Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 82-91.

О СХОДИМОСТИ РАЦИОНАЛЬНО-ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ РЕАЛИЗОВАННЫХ ПО КОРНЯМ ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА

А. ПОГОСЯН

Институт Математики Национальной Академии Наук Армении
E-mail: *arnak@instmath.sci.am*

Аннотация. Рассматривается задача приближения функции посредством конечного числа ее коэффициентов Фурье. Ускорение сходимости урезанного ряда Фурье достигается последовательным применением полиномиальной и рациональной коррекций ошибки. Рациональные коррекции включают неизвестные параметры, определение которых является ключевой проблемой. Рассматривается подход связанный с корнями полиномов Лагерра и изучается сходимость таких аппроксимаций.

MSC2010 number: 41A20, 65T40, 41A21, 41A25, 65B99.

Ключевые слова: ряд Фурье; ускорение сходимости; аппроксимация Крылова-Ланцоша; рациональная аппроксимация; полиномы Лагерра.

1. Введение

Рассматривается проблема аппроксимации функции посредством конечного числа ее коэффициентов Фурье

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-i\pi nx}dx, \ |n| \leq N.$$

Естественным является аппроксимация посредством урезанного ряда Фурье

$$S_N(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{i\pi nx}.$$

Различные методы ускорения сходимости $S_N(f,x)$ были предложены в литературе в последние несколько десятилетий (см. [1], [5], [6] и ссылки в них). Подход, в котором участвуют полиномы представляющие разрывы (скачки) функции и ее производных, был предложен Крыловым в 1906 году [10], и позднее, более формально, Ланцошем [11] (см также [3], [9], [13], [17] и [19]). Мы называем этот подход, как аппроксимация Крылова-Ланцоша (КЛ-).

В этой статье мы рассмотрим КЛ-аппроксимацию с дополнительным ускорением сходимости посредством рациональных (в терминах $e^{i\pi x}$) коррекциях ошибки, согласно идее аппроксимаций Фурье-Паде ([2]). В общем виде, представление Фурье-Паде было предложено в [7]. Класс подобных приближений введены и изучены также в [8].

Рациональные исправления ошибки содержат неизвестные параметры и различные подходы известны для их определения (см [12], [14], и [15]). Мы рассмотрим подход, связанный с корнями полиномов Лагерра и представим подробный анализ свойств сходимости таких аппроксимаций.

2. Аппроксимация Крылова-Ланцоша

Пусть $f \in C^q[-1,1]$. Через $A_k(f)$ обозначим точные значения скачков функции и ее производных на отрезке $[-1,1]$

$$A_k(f) = f^{(k)}(1) - f^{(k)}(-1), \quad k = 0, \dots, q.$$

Мы ограничимся рассмотрением функций, гладких на $[-1,1]$. Мы предполагаем, что точные значения скачков известны.

Обозначим через $AC[-1,1]$ множество абсолютно непрерывных функций на $[-1,1]$. Пусть $f^{(q-1)} \in AC[-1,1]$ для некоторого $q \geq 1$. Следующее разложение коэффициентов Фурье имеет важное значение для реализации подхода Крылова-Ланцоша

$$\hat{f}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k(f)}{(i\pi n)^{k+1}} + \frac{1}{2(i\pi n)^q} \int_{-1}^{1} f^{(q)}(x) e^{-i\pi n x} dx, \ n \neq 0, \tag{2.1}$$

что приводит к представлению функции, известное как представление Ланцоша ([9])

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x) + F(x).$$

Здесь, B_k - 2-периодические полиномы Бернулли

$$B_0(x) = \frac{x}{2}, \ B_k(x) = \int B_{k-1}(x) dx, \ \int_{-1}^{1} B_k(x) dx = 0, \ x \in [-1,1]$$

с коэффициентами Фурье

$$\hat{B}_{k,n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{k+1}}, \ n \neq 0, \ \hat{B}_{k,0} = 0,$$

и F - 2-периодическая и гладкая функция на прямой ($F \in C^{q-1}(\mathbb{R})$) с коэффициентами Фурье

$$\hat{F}_n = \hat{f}_n - \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) \hat{B}_{k,n}.$$

Аппроксимация F посредством отрезка ряда Фурье приводит к аппроксимации Крылова-Ланцоша (КЛ)

$$S_{N,q}(f,x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{F}_n e^{i\pi n x} + \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f) B_k(x)$$

с ошибкой

$$R_{N,q}(f,x) = f(x) - S_{N,q}(f,x).$$

Следующая теорема описывает асимптотику $R_{N,q}(f,x)$ в интервале $(-1,1)$.

