Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 92-100.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ РЕКОРДОВ С ПОДТВЕРЖДЕНИЕМ

В. К. САГАТЕЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *v.saghatelyan@ysu.am*

Аннотация. Исследуются предельные распределения для математических рекордов с подтверждением.

MSC2010 number: 62E10, 62E17, 62E20.

Ключевые слова: рекордные величины; рекорды с подтверждением; предельные распределения; экспоненциальные рекорды.

1. Введение

В данной статье рассматриваются вопросы асимптотического поведения так называемых "рекордов с подтверждением". Эти величины были введены в более ранней работе автора [1], где были получены представления для случаев экспоненциального и равномерного распределений. В этом введении кратко процитируем результаты, которые будем использовать в основной части статьи.

Идея рекордов с подтверждением заключается в том, что для некоторого k о появлении нового рекорда мы объявляем лишь после того, как появятся k наблюдений, превосходящих предыдущее рекордное значение. Фактически исключается возможность принятия за рекорд случайно появившегося выброса. Рекорды с подтверждением мы будем рассматривать для произвольного фиксированного $k = 1, 2, ...$ При $k = 1$ они совпадают с обычными рекордными величинами (см. [2]) и фактически являются их обобщением. Более того, рекорды с подтверждением в некотором смысле напоминают k-е рекорды (см. [3]).

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ...,$ имеющих общую непрерывную функцию распределения $F(x)$. Возьмем случайный вектор $(X_1, X_2, ..., X_k)$ и упорядочим его компоненты в порядке возрастания: $(X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{k,k})$. Первым рекордным моментом с подтверждением считаем $L^{(k)}(1) = k$, а соответствующей рекордной величиной $X_{k,k}$. Вместе с этими величинами будем рассматривать также первый рекордный вектор $(X^{(1)}_{k(1)}, X^{(1)}_{k(2)}, \cdots, X^{(1)}_{k(k)})$, совпадающий с вектором $(X_{1,k}, X_{2,k}, ..., X_{k,k})$. Далее нужно получить k

случайных величин, превышающих $X_{k,k}$, упорядочив которые, получим второй рекордный вектор. Обозначим его $(X^{(2)}_{k(1)}, X^{(2)}_{k(2)}, ..., X^{(2)}_{k(k)})$.

Определение 1.1. *Рекордные моменты с подтверждением $L^{(k)}(n)$, соответствующие им рекордные величины с подтверждением $X^{(n)}_{k(k)}$ и рекордные векторы $(X^{(n)}_{k(1)}, X^{(n)}_{k(2)}, ..., X^{(n)}_{k(k)})$, построенные по последовательности $X_1, X_2, ...,$ определяются следующим образом:*
$L^{(k)}(1) = k,$
$X^{(1)}_{k(k)} = X_{k,k},$
$L^{(k)}(n) = \min\{j : X_{j-k+1,j} > X^{(n-1)}_{k(k)}\},$
$X^{(n)}_{k(k)} = \max\{X_1, X_2, ..., X_{L^{(k)}(n)}\} = X_{L^{(k)}(n),L^{(k)}(n)}, n = 2, 3, ...,$
$(X^{(n)}_{k(1)}, X^{(n)}_{k(2)}, ..., X^{(n)}_{k(k)}) = (X_{L^{(k)}(n)-k+1,L^{(k)}(n)}, ..., X_{L^{(k)}(n),L^{(k)}(n)}), n = 1, 2, \ldots.$

Имеет место следующая теорема (см. [1]), дающая представление для рекорда с подтверждением из экспоненциального распределения.

Теорема 1.1. *Пусть $Z^{(1)}_{k(k)}, Z^{(2)}_{k(k)}, ...$ - обозначают рекорды с подтверждением, построенные по последовательности $Z_1, Z_2, ...$ - независимых случайных величин, с общей функцией распределения $H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}$, а $(Z^{(n)}_{k(1)}, Z^{(n)}_{k(2)}, ..., Z^{(n)}_{k(k)})$, $n = 1, 2, ...$ — соответствующие им рекордные векторы. Тогда, для любого $n = 1, 2, ...$ имеют место соотношения:*

