > 0$.
Наконец, через $B_2^{1/2}(\mathbb{T})$ обозначим класс функций Бесова, который определяется так:

$$B_2^{1/2}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{T}) : \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|k| + 1)|\widehat{f}(k)|^2 < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, суть коэффициенты Фурье функции f.

Теорема 2.2. *Пусть $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$, $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, и пусть $\Delta_{B,\mathbb{T},\mathcal{H}}(T)$ определена как в теореме 2.1. Имеют место следующие утверждения:*

(B1) *Если $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbb{T})$, $i = \overline{1,m}$, тогда*

$$\Delta_{B,\mathbb{T},\mathcal{H}}(T) = O(T^{-1}) \quad \textit{при} \quad T \to \infty.$$

(B2) *Если функции $h_i(\lambda)$, $i=\overline{1,m}$, имеют равномерно ограниченные производные на $\mathbb{T}:=(-\pi,\pi]$, тогда для произвольного $\epsilon>0$*

$$\Delta_{B,\mathbb{T},\mathcal{H}}(T)=O(T^{-1+\epsilon}) \quad \textit{при} \quad T\to\infty.$$

(B3) *Если функция $\varphi(\mathbf{u})$, определенная в (2.4) удовлетворяет условию*

$$|\varphi(\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{0})|\le C|\mathbf{u}|^{\gamma}, \quad \mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_{m-1})\in\mathbb{T}^{m-1},$$

с некоторыми постоянными $C>0$ и $\gamma\in(0,1]$, где $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{n-1}$ и $|\mathbf{u}|=|u_1|+\cdots+|u_{m-1}|$, тогда для любого $\varepsilon>0$

$$\Delta_{B,\mathbb{T},\mathcal{H}}(T)=O\left(T^{-\gamma+\epsilon}\right) \quad \textit{при} \quad T\to\infty. \tag{2.5}$$

(B4) *Пусть $h_i(\lambda)\in \mathrm{Lip}(\mathbb{T};p_i,\gamma)$, где $p_i\ge 1$, $i=1,2,\ldots,m$ с $1/p_1+\cdots+1/p_m\le 1$ and $\gamma\in(0,1]$. Тогда (2.5) выполняется при любом $\varepsilon>0$.*

(B5) *Пусть функции $h_i(\lambda)$, $i=1,2,\ldots,m$ дифференцируемы на $\mathbb{T}\setminus\{0\}$, и для некоторых констант $C_i>0$ и α_i, $i=1,2,\ldots,m$ с условиями $0<\alpha_i<1$, $\alpha:=\sum_{i=1}^m\alpha_i<1$, имеют место оценки*

$$|h_i(\lambda)|\le C_i|\lambda|^{-\alpha_i}, \quad |h_i'(\lambda)|\le C_i|\lambda|^{-(\alpha_i+1)}, \quad \lambda\in\mathbb{T}\setminus\{0\},\ i=1,2,\ldots,m.$$

Тогда при любом $\varepsilon>0$ условие (2.5) выполняется с

$$\gamma=\frac{1}{m}(1-\alpha). \tag{2.6}$$

Замечание 2.5. Утверждение (B1) было доказано Танигучи [24] (см также [25]). Утверждение (B2), которое слабее (B1), но при более слабых условий было доказано Либерманом и Филипсом [22]. Утверждения (B3)–(B5) для $m=4$ доказаны Гиновяном и Саакяном [15].

Замечание 2.6. Легко видеть, что при условии **(B2)** имеем, что $h_i\in\mathrm{Lip}(\mathbb{T};p,1)$ для любых $i=1,2,\ldots m$ и $p\ge1$. Следовательно, из **(B4)** вытекает **(B2)**.

Следующие результаты (ср. [11]) показывают, что в частном случае $m=2$ оценки (B4) и (B5) теоремы 2.2 могут быть существенно улучшены.

Теорема 2.3. *Пусть $h_i(\lambda)\in\mathrm{Lip}(\mathbb{T};p_i,\gamma_i)$, где $p_i>1$, $1/p_1+1/p_2\le1$ и $\gamma_i\in(0,1]$, $i=1,2$, и пусть*

$$\Delta_{2,B}(T):=\left|\frac{1}{T}tr[B_T(h_1)B_T(h_2)]-2\pi\int_{\mathbb{T}}h_1(\lambda)h_2(\lambda)\,d\lambda\right|. \tag{2.7}$$

Тогда

$$\Delta_{2,B}(T)=\begin{cases} O(T^{-(\gamma_1+\gamma_2)}), & \textit{если} \quad \gamma_1+\gamma_2<1\\ O(T^{-1}\ln T), & \textit{если} \quad \gamma_1+\gamma_2=1\\ O(T^{-1}), & \textit{если} \quad \gamma_1+\gamma_2>1.\end{cases}$$

Теорема 2.4. *Допустим, что функции $h_i(\lambda)$, $i=1,2$, удовлетворяют условиям теоремы 2.2 (B5) с $m=2$. Тогда*

$$\Delta_{2,B}(T)=O\left(T^{-1+(\alpha_1+\alpha_2)}\right) \quad \textit{при} \quad T\to\infty.$$

Теорема 2.5. *Если $h_i(\lambda)\in B_2^{1/2}(\mathbb{T})$, $i=1,2$, тогда*

$$\Delta_{2,B}(T)=O\left(T^{-1}\right) \quad \textit{при} \quad T\to\infty.$$

3. Проблема следов для Теплицевых операторов

В этом параграфе мы рассматриваем проблемы (A) и (B) для теплицевых операторов, т. е. в случае, когда порождающие функции определены на действительной оси. Проблема (A) включает оценку $o(1)$, а проблема (B) включает оценку $O(T^{-\gamma})$ с некоторой $\gamma > 0$. Результаты этого параграфа доказаны в параграфе 5.

Для действительной, четной и интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f и для $T > 0$, *T-усеченный оператор Теплица* $W_T(f)$, порожденный фукцией f, определяется следующим образом (см., напр., [13, 19, 20]):

$$[W_T(f)u](t) = \int_0^T \hat{f}(t-s)u(s)ds, \quad u(s) \in L^2[0,T], \tag{3.1}$$

где

$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.2}$$

есть преобразование Фурье функции $f(\lambda)$.

Из (3.1), (3.2) и из формулы для следов интегральных операторов (см., напр., [18], стр. 114), следует, что

$$\mathrm{tr}\,[W_T(f)] = \int_0^T \hat{f}(t-t)dt = T\hat{f}(0) = T\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)d\lambda.$$

Мы ставим тот же вопрос, что и в случае теплицевых матриц: что будет при замене оператора $W_T(f)$ на произведение таких операторов? Отметим, что произведение теплицевых операторов опять не является теплицевым оператором.