Теорема 2.1 ([13]). *Пусть* $f^{(q+1)} \in AC[-1,1]$ *для некоторого* $q \geq 0$. *Тогда имеет место оценка для* $|x| < 1$

$$R_{N,q}(f,x) = A_q(f) \frac{(-1)^N}{2\pi^{q+1} N^{q+1}} \frac{\sin \frac{\pi}{2}(x(2N+1) - q)}{\cos \frac{\pi x}{2}} + o(N^{-q-1}), \ N \to \infty.$$

3. Аппроксимация рациональными функциями

Дополнительное ускорение сходимости для КЛ-аппроксимации может быть достигнуто путем применения рациональных функций (в терминах $e^{i\pi x}$) как исправление ошибки. Рассмотрим конечную последовательность комплексных чисел $\theta = \{\theta_k\}_{|k|=1}^{p}$, $p \geq 1$. Обозначим $\hat{F} = \{\hat{F}_n\}$. Далее, через $\Delta_n^k(\theta, \hat{F})$ обозначим обобщенные конечные разности

$$\Delta_n^0(\theta, \hat{F}) = \hat{F}_n, \ \Delta_n^k(\theta, \hat{F}) = \Delta_n^{k-1}(\theta, \hat{F}) + \theta_{k\, sgn(n)} \Delta_{(|n|-1)sgn(n)}^{k-1}(\theta, \hat{F}), \ k \geq 1,$$

где $sgn(n) = 1$ если $n \geq 0$ и $sgn(n) = -1$ если $n < 0$. Через $\Delta_n^k(\hat{F})$ обозначим классические разности, соответствующие $\Delta_n^k(\theta, \hat{F})$ для выбора $\theta \equiv 1$. Имеем

$$R_{N,q}(f,x) = R_N^+(F,x) + R_N^-(F,x),$$

где

$$R_N^+(F,x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{F}_n e^{i\pi n x}, \quad R_N^-(F,x) = \sum_{n=-\infty}^{-N-1} \hat{F}_n e^{i\pi n x}.$$

Преобразование Абеля приводит к представлению

$$R_N^+(F,x) = -\frac{\theta_1 \hat{F}_N \, e^{i\pi(N+1)x}}{1+\theta_1 e^{i\pi x}} + \frac{1}{1+\theta_1 e^{i\pi x}} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^1(\theta, \hat{F}) e^{i\pi n x}.$$

Повторение его до p раз, приводит к следующему разложению

$$R_N^+(F,x) = -e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta, \hat{F})}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})} + \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_k e^{i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta_n^p(\theta, \hat{F}) e^{i\pi n x},$$

где первое слагаемое рассматриваем как коррекцию ошибки, а второе слагаемое есть фактическая ошибка. Такое же разложение для $R_N^-(F,x)$ приводит к следующему рационально-тригонометрическо-полиномиальному (РТП) приближению

$$
\begin{aligned}
S_{N,q,p}(f,x) &= \sum_{k=0}^{q-1} A_k(f)B_k(x) + \sum_{n=-N}^{N} \hat{F}_n e^{i\pi nx} \\
&- e^{i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_k \Delta_N^{k-1}(\theta,\hat{F})}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_s e^{i\pi x})} - e^{-i\pi(N+1)x} \sum_{k=1}^{p} \frac{\theta_{-k} \Delta_{-N}^{k-1}(\theta,\hat{F})}{\prod_{s=1}^{k}(1+\theta_{-s} e^{-i\pi x})}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

с ошибкой

$$
R_{N,q,p}(f,x) = f(x) - S_{N,q,p}(f,x) = R^{+}_{N,q,p}(f,x) + R^{-}_{N,q,p}(f,x),
$$

где

$$
R^{\pm}_{N,q,p}(f,x) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k} e^{\pm i\pi x})} \sum_{n=N+1}^{\infty} \Delta^{p}_{\pm n}(\theta,\hat{F}) e^{\pm i\pi nx}. \tag{3.2}
$$

Аппроксимация (3.1) неопределена, пока параметры θ_k неизвестны. Различные медоты известны для их определения (см. [12], [14]-[16]). Здесь, мы сосредоточим наше внимание на подходе, описанный в [12], [15] и [16], где

$$
\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N},\ k = 1,\ldots,p. \tag{3.3}
$$

Через $\gamma_k(\tau)$ обозначим коэффициенты полинома

$$
\prod_{k=1}^{p}(1+\tau_k x) = \sum_{k=0}^{p} \gamma_k(\tau) x^k. \tag{3.4}
$$

Следующая теорема описывает поведение $R_{N,q,p}(f,x)$, когда θ выбран как в (3.3).