$$(Z^{(n)}_{k(1)}, Z^{(n)}_{k(2)}, ..., Z^{(n)}_{k(k)}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{n-2}\eta_{ik+2} + ... + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_{ik},\right.$$

$$\left.\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+2} + ... + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_{ik}, ..., \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + ... + \sum_{i=1}^{n}\eta_{ik}\right), \tag{1.1}$$

$$(Z^{(n)}_{k(1)}, Z^{(n)}_{k(2)}, ..., Z^{(n)}_{k(k)}) \stackrel{d}{=} (Z(n,k) + Z(n-1,k-1) + ... + Z(n-1,1), Z(n,k)+$$
$$+Z(n,k-1) + ... + Z(n-1,1), ..., Z(n,k) + Z(n,k-1) + ... + Z(n,1)),$$

где $\eta_1, \eta_2, ...$ - последовательность независимых случайных величин, имеющих стандартное экспоненциальное распределение, а $Z(n,k)$, $n = 1, 2, ...$ k-е рекордные величины, построенные по той же последовательности $Z_1, Z_2, \ldots$.

Отметим, что упомянутые в теореме 1.1 k-е рекордные величины определяются (см. [3]), вместе с k-ми рекордными моментами $L(n,k)$, следующим образом:

$$L(1,k) = k, \quad L(n+1,k) = \min\{j > L(n,k) : Z_j > Z_{j-k,j-1}\}, \ n \geq 1,$$

$$Z(n,k) = Z_{L(n,k)-k+1,L(n,k)}, \ n \geq 1.$$

Далее, известно, что вероятностное преобразование $Y = F(X)$, случайной величины X, не меняет упорядоченности. Иными словами для любых $k \leq n$, имеет место $Y_{k,n} = F(X_{k,n})$. Хорошо известно, что для любой непрерывной функции распределения $F(x)$ случайная величина $Y = F(X)$ является равномерно распределенной на $[0,1]$. Это преобразование также называют преобразованием Смирнова (см. [4]).

Следующие два известных представления (см. [5] и [6]), на которые мы будем ссылаться в дальнейшем, делают экспоненциальные рекорды мощным инструментом исследования рекордов.

Предложение 1.1. *Пусть $Z_{1,n} \le Z_{2,n} \le ... \le Z_{n,n}$, $n = 1,2,...$ — экспоненциальные порядковые статистики, построенные по последовательности независимых случайных величин $Z_1, Z_2, ...$ с общей функцией распределения $H(x) = \max(0, 1 - e^{-x})$. Тогда для любого $n = 1,2,...$ справедливо соотношение:*

$$(Z_{1,n}, Z_{2,n}, ...Z_{n,n}) \stackrel{d}{=} \left(\frac{\nu_1}{n}, \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1}, ..., \frac{\nu_1}{n} + \frac{\nu_2}{n-1} + ... + \nu_n\right)$$

где $\nu_1, \nu_2, ...$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с той же функцией распределения $H(x)$.

Предложение 1.2. *Пусть $X(1) \le X(2) \le \ldots,$ — рекордные величины[1], соответствующие непрерывной функции распределения $F(x)$, а $Z(1) < Z(2) < \ldots$ — экспоненциальные рекордные величины, соответствующие стандартному экспоненциальному распределению. Тогда для произвольного $n = 1,2,\ldots$ имеет место равенство по распределению*

$$(X(1), X(2), \ldots, X(n)) \stackrel{d}{=} (R(Z(1)), R(Z(2)), \ldots, R(Z(n))),$$

где $R(x) = G(1 - e^{-x})$, и $G(x)$ — обратная к функции распределения $F(x)$.

Вопрос асимптотического поведения наибольшего значения $X_{n,n}$ в выборке объема n из распределения $F(x)$ исследован довольно подробно многими авторами (см. например [7]– [9]). Однако, здесь мы приведем результат, касающийся класса всех предельных распределений для $X_{n,n}$. Отметим, что случайная величина $X_{n,n}$ из произвольного распределения, даже после соответствующей нормировки, вообще говоря, не всегда будет обладать предельным распределением. Однако, если $F(x)$ таково, что такое предельное распределение существует, то оно должно относиться к одному из трех типов:

1. $\Lambda_1(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \ \alpha > 0, \\ \exp(-x^{-\alpha}), \text{ если } x > 0, \end{cases}$
2. $\Lambda_2(x) = \begin{cases} \exp[-(-x)^{\alpha}], \text{ если } x \le 0, \ \alpha > 0, \\ 1, \text{ если } x > 0, \end{cases}$
3. $\Lambda_3(x) = \exp(-\exp(-x)), \quad -\infty < x < \infty.$

Сказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы (см. [9]).