Подход тот же, что и в случае теплицевых матриц – приблизить след произведения теплицевых операторов следом теплицевого оператора, порожденного произведением порождающих функций. Для действительных, четных и интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ определим

$$S_{W,\mathcal{H}}(T) := \frac{1}{T}\mathrm{tr}\left[\prod_{i=1}^m W_T(h_i)\right], \quad M_{\mathbb{R},\mathcal{H}} := (2\pi)^{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^m h_i(\lambda)\right]d\lambda, \tag{3.3}$$

и пусть

$$\Delta(T) := \Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T) = |S_{W,\mathcal{H}}(T) - M_{\mathbb{R},\mathcal{H}}|. \tag{3.4}$$

Заметим, что согласно (3.3),

$$M_{\mathbb{R},\mathcal{H}} = \frac{1}{T}\mathrm{tr}\left[W_T\left(\prod_{i=1}^m h_i(\lambda)\right)\right].$$

Как хорошо $M_{\mathbb{R},\mathcal{H}}$ приближает $S_{W,\mathcal{H}}(T)$? Какова скорость сходимости к нулю погрешности $\Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T)$, когда $T \to \infty$? В этом состоят проблемы (A) и (B) в рассматриваемом случае.

3.1. Проблема (A) для теплицевых операторов. В теореме 3.1 и замечании 3.1 ниже подытожены результаты, касающиеся проблемы (A) для теплицевых операторов.

Теорема 3.1. *Пусть $\Delta(T) := \Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T)$ определена в (3.4). Каждое из следующих условий достаточно для выполнения условия*

$$\Delta(T) = o(1) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.5}$$

(A1) $h_i \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{p_i}(\mathbb{R})$, *где* $p_i \geq 1$, $i = \overline{1,m}$, $1/p_1 + \ldots + 1/p_m \leq 1$.

(A2) *Функция* $\varphi(\mathbf{u})$, *определенная равенством*

$$\varphi(\mathbf{u}) := \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\lambda)h_2(\lambda - u_1)h_3(\lambda - u_2)\cdots h_m(\lambda - u_{m-1})\,d\lambda, \tag{3.6}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, *принадлежит* $L^{m-2}(\mathbb{R}^{m-1})$ *и непрерывна в точке* $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m-1}$.

Замечание 3.1. В частном случае, когда $m = 4$, $h_1 = h_3 := f$ and $h_2 = h_4 := g$, в работе Гиновяна и Саакяна [13] доказано, что следующие условия также достаточны для выполнения (3.5):

(A3) $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $fg \in L^2(\mathbb{R})$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda - \mu)\,d\lambda \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(\lambda)g^2(\lambda)\,d\lambda \quad \text{при} \quad \mu \to 0.$$

(A4) Функции f и g интегрируемы на $\mathbb{R}$, ограничены на $\mathbb{R} \setminus (-\pi, \pi)$, и удовлетворяют условиям

$$f(\lambda) \leq |\lambda|^{-\alpha}L_1(\lambda) \quad \text{и} \quad |g(\lambda)| \leq |\lambda|^{-\beta}L_2(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \in [-\pi, \pi],$$

при некоторых $\alpha < 1$, $\beta < 1$ с $\alpha + \beta \leq 1/2$, и $L_i \in SV(\mathbb{R})$, $\lambda^{-(\alpha+\beta)}L_i(\lambda) \in L^2(\mathbb{T})$, $i = 1, 2$, где $SV(\mathbb{R})$ – класс медленно меняющихся в нуле функций $u(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, таких, что $u(\lambda) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\lim_{\lambda\to 0} u(\lambda) = 0$, $u(\lambda) = u(-\lambda)$ и $0 < u(\lambda) < u(\mu)$ при $0 < \lambda < \mu$.

Замечание 3.2. Было бы интересно обобщить утверждения (A3) и (A4) на произвольное $m > 4$.

3.2. Проблема (B) для теплицевых операторов. В теореме 3.2 ниже подытожены результаты, касающиеся проблеме (B) для теплицевых операторов в случае, когда $\tau_k = 1$, $k = \overline{1,m}$. Пусть

$$\mathcal{F}_1(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{\infty} |t||\widehat{f}(t)|dt < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda$, $\widehat{f}(-t) = \widehat{f}(t)$.

Для $\psi \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ через $\omega_p(\psi, \delta)$ обозначим L^p–модуль непрерывности функции ψ:

$$\omega_p(\psi, \delta) := \sup_{0<h\leq\delta} \|\psi(\cdot + h) - \psi(\cdot)\|_{L^p}, \quad \delta > 0.$$

Для заданных чисел $0 < \gamma \leq 1$ и $1 \leq p \leq \infty$, через $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}; p, \gamma)$ обозначим L^p-липшицевый класс на $\mathbb{R}$ (см., напр., [5]):

$$\mathrm{Lip}(\mathbb{R}; p, \gamma) = \{\psi(\lambda) \in L^p(\mathbb{R}) \ : \ \omega_p(\psi; \delta) = O(\delta^\gamma) \text{ при } \delta \to 0\}.$$

Наконец, через $B_2^{1/2}(\mathbb{R})$ обозначим класс Бесова:

$$B_2^{1/2}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} (|t|+1)|\widehat{f}(t)|^2 dt < \infty \right\},$$

где $\widehat{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ – преобразование Фурье функции f.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, $\Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T)$ и $\varphi(\mathbf{u})$ определены в (3.4) и (3.6). Справедливы следующие предложения:*

(B1) *Если $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, тогда*

$$\Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T) = O(T^{-1}) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

(B2) *Пусть $\varphi(\mathbf{u}) \in L^\infty(\mathbb{R}^{m-1})$ и для некоторых постоянных $C > 0$ и $\gamma \in (0,1]$*

(3.7) $$|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{0})| \le C|\mathbf{u}|^\gamma, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1},$$

где $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $|\mathbf{u}| = |u_1| + \cdots + |u_{m-1}|$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

(3.8) $$\Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T) = O\left(T^{-\gamma+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

(B3) *Пусть $h_i(\lambda) \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}; p_i, \gamma)$, где $p_i \ge 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $1/p_1 + \cdots + 1/p_m \le 1$ и $\gamma \in (0,1]$. Тогда (3.8) выполняется при любом $\varepsilon > 0$.*

(B4) *Пусть $h_i(\lambda)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, дифференцируемые функции на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ такие, что для некоторых постоянных $C_i > 0$ и $\sigma_i > 0$, $\delta_i > 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$ с $\sigma := \sum_{i=1}^m \sigma_i < 1$, при $i = 1, 2, \ldots, m$,*

(3.9) $$|h_i(\lambda)| \le C_i \begin{cases} |\lambda|^{-\sigma_i} & \text{при } |\lambda| \le 1 \\ |\lambda|^{-\delta_i} & \text{при } |\lambda| > 1 \end{cases}, \quad |h_i'(\lambda)| \le C_i \begin{cases} |\lambda|^{-\sigma_i - 1} & \text{при } |\lambda| \le 1 \\ |\lambda|^{-\delta_i - 1} & \text{при } |\lambda| > 1 \end{cases}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

(3.10) $$\Delta_{W,\mathbb{R},\mathcal{H}}(T) = O\left(T^{-\gamma+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty,$$

где

(3.11) $$\gamma = \frac{1}{m}(1 - \sigma).$$

Следующие результаты, являющиеся непрерывными аналогами Теорем 2.3 – 2.5, показывают, что в случае $m = 2$ оценки в (B3) и (B4) теоремы 3.2 могут быть существенно улучшены.

