Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 101-111.

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ КВАЗИПОЛИНОМОВ ИЗ СИСТЕМЫ МЮНТЦА

А. К. ТАСЛАКЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *math@ysu.am*

Аннотация. Л. Шварцом получены оценки коэффициентов квазиполиномов по системе Мюнтца. В настоящей работе получены точечные оценки для обобщенных производных таких квазиполиномов на интервале $[0, 1]$.

MSC2010 number: 42C05.

Ключевые слова: Система Мюнтца; квазиполином; обобщенная производная; оценка Марковского типа.

1. Постановка задачи и аппарат ее решения

Рассмотрим квазиполином из системы Мюнтца

$$P_n(x) = a_0 + a_1x^{\gamma_1} + \cdots + a_nx^{\gamma_n}, \tag{1.1}$$

где

$$0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu} = +\infty, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_\nu^2} < +\infty \tag{1.2}$$

Л. Шварцем [1] получена неулучшаемая оценка для коэффициентов квазиполиномов (1.1) при условии

$$\|P_n\|_{L_2(0,1)} \le M_n. \tag{1.3}$$

Им же получены менее точные оценки при условии

$$\|P_n\|_{L_p(0,1)} \le M_n, \quad 1 \le p \le +\infty.$$

Для заданной функции $\varphi(x)$, $x > 0$ определим ее так называемые обобщенные производные (см. [3], стр. 4)

$$\varphi^{[0]}(x) = \varphi(x),\ \varphi^{[1]}(x) = \varphi'(x), \ldots, \varphi^{[k+1]}(x) = \left(\frac{\varphi^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}}\right)', \ldots \tag{1.4}$$

$$\varphi^{<k>}(x) = \varphi^{[k]}(x) \cdot x^{1-\gamma_k+\gamma_{k-1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \gamma_{-1} = -1$$

Из (1.1) и (1.4) следует, что коэффициенты $a_k,\ k=0,1,\dots n$, определяются так:

$$a_k = P_n^{<k>}(0+)/\prod_{\nu=0}^{k-1}(\gamma_k-\gamma_\nu), \quad k=0,1,2,\dots \tag{1.5}$$

(здесь и в дальнейшем мы считаем, что $\prod_{\nu=s}^{s-1} h_\nu := 1$). Значит, Л. Шварцем в [1] фактически были оценены сверху величины $\left|P_n^{<k>}(0+)\right|,\quad k=0,1,\dots n$. Возникает естественный вопрос: оценить сверху $\left|P_n^{<k>}(x)\right|$ в любой точке $x\in[0,1]$. Для решения этой задачи метод Шварца не применим. Основным аппаратом исследования рассматриваемого вопроса служит введенная в [4] система следующих квазиполиномов по системе Мюнтца, являющаяся обобщением системы полиномов Лежандра:

$$\hat{\chi}_n(x) = \frac{\sqrt{2\gamma_n+1}}{2\pi i}\int_C \prod_{\nu=0}^{n}\frac{z-\gamma_\nu'}{z+\gamma_\nu}\cdot\frac{x^{-z}dz}{z-\gamma_n'}, \quad x\in[0,1], \quad \gamma_\nu' = \gamma_\nu+1 \tag{1.6}$$

где контур C- здесь и в аналогичных случаях в дальнейшем охватывает окрестности полюсов подынтегральной функции (см. [4], стр. 8). В работе [4] доказано, что система функций $\{\hat{\chi}_n(x)\}$ ортонормальна на $L^2[0,1]$.

Квазиполином (1.1) единственным образом представляется в виде суммы

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k\hat{\chi}_k(x), \quad \text{где} \quad C_k = \int_0^1 P_n(t)\hat{\chi}_k(t)dt, \qquad k=0,1,\dots n, \tag{1.7}$$

и согласно (1.4),

$$P_n^{[s]}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k\hat{\chi}_k^{[s]}(x), \qquad P_n^{<s>}(x) = \sum_{k=s}^{n} C_k\hat{\chi}_k^{<s>}(x), \qquad 0\le s\le n. \tag{1.8}$$

Учитывая, что при условии (1.3)

$$\left(\sum_{k=s}^{n} C_k^2\right)^{\frac12} = \|P_n\|_{L_2(0,1)} \le M_n,$$

и применив к (1.8) неравенство Буняковского-Шварца, получим

$$|P_n^{<s>}(x)| \le \left(\sum_{k=s}^{n} C_k^2\right)^{\frac12}\left(\sum_{k=s}^{n}|\hat{\chi}_k^{<s>}(x)|^2\right)^{\frac12} \le M_n\left(\sum_{k=s}^{n}|\hat{\chi}_k^{<s>}(x)|^2\right)^{\frac12}. \tag{1.9}$$