---

[1]Имеются ввиду обычные рекордные величины, (см. [2]).

Теорема 1.2. *Класс предельных распределений для $F^n(a_n x + b_n)$, где $a_n > 0$ и $b_n \in R$ — соответствующим образом выбранные постоянные, содержит только законы типов $\Lambda_k(x)$, $k = 1, 2, 3$.*

Аналог этого предельного распределения, полученный для рекордных величин, можно найти в работах [2] и [10].

Теорема 1.3. *Пусть $X(1) < X(2), \dots$ рекордные величины из непрерывного распределения $F(x)$. Для того, чтобы при некотором выборе констант $A(n)$ и $B(n)$ существовала невырожденная предельная функция распределения*

$$G(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{X(n) - B(n) < xA(n)\right\},$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала предельная функция

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{T(xA(n) + B(n)) - n}{\sqrt{n}},$$

имеющая не менее двух точек роста, где $T(x) = -\ln(1 - F(x))$. При этом предельные функции $G(x)$ и $g(x)$ связаны соотношением $G(x) = \Phi(g(x))$, где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Теорема 1.4. *Предельная функция $g(x)$ может принадлежать только одному из следующих трех типов:*

1. $g_1(x) = x$,
2. $g_2(x) = \gamma \ln(x)$, если $x > 0$, $\gamma > 0$ и $g_2(x) = -\infty$, если $x < 0$.
3.$g_3(x) = -\gamma \ln(-x)$, $\gamma > 0$, если $x < 0$, и $g_3(x) = \infty$, если $x > 0$.

2. Предельные соотношения для рекордов с подтверждением

Пусть $Z^{(n)}_{k(k)}$, экспоненциальные рекорды с подтверждением, построенные для некоторого фиксированного $k = 1, 2, \dots$ по последовательности $Z_1, Z_2, \dots$ независимых случайных величин с общей функцией распределения $H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}$, $-\infty < x < \infty$.

Используя приведенную выше теорему 1.1, получим предельное распределение для $Z^{(n)}_{k(k)}$, при надлежащем выборе нормирующих и центрирующих постоянных. Из выражения (1.1) имеем:

$$Z^{(n)}_{k(k)} \stackrel{d}{=} \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+1} + \frac{1}{k-1}\sum_{i=0}^{n-1}\eta_{ik+2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n}\eta_{ik},$$

далее, сумму в правой части приводим к виду:

$$\begin{aligned} Z^{(n)}_{k(k)} \stackrel{d}{=} &\frac{\eta_1}{k} + \frac{\eta_2}{k-1} + \cdots + \eta_k + + \frac{\eta_{k+1}}{k} + \frac{\eta_{k+2}}{k-1} \\ &+ \cdots + \eta_{2k} + \cdots + r + \frac{\eta_{(n-1)k+1}}{k} + \frac{\eta_{(n-1)k+2}}{k-1} + \cdots + \eta_{nk}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Обозначим $\xi_r = \frac{\eta_{(r-1)k+1}}{k} + \frac{\eta_{(r-1)k+2}}{k-1} + \dots + \eta_{rk}$. Очевидно, что случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будут независимыми и одинаково распределенными. Более того, согласно предложению 1.1, они имеют то же распределение, что и максимальные порядковые статистики $Z_{k,k}$, то есть $F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x\} = H^k(x)$.