Теорема 3.3. *Пусть $h_i(\lambda) \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}; p_i, \gamma_i)$ где $p_i > 1$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1$ и $\gamma_i \in (0,1]$, $i = 1, 2$, и пусть*

(3.12) $$\Delta_{2,W}(T) := \left| \frac{1}{T} tr[W_T(h_1) W_T(h_2)] - 2\pi \int_{\mathbb{R}} h_1(\lambda) h_2(\lambda)\, d\lambda \right|.$$

Тогда

$$\Delta_{2,W}(T) = \begin{cases} O(T^{-(\gamma_1+\gamma_2)}) & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 < 1 \\ O(T^{-1} \ln T) & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \\ O(T^{-1}) & \text{при } \gamma_1 + \gamma_2 > 1 \end{cases}.$$

Теорема 3.4. *Пусть функции $h_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют условиям теоремы 3.2 (B4) с $m = 2$. Тогда*

$$\Delta_{2,W}(T) = O\left(T^{-1+(\sigma_1+\sigma_2)}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.13}$$

Теорема 3.5. *Пусть $h_i(\lambda) \in B_2^{1/2}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, а $\Delta_{2,W}(T)$ определена в (3.12). Тогда*

$$\Delta_{2,W}(T) = O\left(T^{-1}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{3.14}$$

4. Предварительные результаты

В этом параграфе мы докажем несколько вспомогательных лемм. Следующее утверждение хорошо известно (см., напр., [13], [16], стр. 8).

Лемма 4.1. *Пусть $D_T(u)$ – ядро Дирихле*

$$D_T(u) = \frac{\sin(Tu/2)}{u/2}.$$

Тогда для любого $\delta \in (0, 1)$

$$|D_T(u)| \le 2\,T^{\delta}|u|^{\delta-1}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Обозначим

$$G_T(u) := \int_0^T e^{iTu}dt = e^{iTu/2}D_T(u), \quad u \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$\Phi_T(\mathbf{u}) := \frac{1}{(2\pi)^{m-1}T}\cdot D_T(u_1)\cdots D_T(u_{m-1})D_T(u_1+\cdots+u_{m-1}), \tag{4.2}$$

$$\Psi(\mathbf{u}) := \varphi(u_1, u_1+u_2, \ldots, u_1+\cdots+u_{m-1}), \tag{4.3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, а функция $\varphi(\mathbf{u})$, соответствующая набору $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$, определена в (3.6).

Следующая лемма вытекает из (3.3) и (4.1) – (4.3) (ср. [13], лемма 1).

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{H} = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ – набор действительных, четных и интегрируемых на $\mathbb{R}$ функций, $\hat{h}_k$ – коэффициенты Фурье функции h_k ($k = 1, \ldots, m$), и пусть $S(T) := S_{W,\mathcal{H}}(T)$ определена в (3.3). Справедливы следующие равенства:*

$$1)\ S(T) = \frac{1}{T}\int_0^T\cdots\int_0^T \hat{h}_1(u_1-u_2)\hat{h}_2(u_2-u_3)\ldots\hat{h}_m(u_m-u_1)du_1\ldots du_m,$$

$$2)\ S(T) = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^m} h_1(u_1)\ldots h_m(u_m)G_T(u_1-u_2)G_T(u_2-u_3)\times\cdots$$
$$\times G_T(u_m-u_1)du_1\ldots du_m,$$

$$3)\ S(T) = (2\pi)^{m-1}\int_{\mathbb{R}^{m-1}}\Psi(\mathbf{u})\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u}.$$

Для $m = 3, 4\ldots$ и $\delta > 0$ обозначим

$$\mathbf{E}_\delta = \{(u_1, \ldots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1} : |u_i| \le \delta,\ i = 1, \ldots, m-1\}, \quad \mathbf{E}_\delta^c = \mathbb{R}^{m-1}\setminus\mathbf{E}_\delta,$$

$$p(3) = 2, \quad p(m) = \frac{m-2}{m-3} \quad (m > 3).$$

Лемма 4.3. *Ядро* $\Phi_T(\mathrm{u})$, $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^{m-1}$, $m \geq 3$ *удовлетворяет следующим условиям:*

a) $\sup\limits_T \int_{\mathbb{R}^{m-1}} |\Phi_T(\mathrm{u})|\, d\mathrm{u} = C_1 < \infty$;

b) $\int_{\mathbb{R}^{m-1}} \Phi_T(\mathrm{u})\, d\mathrm{u} = 1$;

c) $\lim\limits_{T\to\infty} \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathrm{u})|\, d\mathrm{u} = 0$ *для любого* $\delta > 0$;

d) *для любого* $\delta > 0$ *существует постоянная* $M_\delta > 0$ *такая, что*

$$\int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathrm{u})|^{p(m)}\, d\mathrm{u} \leq M_\delta \quad \text{при} \quad T > 0, \tag{4.4}$$

Доказательство. Доказательство a) - c) можно найти в [2], лемма 3.2 (см. также [13], лемма 2). Докажем d). Сначала заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}} |D_T(u)|^{p(m)}\, du \leq C \cdot T^{p(m)-1} \quad \text{и} \quad |D_T(u)| \leq C_\delta \quad \text{при} \quad |u| > \delta, \quad T > 0. \tag{4.5}$$

Далее, для $\mathrm{u} = (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ имеем, что