Для оценки сверху $|P_n^{<s>}(x)|$ сначала заметим, что при $x\in[0,1]$,

$$\hat{\chi}_k^{[s]}(x) = \frac{(-1)^s\sqrt{2\gamma_k+1}}{2\pi i}\int_C \frac{\prod_{\nu=0}^{k}(z-\gamma_\nu')}{\prod_{\nu=s}^{k}(z+\gamma_\nu)}\cdot\frac{x^{-z-\gamma_{s-1}-1}}{z-\gamma_k'}dz,$$

$$\hat{\chi}_k^{<s>}(x) = x^{\gamma_s}\frac{(-1)^s\sqrt{2\gamma_k+1}}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{k}(z-\gamma_\nu')}{\prod\limits_{\nu=s}^{k}(z+\gamma_\nu)}\cdot\frac{x^{-z}}{z-\gamma_k'}dz,$$

при этом, $\chi_k^{<s>}(0) = \lim\limits_{x\to 0}\chi_k^{<s>}(x)$. Согласно равенству Р. Лагранжа, имеем

$$\sum_{k=s}^{n}(\gamma_k+\gamma_k')\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{k-1}(z-\gamma_\nu')(z_1-\gamma_\nu')}{\prod\limits_{\nu=s}^{k}(z+\gamma_\nu)(z_1+\gamma_\nu)} = [R_{n,s}(z,z_1)-R_{0,s}(z,z_1)]\,\frac{1}{1-z-z_1},$$

где

$$R_{n,s}(z,z_1) = \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z-\gamma_\nu')(z_1-\gamma_\nu')}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z+\gamma_\nu)(z_1+\gamma_\nu)},\quad R_{0,s}(z,z_1) = \prod_{\nu=0}^{s-1}(z-\gamma_\nu')(z_1-\gamma_\nu').$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}_{n,s}^2(x) := \sum_{k=s}^{n}\left|\hat{\chi}_k^{<s>}(x)\right|^2 = \frac{x^{-2\gamma_s}}{(2\pi i)^2}\int\limits_C\int\limits_{C_1} R_{n,s}(z,z_1)\frac{x^{-z-z_1}}{1-z-z_1}dz_1dz \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} Q_{n,s}(z)x^{-z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1'} Q_{n,s}(z_1)\frac{x^{-z_1}}{1+2\gamma_s-z-z_1}dz_1dz,$$

где

$$Q_{n,s}(z) = \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z-\gamma_s-\gamma_\nu')}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma_s+\gamma_\nu)}.$$

В контурных интегралах в (1.10) заменяя z на $-z$ и z_1 на $-z_1$, получаем $\mathcal{K}_{n,s}^2(x) =$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu'+\gamma_s)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma_\nu+\gamma_s)}x^z\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1'}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z_1+\gamma_\nu'+\gamma_s)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z_1-\gamma_\nu+\gamma_s)}\cdot\frac{x^{z_1}}{1+2\gamma_s+z+z_1}dz_1dz, \tag{1.11}$$

где контуры C', C_1' охватывают окрестности точек $\gamma_\nu-\gamma_s,\ \ \nu = s, s+1,\dots,n$.

2. Оценка сверху для $|\mathcal{K}_{n,s}(x)|$ и основная теорема

Согласно (1.9) и (1.10) нам необходимо оценить сверху $|\mathcal{K}_{n,s}(x)|$. Мы рассмотрим два случая: $x\in[0,e^{-2}]$ и $x\in[e^{-2},1]$. Начнем с рассмотрения второго случая.

Лемма 2.1. *При* $x \in [e^{-2}, 1]$, *справедливо неравенство*

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)| \le c_s \left[\sum_{\nu=1}^{n}(\gamma_\nu + \gamma_\nu')\right]^{s+\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Заметим, что функция $f(x) = x^{1+2\gamma_s}\mathcal{K}^2_{n,s}(x)$ неотрицательна и монотонно возрастает на интервале $[0,1]$, так как

$$\left(t^{2\gamma_s+1}\mathcal{K}^2_{n,s}(t)\right)' = t^{2\gamma_s}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C Q_{n,s}(z)t^z dz\right)^2 \ge 0, \qquad t \in (0,1]. \tag{2.2}$$

Поэтому $x^{1+2\gamma_s}\mathcal{K}^2_{n,s}(x) \le \mathcal{K}^2_{n,s}(1)$, при $x \in [e^{-2}, 1]$, и .