Переписав равенство (2.1), получаем представление для экспоненциального рекорда с подтверждением $Z^{(n)}_{k(k)} \stackrel{d}{=} \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Найдем выражение для второго момента $E\xi_1^2$. Сперва рассмотрим математическое ожидание и дисперсию ξ_1. Имеем

$$E\xi_1 = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{E\eta_{i+1}}{k-i} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}, \qquad D\xi_1 = \sum_{i=0}^{k-1} D\left(\frac{\eta_{i+1}}{k-i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2},$$

отсюда, для второго момента получаем

$$E\xi_1^2 = D\xi_1 + (E\xi_1)^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2} + \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}\right)^2.$$

Поскольку k фиксировано, следовательно $E\xi_1^2 < \infty$, и таким образом, к $Z^{(n)}_{k(k)}$ можем применить центральную предельную теорему для независимых одинаково распределенных случайных величин. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть для некоторого фиксированного $k = 1, 2, \dots$; $Z^{(n)}_{k(k)}$ — обозначает рекорд с подтверждением, построенный по последовательности $Z_1, Z_2, \dots$ независимых случайных величин, с общей функцией распределения $H(x) = \max\{0, 1 - e^{-x}\}$. Тогда, имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{ \frac{Z^{(n)}_{k(k)} - n\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + 1\right)}{\sqrt{n\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k-1)^2} + \dots + 1\right)}} < x \right\} = \Phi(x), \tag{2.2}$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Далее рассмотрим наиболее общий случай рекордов с подтверждением из произвольного распределения. Рассмотрим рекорд с подтверждением $X^{(n)}_{k(k)}$, построенный по последовательности $X_1, X_2, \dots$ независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$. Из определения рекордов с подтверждением следует, что $X^{(n)}_{k(k)} = M_{L^{(k)}(n)}$, где $\{M_i\}_{i=1,\dots,n}$ последовательные максимумы построенные по исходной выборке. Это значит, что последовательность $X^{(1)}_{k(k)}, X^{(2)}_{k(k)}, \dots$ содержится в $M_1, M_2, \dots$ в качестве подпоследовательности. Следовательно множество предельных законов для случайных величин

$$\left(\frac{X^{(n)}_{k(k)} - b(L^{(k)}(n))}{a(L^{(k)}(n))}\right)$$

совпадает с множеством предельных законов для величин

$$\left(\frac{M_n - b(n)}{a(n)}\right),$$

которое, как известно (см. теорему 1.2), включает в себя только три вида распределений $\Lambda_k(x)$, $k = 1, 2, 3$.

В частности, для максимальных порядковых статистик из стандартного экспоненциального распределения, при $n \longrightarrow \infty$, имеет место

$$\mathbf{P}\left\{Z_{n,n} - \ln n < x\right\} \longrightarrow \Lambda_3(x) = \exp(-\exp(-x)),$$

следовательно, согласно сказанному выше, к тому же самому предельному распределению $\Lambda_3(x)$ будет стремиться распределение величины $\left(Z^{(n)}_{k(k)} - \ln L^{(k)}(n)\right)$.

С другой стороны, согласно теореме 1.3 при должном выборе центрирующих и нормирующих постоянных $B(n)$ и $A(n)$,

$$\mathbf{P}\left\{\frac{Z^{(n)}_{k(k)} - B(n)}{A(n)} < x\right\} \longrightarrow \Phi(x).$$

Это значит, что предельные распределения рекордов с подтверждением при случайной и неслучайной нормировке не обязаны совпадать.

В связи с этим рассмотрим вопрос нахождения всех возможных предельных распределений случайных величин[2]

$$\frac{X^{(n)}_{k(k)} - B(n)}{A(n)}$$

при надлежащем выборе центрирующих $(B(n))$ и нормирующих $(A(n))$ констант.

Из преобразования Смирнова и предложения 1.2 следует равенство по распределению

$$\left(X^{(1)}_{k(k)}, X^{(2)}_{k(k)}, \ldots, X^{(n)}_{k(k)}\right) \stackrel{d}{=} \left(R(Z^{(1)}_{k(k)}), R(Z^{(2)}_{k(k)}), \ldots, R(Z^{(n)}_{k(k)})\right),$$

где $R(x) = G(1 - e^{-x})$, $G(x)$ — обратная функции распределения $F(x)$. Через $T(x)$ обозначим обратную функции $R(x)$. Очевидно, что $T(x) = -\ln(1 - F(x))$.

Рассмотрим

$$\mathbf{P}\left\{\frac{X^{(n)}_{k(k)} - B(n)}{A(n)} < x\right\} = \mathbf{P}\left\{R(Z^{(n)}_{k(k)}) < A(n)x + B(n)\right\} = \tag{2.3}$$

$$= \mathbf{P}\left\{Z^{(n)}_{k(k)} < T(A(n)x + B(n))\right\}.$$

[2]При условии, что предельное распределение существует, так как вообще говоря, в зависимости от исходного распределения $F(x)$, предел может не существовать.