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) du \;&\leq \int\limits_{|u_1|>\delta} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) du + \int\limits_{|u_2|>\delta} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) du \\ &+ \dots + \int\limits_{|u_{m-1}|>\delta} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) du =: I_1 + I_2 + \dots + I_{m-1}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Достаточно оценить I_1 ($I_2, \dots, I_n$ оцениваются аналогично). Имеем, что

$$\begin{aligned} I_1 \;&\leq \int\limits_{|u_1|>\delta,\ |u_2|>\delta/m} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) du + \dots + \int\limits_{|u_1|>\delta,\ |u_{m-1}|>\delta/m} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) du \\ &+ \int\limits_{|u_1|>\delta,\ |u_2|\leq\delta/m,\ |u_{m-1}|\leq\delta/m} \Phi_T^{p(m)}(\mathrm{u}) du =: I_1^{(2)} + \dots + I_1^{(m-1)} + I_1^{(m)}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Согласно (4.5),

$$\begin{aligned} I_1^{(2)} &\leq C_\delta \cdot \frac{1}{T^{p(m)}} \cdot \int\limits_{|u_2|>\delta/m} |D_T(u_2)|^{p(m)} \cdots |D_T(u_{m-1})|^{p(m)} \\ &\qquad \times |D_T(u_1 + \dots + u_{m-1})|^{p(m)}\, du_1 du_{m-1} \dots du_2 \\ &\leq C_\delta \cdot \frac{1}{T^{p(m)}} \cdot T^{(p(m)-1)(m-2)} \int\limits_{|u_2|>\delta/m} \frac{1}{|u_2|^{p(m)}}\, du_2 \leq M_\delta. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Аналогично,

$$I_1^{(j)} \leq M_\delta, \qquad j = 3, \dots, m-1. \tag{4.9}$$

Теперь, заметим, что в интеграле $I_1^{(m)}$ мы имеем, что $|u_1+\ldots+u_{m-1}|>\delta/m$,.
Следовательно, согласно (4.5)

$$I_1^{(m)} \le C_\delta \cdot \frac{1}{T^{p(m)}} \int\limits_{|u_1|>\delta} D_T^{p(m)}(u_1)\cdots D_T^{p(m)}(u_{m-1})du_2\ldots du_{m-1}du_1$$

$$\le C_\delta \int\limits_{|u_1|>\delta} \frac{1}{|u_1|^{p(m)}}du_1 \le M_\delta. \tag{4.10}$$

Из (4.6) – (4.10) получим (4.4). Лемма 4.3доказана.

Доказательство следующей леммы можно найти в [16], стр. 161.

Лемма 4.4. *Пусть* $0<\beta<1$, $0<\alpha<1$, *и* $\alpha+\beta>1$. *Тогда для любого* $y\in\mathbb{R}$, $y\neq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|^\alpha|x+y|^\beta}dx = \frac{M}{|y|^{\alpha+\beta-1}},$$

где M *– постоянная, зависящая от* α *и* β.

Обозначим $E=\{(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^n : |u_i|\le 1,\ i=1,2,\ldots,n\}$ и $E^C=\mathbb{R}^n\setminus E$.
Доказательства следующих трех лемм можно найти в [14].

Лемма 4.5. *Пуст* $0<\alpha\le 1$ *и* $\frac{n}{n+1}<\beta<\frac{n+\alpha}{n+1}$. *Тогда*

$$B_i := \int_E \frac{|u_i|^\alpha}{|u_1\cdots u_n(u_1+\cdots+u_n)|^\beta}du_1\cdots du_n<\infty, \quad i=1,\ldots,n.$$

Лемма 4.6. *Пусть* $\frac{n}{n+1}<\beta<1$. *Тогда*

$$I := \int_{E^C} \frac{1}{|u_1\cdots u_n(u_1+\cdots+u_n)|^\beta}du_1\cdots du_n<\infty.$$

Лемма 4.7. *Пусть* $p>1$, $0<\sigma<1/p$ *и пусть* $f(\lambda)$ *– дифференцируемая на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *функция такая, что для некоторой константы* $M>0$

$$|f(\lambda)| \le \begin{cases} M|\lambda|^{-\sigma} & \text{при } |\lambda|\le 1 \\ M|\lambda|^{-\delta} & \text{при } |\lambda|>1 \end{cases}, \qquad |f'(\lambda)| \le \begin{cases} M|\lambda|^{-\sigma-1} & \text{при } |\lambda|\le 1 \\ M|\lambda|^{-\delta-1} & \text{при } |\lambda|>1 \end{cases}. \tag{4.11}$$

Тогда $f\in \mathrm{Lip}(p,1/p-\sigma)$.

5. Доказательства теорем 3.1 - 3.5

Мы докажем только результаты, касающиеся теплицевых операторов (теоремы 3.1 - 3.5). Соответствующие результаты о теплицевых матрицах (теоремы 2.1 - 2.5) доказываются аналогично.

Доказательство теоремы 3.1. Мы начнем с утверждения **(A2)**. В силу леммы 4.2, 3) и 4.3, b), имеем: $\Delta(T)=(2\pi)^{m-1}|R(T)|$, где

$$R(T)=\int_{\mathbb{R}^{m-1}}[\Psi(\mathbf{u})-\Psi(\mathbf{0})]\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u}.$$

Из (4.3) следует, что функция $\Psi(\mathbf{u})$ принадлежит $L^{m-2}(\mathbb{R}^{m-1})$ и непрерывна в точке $\mathbf{0} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ можем найти $\delta > 0$ такое, что

$$|\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)| < \frac{\varepsilon}{C_1}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{E}_\delta, \tag{5.1}$$

где C_1 постоянная из леммы Lemma 4.3, a). Рассмотрим разложение $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ такое, что

$$\|\Psi_1\|_{L^{m-2}} \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{M_\delta}} \quad \text{и} \quad \|\Psi_2\|_\infty < \infty, \tag{5.2}$$

где M_δ определена в лемме 4.3, d).

Заметим, что $\frac{1}{m-2} + \frac{1}{p(m)} = 1$, где $p(m) = \frac{m-2}{m-3}$. Поэтому применив лемму 4.3 и (5.1), (5.2), при достаточно большом T будем иметь, что

$$\begin{aligned} |R(T)| \;&\le\; \int_{\mathbb{E}_\delta} |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + C_m \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Psi_1(\mathbf{u})||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\ &+\; \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Psi_2(\mathbf{u}) - \Psi(0)||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \le \frac{\varepsilon}{C_1}\int_{\mathbb{E}_\delta} |\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\ &+\; \|\Psi_1\|_{L^{m-2}} \left[\int_{\mathbb{E}_\delta^c} \Phi_T^{p(m)}(\mathbf{u})d\mathbf{u}\right]^{1/p(m)} + C_2 \int_{\mathbb{E}_\delta^c} |\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \le 3\,\varepsilon, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение (A2).

Доказательство **(A1)**. Согласно (A2) достаточно доказать, что функция

$$\varphi(\mathbf{u}) := \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\lambda)h_2(\lambda - u_1)h_3(\lambda - u_2)\cdots h_m(\lambda - u_{m-1})\,d\lambda, \tag{5.3}$$

где $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, принадлежит $L^{m-2}(\mathbb{R}^{m-1})$ и непрерывна в $\mathbf{0} = (0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^{m-1}$, при условии, что

$$h_i \in L^1(\mathbb{R}) \bigcap L^{p_i}(\mathbb{R}), \quad 1 \le p_i \le \infty, \quad i = 1,\ldots m, \quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \le 1. \tag{5.4}$$

Применив неравенство Гельдера, из (5.3) и (5.4) получаем

$$|\varphi(\mathbf{u})| \le \prod_{i=1}^m \|h_i\|_{L^{p_i}} < \infty, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Следовательно, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^{m-1})$. С другой стороны, из условия $h_i \in L^1(\mathbb{R})$ и (5.3) следует, что $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^{m-1})$. Значит $\varphi \in L^{m-2}(\mathbb{R}^{m-1})$.