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(x) \le e^{2(2\gamma_s+1)} \cdot \mathcal{K}^2_{n,s}(1). \tag{2.3}$$

Для оценки $\mathcal{K}^2_{n,s}(1)$ в первом представлении $\mathcal{K}^2_{n,s}(x)$ в (1.10) сделав замену переменных $z = z' - \frac{1}{2}$ и $z_1 = z_1' - \frac{1}{2}$, получим, что

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(x) = x^{-2\gamma_s-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu^*)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma_\nu^*)}x^{-z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'}\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z_1+\gamma_\nu^*)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z_1-\gamma_\nu^*)}\cdot\frac{x^{-z_1}}{-z-z_1}dz_1dz \tag{2.4}$$

где $\gamma_\nu^* = \gamma_\nu + \frac{1}{2}$.

В качестве контуров C и C' соответственно возьмем $|z| = R$ и $|z_1| = 2R$, где

$$R = 6\sum_{\nu=s}^{n}\gamma_\nu^* > 3\gamma_n^*.$$

Тогда,

$$\left|\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu^*)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma_\nu^*)}\right| \le (2R)^s\prod_{\nu=s}^{n}\frac{R+\gamma_\nu^*}{R-\gamma_\nu^*}; \quad \left|\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z+\gamma_\nu^*)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z-\gamma_\nu^*)}\right| \le (4R)^s\prod_{\nu=s}^{n}\frac{2R+\gamma_\nu^*}{2R-\gamma_\nu^*}.$$

Следовательно, согласно (2.3) и (2.4) будем иметь, что

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(1) \le c^{1+2s}e^{2(2\gamma_s+1)}R^{2s+1}A_{n,s}(R),$$

где

$$A_{n,s}(R) = \prod_{\nu=s}^{n}\frac{(R+\gamma_\nu^*)(2R+\gamma_\nu^*)}{(R-\gamma_\nu^*)(2R-\gamma_\nu^*)} =$$

$$= \prod_{\nu=s}^{n}\frac{2R^2+3R\gamma_\nu^*+\gamma_\nu^{*2}}{2R^2-3R\gamma_\nu^*+\gamma_\nu^{*2}} = \prod_{\nu=s}^{n}\left(1+\frac{6R\gamma_\nu^*}{2R^2-3R\gamma_\nu^*+\gamma_\nu^{*2}}\right) <$$

$$< \exp\left(6\sum_{\nu=s}^{n}\frac{\gamma_\nu^*}{2R-3R\gamma_\nu^*}\right) < \exp\left(\frac{6}{R}\sum_{\nu=s}^{n}\gamma_\nu^*\right) = e.$$

Следовательно,

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(1) \le c_s R^{2s+1} \exp\left(2(2\gamma_s+1)\right) \le c_s \left[\sum_{\nu=s}^{n}(\gamma_\nu + \gamma'_\nu)\right]^{2s+1}.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Оценим сверху $\mathcal{K}_{n,s}(x)$ при $x \in [0, e^{-2}]$.

Лемма 2.2. *Для* $x \in [0, e^{-2}]$ *справедливо неравенство*

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)| \le c_s R_n \cdot M_{n,s}(R_n),$$

где

$$M_{n,s}(R_n) = \max_{\gamma_s \le y \le R_n} y^s \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma'_\nu + \gamma_\nu}{y^2 + a_\nu^2}\right], \tag{2.5}$$

а R_n *определяется из соотношений:*

$$R_n^{1+\alpha} > \gamma_n, \quad R_n > \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu}, \quad \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu + \gamma'_\nu}{R_n^2 + a_\nu^2} = 1, \quad a_\nu = \gamma_\nu - \gamma_s. \tag{2.6}$$

Доказательство. Из (1.11) имеем

$$\mathcal{K}^2_{n,s}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C Q^*_{n,s}(z) x^z \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} Q^*_{n,s}(z_1) x^{z_1} \frac{1}{1 + 2\gamma_s + z + z_1} dz_1 dz,$$