(2.3) эквивалентно равенству

$$\mathbf{P}\left\{\frac{X_{k(k)}^{(n)}-B(n)}{A(n)}<x\right\}=\mathbf{P}\left\{\frac{Z_{k(k)}^{(n)}-na_k}{\sqrt{nb_k}}<\frac{T(A(n)x+B(n))-na_k}{\sqrt{nb_k}}\right\}, \tag{2.4}$$

где $a_k=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{k-i}$, и $b_k=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(k-i)^2}$. Таким образом, мы доказали аналог теоремы 1.3 для рекордов с подтверждением. Из (2.2) и (2.4) вытекает следующий результат.

Теорема 2.2. . *Для того, чтобы при некотором выборе констант $A(n)$ и $B(n)$, при $n\longrightarrow\infty$ существовала невырожденная предельная функция распределения*

$$Q(x)=\lim\mathbf{P}\left\{\frac{X_{k(k)}^{(n)}-B(n)}{A(n)}<x\right\}, \tag{2.5}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала предельная функция

$$g(x)=\lim\frac{T(A(n)x+B(n))-na_k}{\sqrt{nb_k}}, \tag{2.6}$$

имеющая не менее двух точек роста. При этом пределы (2.5) и (2.6) связаны соотношением

$$Q(x)=\Phi(g(x)).$$

Оказывается, имеются лишь три (с точностью до линейных преобразований) возможности при выборе функции $g(x)$.

Теорема 2.3. *Предельная функция $g(x)$ имеет один из следующих трех видов:*

1. $g_1(x)=-\infty$, если $x\le 0$ и $g_1(x)=\frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}\alpha\ln x$, $\alpha>0$, если $x>0$.

2. $g_2(x)=-\frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}\alpha\ln(-x)$, если $x\le 0$ и $g_2(x)=\infty$, если $x>0$.

3.$g_3(x)=\frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}x$, $-\infty<x<\infty$, где $a_k=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{k-i}$, $b_k=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(k-i)^2}$.

Доказательство. В силу монотонности функции $g(x)$, достаточно рассматривать только те значения x, где эта функция конечна. Для таких x, при $n\longrightarrow\infty$ имеем $T(xA(n)+B(n))\sim n$. Тогда

$$\lim\frac{T^{\frac12}(xA(n)+B(n))+\sqrt{na_k}}{\sqrt{nb_k}}=\frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}}.$$

Далее, поскольку

$$\frac{T(xA(n)+B(n))-na_k}{\sqrt{nb_k}}=\frac{T^{\frac12}(xA(n)+B(n))+\sqrt{na_k}}{\sqrt{nb_k}}\times$$
$$\times\left(T^{\frac12}(xA(n)+B(n))-\sqrt{na_k}\right),$$

получаем, что

$$\lim\left(T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))-\sqrt{na_k}\right)=\frac{\lim\frac{T(xA(n)+B(n))-na_k}{\sqrt{nb_k}}}{\lim\frac{T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))+\sqrt{na_k}}{\sqrt{nb_k}}}= \tag{2.7}$$

$$=\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{F}(x)=1-\exp(-T^{\frac{1}{2}}(x))=1-\exp(-(-\ln(1-F(x)))^{\frac{1}{2}}).$$

Нетрудно убедиться, что $\tilde{F}(x)$ также является функцией распределения. Имеем

$$1-\tilde{F}(xA(n)+B(n))=\exp(-T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))),$$

отсюда

$$T^{\frac{1}{2}}(xA(n)+B(n))=-\ln(1-\tilde{F}(xA(n)+B(n))). \tag{2.8}$$

Подставляя выражение (2.8) в (2.7), получаем равенство

$$\lim\left(-\ln\left(-\tilde{F}(xA(n)+B(n))+1\right)-\sqrt{na_k}\right)=\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}},$$

которое можно переписать в виде

$$\lim\exp(\sqrt{na_k})\left(1-\tilde{F}(xA(n)+B(n))\right)=h(x), \tag{2.9}$$

где

$$h(x)=\exp\left(-\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}\right).$$