Для доказательства непрерывности $\varphi(\mathbf{u})$ в точке $\mathbf{0}$ рассмотрим три случя.

Случай 1. $p_i < \infty, \quad i = 1,\ldots,m.$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ можем найти $\delta > 0$ такое, что (см. (5.4))

$$\|h_i(\lambda - u) - h_i(\lambda)\|_{L^{p_i}} \le \varepsilon, \quad i = 2,\ldots,m, \quad \text{при} \quad |u| \le \delta. \tag{5.5}$$

Фиксируем $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_{m-1})$ с $|\mathbf{u}| < \delta$ и положим

$$\overline{h}_i(\lambda) = h_i(\lambda - u_{i-1}) - h_i(\lambda), \quad i = 2,\ldots,m.$$

Тогда, в силу (5.3),

$$\varphi(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}} h_1(\lambda) \prod_{i=2}^{m} \left(\overline{h}_i(\lambda) + h_i(\lambda)\right) d\lambda = \varphi(0) + W.$$

Из (5.5) следует, что $\|\overline{h}_i\|_{L^{p_i}} \le \varepsilon$, $i = 2, \dots, m$. Заметим, что каждый из интегралов, составляющих W, содержит по крайней мере одну функцию $\overline{h}_i$ и, может быть оценен следующим образом:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h_1(u)\overline{h}_2(\lambda)h_3(\lambda)\dots h_{m-1}(\lambda)d\lambda\right| \le \|h_1\|_{L^{p_1}}\|\overline{h}_2\|_{L^{p_2}}\|h_3\|_{L^{p_3}}\dots\|h_m\|_{L^{p_m}} \le C\cdot\varepsilon.$$

Случай 2. $p_i \le \infty$, $i = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} < 1$.

Существуют числа $p_i' < p_i$, $i = 1, \dots, m$, такие, что $\sum_{i=1}^{m} 1/p_i' \le 1$. Тогда, в силу (5.4) мы имеем, что $h_i \in L^{p_i'}(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, m$, и функция φ непрерывна в $\mathbf{0}$, как и в случае 1.

Случай 3. $p_i \le \infty$, $i = 1, \dots, m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$.

Сначала заметим, что по крайней мере одно из p_i конечно. Без ограничения общности можем считать, что $p_1 < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдем функции h_1', h_1'' такие, что

$$h_1 = h_1' + h_1'', \quad h_1' \in L^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \|h_1''\|_{L^{p_1}} < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Тогда,

$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi'(\mathbf{u}) + \varphi''(\mathbf{u}),$$

где функции φ' и φ'' определены так, как функция φ в (5.3) с h_1' и h_1'', вместо h_1 соответсвенно. Из (5.6) следует, что функция φ' непрерывна в $\mathbf{0}$ (см. Случай 2), а с учетом неравенства Гельдера, $|\varphi''(\mathbf{u})| \le C\cdot\varepsilon$. Следовательно, при достаточно малом $|\mathbf{u}|$ будем иметь

$$|\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{0})| \le |\varphi'(\mathbf{u}) - \varphi'(\mathbf{0})| + |\varphi''(\mathbf{u}) - \varphi''(\mathbf{0})| \le (C+1)\varepsilon.$$

Теорема 3.1 доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Мы начнем с утверждения (B1). Сначала заметим, что из условия $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbb{R})$ следует, что для некоторой константы $A > 0$,

$$\hat{h}_i \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{и} \quad |\hat{h}_i(t)| \le A, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{5.7}$$

В силу леммы 4.2 имеем:

$$T\cdot S(T) = \int_0^T \dots \int_0^T \hat{h}_1(u_1 - u_2)\hat{h}_2(u_2 - u_3)\dots\hat{h}_m(u_m - u_1)du_1\dots du_m.$$

Сделав замену переменных

$$u_1 - u_2 = t_1, \quad u_2 - u_3 = t_2, \dots, u_{m-1} - u_m = t_{m-1},$$

и учитывая, что $t_1 + \dots + t_{m-1} = u_1 - u_m$, получим (ниже мы пользуемся обозначением $\mathbf{t}_{m-1} = (t_1, \dots, t_{m-1})$ и $d\mathbf{t}_{m-1} = dt_1 \cdots dt_{m-1}$):

$$T\cdot S(T) = \int_0^T \int_{u_m - t_1 - \dots - t_{m-1} - T}^{u_m - t_1 - \dots - t_{m-1}} \int_{u_m - t_1 - \dots - t_{m-2} - T}^{u_m - t_1 - \dots - t_{m-2}} \dots \tag{5.8}$$

$$\cdots \int_{u_m-t_1-T}^{u_m-t_1} \hat{h}_1(t_1)\cdots\hat{h}_{m-1}(t_{m-1})\hat{h}_m(-t_1-\ldots-t_{m-1})dt_{m-1}du_m$$

$$= \int_{-T}^{T}\cdots\int_{-T}^{T} \hat{h}_1(t_1)\cdots\hat{h}_{m-1}(t_{m-1})\hat{h}_m(-t_1-\ldots-t_{m-1})\left[T - l(\mathbf{t}_{m-1})\right]d\mathbf{t}_{m-1},$$

где

$$(5.9) \qquad |l(\mathbf{t}_{m-1})| = |l(t_1,\ldots,t_{m-1})| \le 2\left(|t_1|+\ldots+|t_{m-1}|\right).$$

С другой стороны, в силу (3.3) и равенства Парсеваля, мы имеем:

$$(5.10) \quad M := M_{\mathbb{R},\mathcal{H}} = (2\pi)^{m-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\prod_{i=1}^{m} h_i(\lambda)\right]d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_1(t_1)\cdots\hat{h}_{m-1}(t_{m-1})\hat{h}_m(-t_1-\ldots-t_{m-1})d\mathbf{t}_{m-1}.$$