где

$$Q^*_{n,s}(z) = \frac{\prod\limits_{\nu=0}^{n}(z + \gamma_s + \gamma'_\nu)}{\prod\limits_{\nu=s}^{n}(z + \gamma_s - \gamma_\nu)}. \tag{2.7}$$

Так как $\hat{\chi}_k^{<s>}(x) = O(1)$ при $x \to 0$, значит

$$x^{2\gamma_s} \mathcal{K}^2_{n,s}(x) \le \sum_{k=s}^{n} [\hat{\chi}_k^{<s>}(x)]^2 = O(1)$$

и следовательно,

$$x^{2\gamma_s+1} \mathcal{K}^2_{n,s}(x) = o(1), \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{2.8}$$

Интегрируя теперь (2.2) на $(0, x)$, $x \in (0, 1)$, будем иметь

$$x^{2\gamma_s+1} \mathcal{K}^2_{n,s}(x) = \int_0^x t^{2\gamma_s} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C Q^*_{n,s}(z) t^z dz\right)^2 dt \le$$

$$\le \max_{0 \le t \le x} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C Q^*_{n,s}(z) t^z dz\right)^2 \int_0^x t^{2\gamma_s} dt,$$

откуда,

$$\mathcal{K}_{n,s}(x) \le \frac{1}{\sqrt{2\gamma_s+1}} \max_{0\le t\le x} \left| \frac{1}{2\pi} \int_C Q^*_{n,s}(z) t^z dz \right|.$$

Следовательно, при $x \in [0,1]$

$$\mathcal{K}_{n,s}(x) \le \frac{1}{\sqrt{2\gamma_s+1}} \max_{0\le t\le x} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \prod_{\nu=0}^{s-1} (z+b_\nu) \prod_{\nu=s+1}^{n} \frac{z+b_\nu}{z-a_\nu} \cdot \frac{z+b_s}{z} t^z dz \right|, \tag{2.9}$$

где

$$b_\nu = \gamma'_\nu + \gamma_s, \qquad a_\nu = \gamma_\nu - \gamma_s, \qquad \nu = s+1, s+2, \ldots. \tag{2.10}$$

Таким образом, при $x \in [0, e^{-2}]$, вопрос оценки $\mathcal{K}_{n,s}(x)$ сводится к оценке правой части неравенства (2.9). Для этого выберем контур C (он охватывает окрестности точек $0, -a_{s+1}, \ldots, -a_n$) следующим образом:

$$C = C_1(R_n) \bigcup C_2(R_n) \bigcup C'_2(R_n) \bigcup C_3(R'_n) \bigcup C_4(r),$$

где $0 < r < \frac{a_{s+1}}{2}$, число R_n и R'_n определено в (17), $R'_n = cR_n^{1+\alpha} > a_n$, и

$$\begin{aligned} C_1(R_n) &= [-iR_n, -ir] \bigcup [ir, iR_n], \quad r = 1 - e^{-\frac{1}{R_n}}, \\ C'_2(R_n) &= C\left(|z| = R_n, \quad -\frac{\pi}{2} \le \arg z < -\varphi_0\right), \\ C_2(R_n) &= C\left(|z| = R_n, \quad \varphi_0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}\right), \\ C_3(R'_n) &= C\left(z = 2R'_n l^{i\varphi} \cos\varphi, \quad -\varphi_0 < \varphi < \varphi_0\right), \\ C_4(r) &= C\left(|z| = r, \quad \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \frac{3}{2}\pi\right), \\ 2R'_n \cos\varphi_0 &= R_n, \qquad \text{т.е.} \ \cos\varphi_0 = \frac{R_n}{2R'_n} = \frac{1}{2R_n^\alpha}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Пусть $Y(C)$ - значение модуля в (2.9). Начнем с оценки $Y(C_1)$. Заметим, что

$$Y(C_1) \le \frac{1}{\pi} \int_{ir}^{iR_n} \prod_{\nu=1}^{s} |z+b_\nu| A_{n,s}(z) t^{Rez} \left| \frac{z+\gamma_s}{z} \right| |dz|, \tag{2.12}$$

где

$$A_{n,s}(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left| \frac{z+b_\nu}{z-a_\nu} \right|. \tag{2.13}$$

Имеем

$$A_{n,s}(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(\frac{y^2+b_\nu^2}{y^2+a_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(1 + \frac{b_\nu^2 - a_\nu^2}{y^2+a_\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(1 + (2\gamma_s+1) \frac{\gamma'_\nu + \gamma_\nu}{y^2+a_\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma'_\nu + \gamma_\nu}{y^2+a_\nu^2}\right]$$