Возьмем, не умаляя общности, подпоследовательность $n=n(m)=\left[\frac{\ln^2 m}{a_k}\right]$, $m\to\infty$, где через $[x]$ обозначена целая часть числа x и обозначив

$$\tilde{A}(m)=A(\left[\frac{\ln^2 m}{a_k}\right]),\ \tilde{B}(m)=B(\left[\frac{\ln^2 m}{a_k}\right]),$$

перепишем (2.9), в более удобной форме

$$\lim_{m\to\infty} m(1-\tilde{F}(x\tilde{A}(m)+\tilde{B}(m)))=h(x). \tag{2.10}$$

Обозначим $\hat{h}(x)=\exp(-h(x))$. (2.10) эквивалентно равенству

$$\lim_{m\to\infty}\left[1-(1-\tilde{F}(x\tilde{A}(m)+\tilde{B}(m)))\right]^m=\hat{h}(x),$$

следовательно

$$\lim_{m\to\infty}\left[\tilde{F}(x\tilde{A}(m)+\tilde{B}(m)))\right]^m=\hat{h}(x). \tag{2.11}$$

Как уже отмечалось, функция $\tilde{F}(x)$ является функцией распределения. Пусть $Y_1, Y_2, \dots$ - независимые случайные величины с общей функцией распределения

$$\tilde{F}(x)=1-\exp(-(-\ln(1-F(x)))^{\frac{1}{2}}),$$

и пусть, для некоторого фиксированного $r = 1, 2, \ldots,\ \tilde{M}_r = \max\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_r\}$. В этом случае (2.11) означает, что при $m \longrightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\tilde{M}_m - \tilde{B}(m)}{\tilde{A}(m)} < x\right\} \longrightarrow \hat{h}(x). \tag{2.12}$$

Напомним, что $h(x) = \exp\left(-\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}\right)$, следовательно

$$\hat{h}(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{g(x)\sqrt{b_k}}{1+\sqrt{a_k}}\right)\right).$$

Отсюда, для функции $g(x)$ получаем выражение

$$g(x) = -\frac{1+\sqrt{a_k}}{\sqrt{b_k}} \ln\left(-\ln \hat{h}(x)\right).$$

Из выражения (2.12) и теоремы 1.2 следует, что функция $\hat{h}(x)$ может быть только трех типов Λ_1, Λ_2 и Λ_3, соответственно, и $g(x)$ может принадлежать только трем типам g_1, g_2 и g_3, перечисленным в теореме. □

Из теорем 2.2 и 2.3 вытекает очевидное следствие.

Следствие 2.1. *Множество всех предельных невырожденных функций распределения для центрированных и нормированных рекордов с подтверждением $X_{k(k)}^{(n)}$ состоит (с точностью до линейных преобразований) из функций вида $\Phi(g(x))$, где $g(x)$ определены в теореме 2.3.*

Abstract. The asymptotic behavior of records with confirmation is considered and the corresponding limiting distributions are obtained.

Список литературы

[1] В. К. Сагателян, "Об одной новой модели рекордных величин", Вестн. С.-Петербург. ун-та., Сер. 1., вып.(3), 144 – 147 (2008).

[2] В. Б. Невзоров, Рекорды. Математическая теория, М., ФАЗИС (2000).

[3] W. Dziubdziela, B. Kopocinsky, "Limiting properties of the k-th record values", Zastos. Mat., 15, no. 2, 187 – 190 (1976).

[4] Р. Н. Вадзинский, Справочник по вероятностным распределениям, СПб., Наука, 295 с. (2001).

[5] Г. Дэйвид, Порядковые статистики, М., Наука (1979).

[6] M. N. Tata, "On outstanding values in a sequence of random variables", Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. B, 12, 9 – 20 (1969).

[7] Я. Галамбош, Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик, М., Наука (1984).

[8] Э. Гумбель, Статистика экстремальных значений, М., Мир (1965).

[9] B. Gnedenko, "Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire", Ann. Math., 44, 423 – 453 (1943).

[10] S. I. Resnick, "Limit laws for record values", Stohast. Processes Appl., 1, 67 – 82 (1973).

Поступила 12 марта 2012