Из (3.3), (5.8) и (5.10) следует, что

$$S(T) - M := S_{W,\mathcal{H}}(T) - M_{\mathbb{R},\mathcal{H}}$$

$$= -\frac{1}{T}\int_{[-T,T]^{m-1}} \hat{h}_1(t_1)\cdots\hat{h}_{m-1}(t_{m-1})\hat{h}_m(-t_1-\ldots-t_{m-1})l(\mathbf{t}_{m-1})d\mathbf{t}_{m-1}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^{m-1}\setminus[-T,T]^{m-1}} \hat{h}_1(t_1)\cdots\hat{h}_{m-1}(t_{m-1})\hat{h}_m(-t_1-\ldots-t_{m-1})d\mathbf{t}_{m-1}$$

$$(5.11) \quad =: \Delta_T^1 + \Delta_T^2.$$

Из (5.7), (5.9) и (5.11) получаем

$$(5.12) \qquad |T\cdot\Delta_T^1| \le 2A\sum_{i=1}^{m-1}\int_{\mathbb{R}^{m-1}}\left|\hat{h}_1(t_1)\cdots\hat{h}_{m-1}(t_{m-1})t_i\right|d\mathbf{t}_{m-1} =: A_1 < \infty,$$

так как $h_i \in \mathcal{F}_1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Далее, заметим, что

$$\mathbb{R}^{m-1}\setminus[-T,T]^{m-1} \subset \bigcup_{i=1}^{m}\left\{(t_1,\ldots,t_{m-1})\in\mathbb{R}^{m-1} : |t_i| > T\right\} =: \bigcup_{i=1}^{m} E_i.$$

Значит, в силу (5.7) и (5.11),

$$(5.13) \qquad |T\cdot\Delta_T^2| \le 2A\sum_{i=1}^{m-1}\int_{E_i}\left|\hat{h}_1(t_1)\ldots\hat{h}_{m-1}(t_{m-1})t_i\right|d\mathbf{t}_{m-1} =: A_2 < \infty.$$

Из (5.11) - (5.13) вытекает **(B1)**.

Доказательство **(B2)**. В силу леммы 4.2, 3), леммы 4.3, b), и (3.3) имеем

$$(5.14) \quad \Delta(T) = (2\pi)^{m-1}\left|\int_{\mathbb{R}^{m-1}}[\Psi(\mathbf{u})-\Psi(\mathbf{0})]\Phi_T(\mathbf{u})d\mathbf{u}\right|, \quad \mathbf{0} = (0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{m-1}.$$

Из (3.7) и (4.3) следует, что для $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_{m-1})\in\mathbb{R}^{m-1}$

$$(5.15) \qquad |\Psi(\mathbf{u})-\Psi(\mathbf{0})| \le (m-1)C\left(|u_1|^\gamma+\cdots+|u_{m-1}|^\gamma\right).$$

Пусть $\varepsilon \in (0,\gamma)$. Применив лемму 4.1 с $\delta = \frac{1+\varepsilon-\gamma}{m}$, и учитывая (5.14) и (5.15), будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta(T) &\le C_m \int_E |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} + C_m \int_{E^C} |\Psi(\mathbf{u}) - \Psi(\mathbf{0})||\Phi_T(\mathbf{u})|d\mathbf{u} \\ &\le \frac{C_m}{T^{1-m\delta}} \sum_{i=1}^{m-1} \int_E \frac{|u_i|^\gamma}{|u_1\cdots u_{m-1}(u_1+\cdots+u_{m-1})|^{1-\delta}}\, du_1\cdots du_{m-1} \qquad (5.16) \\ &+ 2\|\varphi\|_\infty \frac{C_m}{T^{1-m\delta}} \int_{E^C} \frac{1}{|u_1\cdots u_{m-1}(u_1+\cdots+u_{m-1})|^{1-\delta}}\, du_1\cdots du_{m-1}, \end{aligned}$$

где $E = \{(u_1,u_2,\ldots,u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}\colon |u_i| \le 1,\ i=1,2,\ldots,m-1\}$ и $E^C = \mathbb{R}^{m-1}\setminus E$. Так как

$$\frac{m-1}{m} < 1-\delta < \frac{m-1+\gamma}{m},$$

мы можем применить леммы 4.5 и 4.6 с $\alpha=\gamma$, $n=m-1$ и $\beta = 1-\delta$ и заключить, что все интегралы в (5.16) конечны. Так как $1-m\delta = \gamma-\varepsilon$, из (5.16) следует утверждение (B2).

Доказательство **(B3)**. Согласно (B2) достаточно доказать, что функция

$$(5.17)\quad \varphi(\mathbf{u}) := \int_{\mathbb{R}} h_1(\lambda)h_2(\lambda-u_1)\cdots h_m(\lambda-u_{m-1})d\lambda,\ \mathbf{u}=(u_1,\cdots,u_{m-1})\in\mathbb{R}^{m-1},$$

принадлежит $L^\infty(\mathbb{R}^{m-1})$, и при некоторой постоянной $C>0$

$$(5.18)\qquad |\varphi(\mathbf{u})-\varphi(\mathbf{0})| \le C|\mathbf{u}|^\gamma, \quad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^{m-1},$$

при условии, что

$$(5.19)\qquad h_i \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R};p_i,\gamma),\quad 1\le p_i\le\infty,\quad i=1,2,\ldots,m,\quad \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} \le 1.$$

В силу неравенства Гельдера и (5.19) получаем

$$|\varphi(\mathbf{u})| \le \prod_{i=1}^m ||h_i||_{L^{p_i}} < \infty, \quad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^{m-1}.$$

Следовательно, $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R}^{m-1})$.

Для доказательства (5.18) фиксируем $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_{m-1})\in\mathbb{R}^{m-1}$ и положим

$$(5.20)\qquad \overline{h}_i(\lambda) = h_i(\lambda-u_{i-1}) - h_i(\lambda), \quad \lambda\in\mathbb{R}, \quad i=2,\ldots,m.$$

Так как $h_i\in\mathrm{Lip}(\mathbb{R};p_i,\gamma)$, мы имеем

$$(5.21)\qquad \|\overline{h}_i\|_{L^{p_i}} \le C_i|\mathbf{u}|^\gamma, \quad i=2,\ldots,m.$$

В силу (5.17) и (5.20),

$$\varphi(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}} h_1(\lambda)\prod_{i=2}^m \left(\overline{h}_i(\lambda)+h_i(\lambda)\right)d\lambda = \varphi(\mathbf{0}) + W.$$

Каждый из $(2^{m-1}-1)$ интегралов, составляющих W содержит по крайней мере одну функцию $\overline{h}_i$, и с учетом (5.21), может быть оценена следующим образом:

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h_1(\lambda)\overline{h}_2(\lambda)h_3(\lambda)\cdots h_m(\lambda)d\lambda\right| \le \|h_1\|_{L^{p_1}}\|\overline{h}_2\|_{L^{p_2}}\|h_3(u)\|_{L^{p_3}}\cdots\|h_m\|_{L^{p_m}} \le C|\mathbf{u}|^\gamma,$$

что доказывает (B3).