Для продолжения оценки разобьем промежуток $(r, R_n]$ на две части (r, γ_s) и $(\gamma_s, R_n]$. Для второго промежутка при $y = Re\, z \in [\gamma_s, R_n]$ имеем

$$B_{n,s}(z) = \prod_{\nu=1}^{s} |z + b_\nu| \left| \frac{\gamma_s + 1 + z}{z} \right| A_{n,s}(z) \le c^s y^s \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2} \right],$$

а для первого промежутка

$$B_{n,s}(z) \le c^s y^s \frac{1}{y} \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{a_\nu^2} \right],$$

Следовательно,

$$Y(C_1) \le \frac{1}{2\pi} \int_r^{R_n} B_{n,s}(z) dy = \frac{1}{2\pi} \int_r^{\gamma_s} B_{n,s}(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_s}^{R_n} B_{n,s}(y) dy \le \tag{2.14}$$

$$\le c_1^s M_{n,s}(R_n) R_n + c_2^s R_n \exp\left[(\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{a_\nu^2} \right],$$

так как в интеграле по (r, γ_s) множитель $|\ln r| = |\ln(1 - e^{-\frac{1}{R_n}})| \le c' R_n$.

Заметим теперь, что согласно второму условию из (1.2) мы можем в (2.5) $\frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + a_\nu^2}$ заменить на $\frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2}$, в результате чего получим:

$$\sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + a_\nu^2} = \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2} + \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{(\gamma_\nu' + \gamma_\nu)(\gamma_\nu^2 - a_\nu^2)}{(y^2 + a_\nu^2)(y^2 + \gamma_\nu^2)} \le$$

$$\le 6(\gamma_s + 1) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{1}{y^2 + a_\nu^2} + \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2} \le c_s + \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{y^2 + \gamma_\nu^2}$$

Сделав такую же замену в последнем слагаемом в (2.14), с учетом (2.5), получим, что $Y(C_1) \le R_n \cdot M(n, s, R_n)$, где

$$M(n, s, R_n) = \max\left\{ M_{n,s}(R_n),\ \exp\left[(2\gamma_s + 1) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{1}{\gamma_\nu} \right] \right\}, \tag{2.15}$$

Перейдем к оценке $Y(C_2)$. Имеем

$$A_{k,s}(z) = \prod_{s+1}^{n} \left| \frac{z + b_\nu}{z - a_\nu} \right| = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left| \frac{R_n \cos\varphi + i R_n \sin\varphi + b_\nu}{R_n \cos\varphi + i R_n \sin\varphi - a_\nu} \right|$$

$$= \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(1 + \frac{b_\nu^2 - a_\nu^2}{R_n^2 + a_\nu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{\nu=s+1}^{n} \left[\ln\left(1 + \frac{2R_n b_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + b_\nu^2} \right) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \ln\left(1 - \frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2} \right) \right] \right\} < \exp\left\{ (\gamma_s + \frac{1}{2}) \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{R_n^2 + a_\nu^2} \right\}$$

$$\times \exp\left\{ \sum_{\nu=s+1}^{n} \frac{R_n b_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + b_\nu^2} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=s+1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l_\nu^k}{k} \right\},$$

где
$$l_\nu = \frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2} < \cos\varphi < \frac{1}{R_n^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$
Поэтому для любого $\delta > 0$, при достаточно большом n имеем
$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=s+1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l_\nu^k}{k} < \frac{1}{2}\sum_{\nu=s+1}^{n} l_\nu \sum_{k=1}^{\infty}\cos^{k-1}\varphi \le \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{R_n^\alpha}}\sum_{\nu=s+1}^{n} l_\nu <$$
$$< \frac{1}{2}(1+\delta)\sum_{\nu=s+1}^{n} l_\nu = \frac{1}{2}(1+\delta)\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2},$$
Следовательно, при достаточно большом n
$$A_{k,s}(z) \le \exp\left\{(\gamma_s + \frac{1}{2})\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{\gamma_\nu' + \gamma_\nu}{R_n^2 + a_\nu^2}\right\} \times \tag{2.16}$$
$$\times \exp\left\{\sum_{\nu=s+1}^{n}\left[\frac{R_n b_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + b_\nu^2} + (1+\delta)\frac{2R_n a_\nu \cos\varphi}{R_n^2 + a_\nu^2}\right]\right\} < c_0 \exp\left[(1+\frac{\delta}{2})R_n\cos\varphi\right],$$
где c_s зависит только от s. Возвращаясь к оценке $Y(C_2)$ будем иметь
$$Y(C_2) \le c_s \prod_{\nu=1}^{s}|R_n + \gamma_s' - \gamma_\nu| \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} e^{(1+\frac{\delta}{2})R_n\cos\varphi}|x^{R_n\cos\varphi}|R_n d\varphi, \tag{2.17}$$
Так как $x \in (0, e^{-2})$, то $x^{R_n\cos\varphi} \le e^{-2R_n\cos\varphi}$ и после замены $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$, получим
$$Y(C_2) < c_s R_n^{s+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{R_n\sin\varphi}{2}} d\varphi < c_* R_n^s.$$
Аналогично оцениваются $Y(C_1')$ и $Y(C_2')$.