Доказательство (**B4**). Положим

$$\frac{1}{p_i} := \sigma_i + \frac{1}{m}\left[1-(\sigma_1+\cdots\sigma_m)\right], \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Тогда,

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{1}{p_i} - \sigma_i = \frac{1}{m}\left[1-(\sigma_1+\cdots\sigma_m)\right] = \gamma > 0, \qquad i=1,2,\ldots,m,$$

и

$$0 < \sigma_i < \frac{1}{p_i} < 1 < \delta_i, \qquad i=1,2,\ldots,m.$$

Значит, с учетом леммы 4.7, $h_i \in \mathrm{Lip}(p_i,\gamma)$, $i=1,2,\ldots,m$. Применив (B3), получим (3.10), где γ определена в (3.11).

Доказательство теоремы 3.3. Заметим, что в силу леммы 7 из [14]

$$S_{2,W}(T) := \frac{1}{T}\mathrm{tr}[W_T(h_1)W_T(h_2)] = 2\pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F_T(s-t)h_1(s)h_2(t)\,dt\,ds, \tag{5.22}$$

где $F_T(u)$ – ядро Фейера:

$$F_T(u) = \frac{1}{2\pi T}\left(\frac{\sin Tu/2}{u/2}\right)^2, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Нам потребуются следующие свойства $F_T(u)$ (см., напр., [5]):

$$\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\,du = 1, \tag{5.23}$$

$$\int_{u\ge 1} F_T(u)du \le C\,T^{-1}, \tag{5.24}$$

$$\int_0^1 F_T(u)u^\alpha du \le \begin{cases} CT^{-\alpha}, & \text{если} \quad \alpha<1 \\ CT^{-1}\ln T, & \text{если} \quad \alpha=1 \\ CT^{-1}, & \text{если} \quad \alpha>1. \end{cases} \tag{5.25}$$

Так как функция $F_T(u)$ четная, с учетом (5.22) имеем:

$$S_{2,W}(T) = \pi\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\left[h_1(u+t)h_2(t)+h_1(t)h_2(u+t)\right]du\,dt. \tag{5.26}$$

Следовательно, учитывая (5.23), (5.26) и равенство

$$\int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(t)dt = \int_{\mathbb{R}} h_1(u+t)h_2(u+t)dt,$$

получим

$$\Delta_{2,W}(T): \quad = \quad \left|\frac{1}{T}\mathrm{tr}[W_T(h_1)W_T(h_2)] - 2\pi\int_{\mathbb{R}} h_1(t)h_2(t)\,dt\right|$$

$$(5.27) \qquad = \quad \left|\pi\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\int_{\mathbb{R}}(h_1(t)-h_1(u+t))(h_2(u+t)-h_2(t))dtdu\right|.$$

Применив неравенство Гельдера, из (5.27) находим

$$(5.28) \quad \Delta_{2,W}(T) \le \pi\int_{\mathbb{R}} F_T(u)\|h_1(u+\cdot)-h_1(\cdot)\|_{L^{p_1}}\|h_2(u+\cdot)-h_2(\cdot)\|_{L^{p_2}}du$$

и, согласно (5.28),

$$(5.29)\ \Delta_{2,W}(T) \le C_1\int_0^1 F_T(u)|u|^{\gamma_1+\gamma_2}du + C_2\|h_1\|_{L^{p_1}}\|h_2\|_{L^{p_2}}\int_{u>1} F_T(u)du.$$

Из (5.24), (5.25) и (5.29) получим утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 3.4. В силу леммы 4.7, в предположениях теоремы имеем, что $h_i \in \mathrm{Lip}(p_i, 1/p_i - \sigma_i)$, $i = 1, 2$. Поэтому, применив теорему 3.3 с $\gamma_i = 1/p_i - \sigma_i$, получим (3.13).

Доказательство теоремы 3.5. Заметим, что если $\psi \in B_2^{1/2}(\mathbb{R})$, то при $T \to \infty$,

$$(5.30) \qquad \int_{|t|>T}|\widehat{\psi}(t)|^2dt = O(1/T) \quad \text{и} \quad \int_{-T}^{T}|t||\widehat{\psi}(t)|^2dt = O(1).$$

Далее, в силу (5.22) и равенства Парсеваля,

$$(5.31) \qquad \Delta_{2,W}(T) = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}|t|\widehat{h}_1(t)\widehat{h}_2(t)dt + \int_{|t|>T}\widehat{h}_1(t)\widehat{h}_2(t)dt.$$

Следовательно, применив неравенство Шварца для к интегралам в правой части (5.31), и используя (5.30), для функций h_1 и h_2, получим (3.14).

6. Примеры

В этом параграфе мы пользуемся следующими обозначениями: $m = 2\nu$,

$$h_1(\lambda) = h_3(\lambda) = \cdots = h_{2\nu-1}(\lambda) := f_1(\lambda), \qquad h_2(\lambda) = h_4(\lambda) = \cdots = h_{2\nu}(\lambda) := f_2(\lambda),$$

и

$$S_{\nu,A}(T) = \frac{1}{T}\mathrm{tr}[A_T(f_1)A_T(f_2)]^{\nu},$$

$$\Delta_{\nu,A}(T) := \left|\frac{1}{T}\mathrm{tr}[A_T(f_1)A_T(f_2)]^{\nu} - (2\pi)^{2\nu-1}\int_{\Lambda}[f_1(\lambda)f_2(\lambda)]^{\nu}\,d\lambda\right|,$$

где либо $A_T(f_i) = B_T(f_i)$ и $\Lambda = \mathbb{T}$, либо $A_T(f_i) = W_T(f_i)$ и $\Lambda = \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Пример 6.1. Пусть $f_i(\lambda) = |\lambda|^{-\alpha_i}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2$, с $0 < \alpha_i < 1$ и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 < 1/\nu$. Легко видеть, что условия теоремы 2.2 (B5) выполнены и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$(6.1) \qquad \Delta_{\nu,B}(T) = O\left(T^{-1/(2\nu)+\alpha/2+\varepsilon}\right) \quad \textit{при} \quad T \to \infty.$$

Пример 6.2. Пусть $f_i(\lambda) = \frac{\sigma_i^2}{2\pi}\left|1-e^{i\lambda}\right|^{-2d_i}$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, 2$, с $0 < \sigma_i^2 < \infty$ и $0 < d_i < 1/2$. Тогда при $d = d_1 + d_2 < 1/2$ для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\Delta_{\nu,B}(T) = O\left(T^{-1/(2\nu)+d+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Действительно, предположив, что $\lambda \in (0, \pi]$ (случай $\lambda \in [-\pi, 0)$ рассматривается аналогично), и учитывая равенство $|1-e^{i\lambda}| = 2\sin(\lambda/2)$, получим, что для $i = 1, 2$

$$f_i(\lambda) = \frac{\sigma_i^2}{2\pi} \cdot 2^{-2d_i}\left[\sin\frac{\lambda}{2}\right]^{-2d_i},$$

$$f_i'(\lambda) = \frac{\sigma_i^2}{2\pi} \cdot \left[-2d_i 2^{-2d_i-1}\left(\sin\frac{\lambda}{2}\right)^{-2d_i-1} \cos\frac{\lambda}{2}\right].$$

Ясно, что условия теоремы 2.2 (B5) выполняются с $\alpha_i = 2d_i$ и $M_{1i} = M_{2i} = \sigma_i^2$, $i = 1, 2$, и мы получим (6.1).