Оценим теперь $Y(C_3)$. Заметим, что при $z \in C_3$ и при достаточно большом n
$$\prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+b_\nu}{z+a_\nu}\right| \le \prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{2R_n' + b_\nu}{2R_n' + a_\nu} = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left(1 + \frac{b_\nu - a_\nu}{2R_n' + a_\nu}\right) <$$
$$< \exp\left[(\gamma_s + \gamma_s')\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{1}{R_n'}\right] = \exp\left[(\gamma_s + \gamma_s')\frac{n}{R_n'}\right] \le c_s,$$
так как при $\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu \ge h$ и $\gamma_n < cn$ имеем, что $n = O(R_n)$ и поэтому $n = o(R_n')$ при $n \to \infty$. Следовательно,
$$A_{n,s}(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+b_\nu}{z-a_\nu}\right| = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+b_\nu}{z+a_\nu}\right|\prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+a_\nu}{z-a_\nu}\right| \le c_s \prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+a_\nu}{z-a_\nu}\right|,$$
Оценим величину
$$A_{n,s}'(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+a_\nu}{z-a_\nu}\right|,$$

При $z \in C_3$, т.е. $z = 2R_n' e^{i\varphi}\cos\varphi$, будем иметь

$$A_{n,s}'(z) = \prod_{\nu=s+1}^{n} \left(\frac{4R_n'^2\cos^2\varphi + 4R_n' a_\nu \cos^2\varphi + a_\nu^2}{4R_n'^2\cos^2\varphi - 4R_n' a_\nu \cos^2\varphi + a_\nu^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \prod_{\nu=s+1}^{n}\left(\frac{1+\alpha_\nu}{1-\alpha_\nu}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\alpha_\nu = \frac{4R_n' a_\nu \cos^2\varphi}{4R_n'^2\cos^2\varphi + a_\nu^2},\ \ 0 < \varphi < \varphi_0,\ \ 2R_n'\cos\varphi_0 = R_n.$$

Значит

$$A_{n,s}'(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{\nu=s+1}^{n}\left[\ln(1+\alpha_\nu) - \ln(1+\alpha_\nu)\right]\right\} <$$

$$< \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{\nu=s+1}^{n}\alpha_\nu + \frac{1}{2}\sum_{\nu=s+1}^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_\nu^k\right) < \exp\left[\sum_{\nu=s+1}^{n}\alpha_\nu\left(1+\frac{1}{1-\alpha_\nu}\right)\right].$$

Но

$$\alpha_\nu = \frac{4R_n' a_\nu\cos^2\varphi}{4R_n'^2\cos^2\varphi + a_\nu^2} < \frac{4R_n' a_\nu\cos^2\varphi}{4R_n'^2\cos^2\varphi} = \frac{a_\nu}{R_n'} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следовательно, для любого $\delta > 0$ при достаточно большом n будем иметь, что

$$\prod_{\nu=s+1}^{n}\left|\frac{z+a_\nu}{z-a_\nu}\right| < e^{\frac{2+\delta}{2}}\sum_{\nu=s+1}^{n}\alpha_\nu = \exp\left[\left(1+\frac{\delta}{2}\right)\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{4R_n' a_\nu\cos^2\varphi}{4R_n'^2\cos^2\varphi + a_\nu^2}\right] <$$

$$< \exp\left[(1+\delta_1)\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{\gamma_\nu + \gamma_\nu'}{R_n^2 + a_\nu^2}2R_n'\cos^2\varphi\right] < \exp(2R_n'\cos^2\varphi).$$

Учитывая, что $|x^z| \le e^{-2\operatorname{Re} z} = e^{-2\cdot 2R_n'\cos^2\varphi}$, будем иметь

$$Y(C_3) \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{c_3}\prod_{\nu=1}^{s}|z+b_\nu|\frac{z+b_0}{z}|A_{n,s}(z)||x^z dz| \le c(s)\int_0^{\varphi_0} e^{-2R_n'^2\cos^2\varphi}(2R_n'\cos\varphi)^s R_n' d\varphi,$$

откуда после замены $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$ получаем

$$Y(C_3) < c(s)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R_n\sin^2\varphi}(2R_n'\sin\varphi)^s R_n' d\varphi \le c_s R_n'^{s+1}\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta R_n'\varphi^2}\varphi^s d\varphi,$$

где $\beta = \frac{4}{\pi^2}$. Обозначив $R_n'\varphi^2 = \psi$, получим, что при достаточно большом n,

$$Y(C_3) < c_s(R_n')^{s+1}\int\limits_0^{\infty} e^{-\beta\psi}\frac{\psi^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}{(R_n')^{\frac{s+1}{2}}}d\psi = c_s(R_n')^{s+1-\frac{s+1}{2}} = c_s(R_n')^{\frac{s+1}{2}}.$$

Оценим наконец $Y(C_4)$.

$$Y(C_4) = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r}\prod_{\nu=1}^{s}(z+b_\nu)\frac{z+b_0}{z}\prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{z+b_\nu}{z-b_\nu}x^z dz\right| =$$

$$= \underset{z=0}{\operatorname{Res}} \prod_{\nu=1}^{s-1}(z+b_\nu)\frac{z+b_0}{z}\prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{z+b_\nu}{z-a_\nu}x^z + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r'} B_{n,s}(z)x^z\,dz,$$

где

$$B_{n,s}(z) = \prod_{\nu=1}^{s}(z+b_\nu)\frac{z+b_0}{z}\prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{z+b_\nu}{z-a_\nu},$$

$$C_r = C\left(|z|=r,\ \frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{3}{2}\pi\right),\quad C_r' = C\left(|z|=r,\ -\frac{\pi}{2}<\arg z<\frac{\pi}{2}\right).$$

Имеем $r = 1-e^{-\frac{1}{R_n}}$, $(0<r<\gamma_{s+1}-\gamma_s)$, поэтому

$$Y(C_4) \le c_s\left[\prod_{\nu=s+1}^{n}\frac{b_\nu}{a_\nu}+\prod_{\nu=1}^{s}(b_\nu+r):\prod_{\nu=s+1}^{n}(a_\nu-r)\right] <$$

$$< c_s\exp\left(\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{\gamma_\nu'+\gamma_\nu}{a_\nu-r}+2r\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{1}{a_\nu-r}\right).$$

Так как $a_\nu=\gamma_\nu-\gamma_s$, при достаточно малом $r>0$ можем найти $c_s>0$ так, что

$$Y(C_4)\le c_s\exp\left[(\gamma_s'+\gamma_s')\sum_{\nu=1}^{s}\frac{1}{\gamma_\nu}+2r\sum_{\nu=s+1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right].$$

Но мы имеем $r=1-e^{-\frac{1}{R_n}}$, поэтому

$$Y(C_4)\le c_s\exp\left[(\gamma_s'+\gamma_s)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right].$$

Объединив оценки $Y(C_1)$, $Y(C_2)$, $Y(C_3)$, $Y(C_4)$, при $x\in[0,e^{-2}]$ получим
(2.18)

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)|\le c_s\max\left(R_n\cdot M_{n,s}(R_n),\ R_n^{s+1},\ (R_n')^{\frac{s+1}{2}},\ \exp\left[(\gamma_s+\gamma_s')\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\gamma_\nu}\right]\right),$$

где $M_{n,s}(R_n)$ определено в (2.5). Нам следует определить - какие величины определяют max в (2.18).