Пример 6.3. Пусть $f_1(\lambda) = |\lambda|^{-2\alpha}(1+\lambda^2)^{-\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, с $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1/(2p)$ при $p \geq 1$ и $\alpha + \beta > 1/2$, и пусть $f_2(\lambda) = g(\lambda)$ действительная, четная, интегрируемая функция из класса $\mathrm{Lip}(q, 1/p - 2\alpha)$ с $1/p + 1/q \leq 1/\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. Тогда для $\varepsilon > 0$

$$\Delta_{\nu,W}(T) = O\left(T^{-1/p+2\alpha+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Действительно, заметим, что

$$f_1'(\lambda) = -\frac{2\alpha + 2(\alpha+\beta)\lambda^2}{\lambda^{2\alpha+1}(1+\lambda)^{\beta+1}}. \tag{6.2}$$

Следовательно, функции f_1 и f_1' удовлетворяют условиям (4.11) с $\sigma = 2\alpha$ и $\delta = 2\alpha + 2\beta$. Тогда, по лемме 4.7, $f_1(\lambda) \in \mathrm{Lip}(p, 1/p - 2\alpha)$, и остается применить теорему 3.2 (B3).

Пример 6.4. Пусть $f_i(\lambda) = |\lambda|^{-2\alpha_i}(1+\lambda^2)^{-\beta_i}$ с $0 < \alpha_i < 1/2$ и $\alpha_i + \beta_i > 1/2$, $i = 1, 2$. Тогда, при $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 < 1/(2\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\Delta_{\nu,W}(T) = O\left(T^{-\frac{1}{2\nu}+\alpha+\varepsilon}\right) \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

Действительно, в силу (6.2) функции f_1 и f_2 удовлетворяют условиям теоремы 3.2 (B4) с $\sigma_i = 2\alpha_i$ и $\delta_i = 2\alpha_i + 2\beta_i$, $i = 1, 2$.

Abstract. The paper is devoted to the problem of approximation of the traces of products of truncated Toeplitz operators and matrices generated by integrable real symmetric functions defined on the real line (resp. on the unit circle), and estimation of the corresponding errors. These approximations and the corresponding error bounds are of importance in the statistical analysis of continuous- and discrete-time stationary processes (asymptotic distributions and large deviations of Toeplitz type quadratic functionals and forms, parametric and nonparametric estimation, etc.) We review and summarize the known results concerning the trace approximation problem and prove some new results.

Список литературы

[1] Avram, F., "On bilinear forms in Gaussian random variables and Toeplitz matrices", Probab. Theory Related Fields, **79**, 37–45 (1988).

[2] Bentkus, R., "On the error of the estimate of the spectral function of a stationary process", Lit. Mat. Sb. **12**, 55–71 (1972).

[3] Böttcher, A., Silbermann, B., Analysis of Toeplitz Operators (2nd ed.). Springer-Verlag, Berlin (2005).

[4] Bryc, W. and Dembo, A., "Large deviations for quadratic functionals of Gaussian processes", J. Theoret. Probab. 10, 307–332 (1997)

[5] Butzer, P.L., Nessel, R.J., Fourier Analysis and Approximation I. Academic Press, New York (1971).

[6] Dahlhaus, R., "Efficient parameter estimation for self-similar processes", Ann. Statist. **17**, 1749–1766 (1989).

[7] Fox, R., Taqqu, M.S., "Central limit theorem for quadratic forms in random variables having long-range dependence", Probab. Theory R elated Fields **74**, 213–240 (1987).

[8] Ginovyan, M.S., "Asymptotically efficient nonparametric estimation of functionals on spectral density with zeros", Theory Probab. Appl. **33**, 315–322 (1988).

[9] Ginovian, M.S., "On estimate of the value of the linear functional in a spectral density of stationary Gaussian process", Theory Probab. Appl. **33**, 777–781 (1988).

[10] Ginovian, M.S., "On Toeplitz type quadratic functionals in Gaussian stationary process", Probab. Theory Related Fields **100**, 395–406 (1994).

[11] Гиновян, М. С., "Асимптотические свойства спектральных оценок стационарных гауссовских процессов", Известия Национальной Академии Наук Армении, серия Математика, **30**, 1–17 (1995).

[12] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "On the central limit theorem for Toeplitz quadratic forms of stationary sequences", Theory Probab. Appl. **49**, 612–628 (2005).

[13] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "Limit theorems for Toeplitz quadratic functionals of continuous-time stationary process", Probab. Theory Related Fields **138**, 551–579 (2007).

[14] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "Trace approximations of products of truncated Toeplitz operators", Theory Probab. Appl. **56** (1), 57–71 (2012).

[15] Ginovyan, M.S., Sahakyan, A.A., "On the trace approximations of products of Toeplitz matrices", Statist. Probab. Lett. **83** (3), 753-760 (2013).

[16] Giraitis, L., Koul, H., Surgailis, D., Large Sample Inference for Long Memory Processes, Imperial College Press, London (2012).

[17] Giraitis, L., Surgailis, D., "A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotical normality of Whittle's estimate", Probab. Theory Related Fields, **86**, 87–104 (1990).

[18] Gohberg, I.C., Krein, M.G. Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space. American Mathematical Society (1969).

[19] Grenander, U., Szegö, G., Toeplitz Forms and Their Applications. University of California Press, Berkeley and Los Angeles (1958).

[20] Ibragimov, I.A., "On estimation of the spectral function of a stationary Gaussian process", Theory Probab. Appl. **8**, 366–401 (1963).

[21] Kac, M., "Toeplitz matrices, translation kernels and a related problem in probability theory", Duke Math. J. **21**, 501–509 (1954).

[22] Lieberman, O., Philips, A., "Error bounds and asymptotic expansions for Toeplitz product functionals of unbounded spectra", J. Time Ser. Anal. **25**, 733–753 (2004).

[23] Rosenblatt M., "Asymptotic behavior of eigenvalues of Toeplitz forms", J. Math. and Mech. **11**, 941–950 (1962).

[24] Taniguchi, M., "On the second order asymptotic efficiency of estimators of Gaussian ARMA processes", Ann. Statist. **11**, 157–169 (1983).

[25] Taniguchi, M., Kakizawa, Y., Asymptotic Theory of Statistical Inference for Time Series. Academic Press, New York (2000).

Поступила 22 апреля 2013