Легко заметить, что $R_nM_{n,s}(R_n)\ge c_sR_n^{s+1}$, кроме того, $(R_n')^{\frac{s+1}{2}}=cR_n^{(1+\alpha)\frac{s+1}{2}}<c_1R_n^{s+1}$. Заметим также, что $M_{n,s}(R_n)$ мажорирует не только R_n^s, но также и

$$\exp\left[(\gamma_s'+\gamma_s)\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu}{\gamma_\nu^2+y^2}\right],$$

поэтому $|\mathcal{K}_{n,s}(x)|\le c_sR_n\cdot M_{n,s}(R_n)$. Лемма 2.2 доказана. □

Из Лемм 2.1 и 2.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если последовательность $\{\gamma_\nu\}$ удовлетворяет условиям (1.2), тогда*

$$|\mathcal{K}_{n,s}(x)|\le c_s\hat{M}(n,s,R_n,x),\quad x\in[0,1],\quad s=1,2,\dots,n-1,$$

где

$$\hat{M}(n,s,R_n,x) = \begin{cases} R_n \cdot M_{n,s}(R_n), & x \in [0, e^{-2}], \\ \left[\sum\limits_{\nu=1}^{n} (\gamma_\nu + \gamma_\nu^{'})\right]^{s+\frac{1}{2}}, & x \in [e^{-2}, 1], \end{cases}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат настоящей работы.

Теорема 2.2. *Пусть квазиполином* P_n *определен в (1.1), (1.2), и* $\|P_n\|_{L^2(0,1)} \le M_n$. *Тогда*

$$|P_n^{<s>}(x)| \le c_s M_n \cdot M(n,s,R_n,x), \quad x \in [0,1], \quad s = 1,2,\dots,n-1. \tag{2.19}$$

Чтобы судить о степени точности оценки (2.21) заметим, что для квазиполинома $\hat{\chi}_n(x)$ имеем

$$|\hat{\chi}_n^{<s>}(0)| == \frac{\sqrt{\gamma_n + \gamma_n^{'}}}{\gamma_n - \gamma_s} \prod_{\nu=s+1}^{n-1} \frac{(\gamma_\nu^{'} + \gamma_s)}{(\gamma_n - \gamma_s)} \prod_{\nu=0}^{s} (\gamma_\nu^{'} + \gamma_s) =$$

$$= \frac{c_*(s)}{\sqrt{\gamma_n}} \prod_{\nu=s+1}^{n-1} \left(1 + \frac{\gamma_s + \gamma_s^{'}}{\gamma_\nu - \gamma_s}\right) \ge \frac{c(s)}{\sqrt{\gamma_n}} \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\gamma_s + \gamma_s^{'}}{\gamma_\nu}\right).$$

Значит, если в $M_{n,s}(R_n)$ максимум получится при $0 < y < c < \infty$, тогда

$$R_n M_{n,s}(R_n) = R_n \cdot O\left[\exp\left(\sum_{\nu=s}^{n} \frac{\gamma_s + \gamma_s^{'}}{\gamma_\nu}\right)\right].$$

Поэтому в этом случае для малых x оценка может оказаться хуже возможно ожидаемого на порядок $R_n\sqrt{\gamma_n}$, где число R_n, например, при $\gamma_\nu = \nu,\ \nu = 1,2,\dots$, имеет порядок $O(n)$, причем получаемая погрешность не зависит от s, если $0 < s \le s_0 << n$. Следует еще учесть, что квазиполином $\hat{\chi}_n(x)$ скорее всего не является экстремальным, порядок погрешности может быть и $o(R_n\sqrt{\gamma_n})$. Для больших $x \in [0,1]$ полученный здесь результат в случае обычных полиномов, имеет порядок $n^{2(s+1)}$, а между тем точный порядок есть n^{2s+1}.

Abstract. L. Schwartz has obtained estimates for coefficients of quasipolynomials from Muntz system. In this paper we obtain exact estimates for generalized derivatives of such quasipolynomials on the interval $[0,1]$.

Список литературы

[1] L. Schwartz, 'Êtuade des sommer d'exponentielles réelles', Actualites Scientifiques et industrielles, no. 959, Paris (1943).

[2] Г. В. Бадалян, В. Едигарян "Обобщение задачи Менделеева", Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума по теории аппроксимации функции в комплексных областях, г. Уфа, 1987.

[3] Г. В. Бадалян, "Обобщение многочленов Лежандра и некоторые их приложения", Изв. АН Арм. ССР, серия физмат, естеств. и технич. наук, 8, no. 5, 1 – 28 (1955).

[4] Г. В. Бадалян, "Обобщенные факториальные ряды", Сообщения Института математики и механики АН Арм.ССР, вып. 5, 13 – 64, (1950).

Поступила 12 января 2012