Теорема 3.1. [16] *Пусть* $f^{(q+p+1)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $q \geq 0$ *и* $p \geq 1$. *Пусть*

$$
\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N},\ k = 1,\ldots,p.
$$

Тогда, имеет место следующая оценка для $|x| < 1$

$$
\begin{aligned}
R_{N,q,p}(f,x) &= A_q(f) \frac{(-1)^{N+p}}{2^{p+1}\pi^{q+1}N^{p+q+1}q!} \frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}} \sum_{k=0}^{p}(-1)^k(p-k+q)!\gamma_k(\tau) \\
&+ o\left(N^{-q-p-1}\right),\ N \to \infty.
\end{aligned}
$$

Заметим, что в Теореме 3.1 параметры τ_k все еще не определены. Это дает свободу для достижения дополнительных целей.

В данной работе рассматривается подход, при котором параметры τ_k являются корнями полиномов Лагерра $L_p^q(x)$ ([4]). Следующий раздел изучает теоретическую основу таких РТП-аппроксимаций.

4. РТП-аппроксимации с корнями полиномов Лагерра

Пусть τ_k корни полинома Лагерра $L_p^q(x)$:

$$L_p^q(\tau_k) = 0, \ k = 1, \ldots, p.$$

Хорошо известно, что корни различны и положительны. Полиномы Лагерра имеют известное представление

$$L_p^q(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(p+q)!}{k!(p-k)!(q+k)!} x^k.$$

Для наших целей условие $L_p^q(\tau_s) = 0$ перепишем в виде

$$\sum_{k=0}^{p} \left(-\frac{1}{\tau_s}\right)^k \frac{p!}{k!(p-k)!(q+p-k)!} = 0.$$

Сравнение с (3.4) показывает, что

$$\gamma_k(\tau) = \binom{p}{k} \frac{(q+p)!}{(q+p-k)!}. \tag{4.1}$$

Оценим точечную сходимость таких РТП-аппроксимаций внутри отрезка $[-1,1]$. Первый результат является непосредственным следствием Теоремы 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть $f^{(q+p+1)} \in AC[-1,1]$ для некоторых $q \ge 0$ и $p \ge 1$. Пусть*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \ k = 1, \ldots, p,$$

где τ_k корни полинома Лагерра: $L_p^q(\tau_k) = 0, \ k = 1, \ldots, p$. Тогда,

$$R_{N,q,p}(f,x) = o\left(N^{-q-p-1}\right), \ N \to \infty, \quad |x| < 1. \tag{4.2}$$

Доказательство. Ввиду (4.1), мы видим, что $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k (p-k+q)! \gamma_k(\tau) = 0$ и оценка (4.2) следует из Теоремы 3.1. □

В следующей теореме получены более точные оценки для более гладких функций. Сначала докажем некоторые свойства обобщенных конечных разностей.

Лемма 4.1. *Пусть $f^{(q+p+r+1)} \in AC[-1,1]$ для некоторых $q, r \ge 0$, $p \ge 1$, и*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \ k = 1, \ldots, p.$$

Тогда, имеет место следующая оценка, при $N \to \infty$ и $|n| \ge N+1$

$$\begin{aligned} \Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}} \sum_{k=0}^{p} (sgn(n))^{p-k} \frac{\gamma_k(\tau)}{N^k} \sum_{t=w}^{r+1} \frac{1}{n^{t+p-k}} \sum_{s=w}^{t} (sgn(n))^s \\ \times \binom{t+p-k+q}{p-k+s} \frac{A_{t+q-s}(f)}{(i\pi)^{t-s}} \alpha_{k,s+p-k}(w) + \frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где

$$\alpha_{k,s}(w) = \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} (k+j)^s.$$

Доказательство. Легко проверить, что

$$\Delta_n^p(\theta,\hat{F})=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\Delta_{n-sgn(n)k}^{p-k}(\hat{F}),$$

где классические конечные разности имеют следующее представление

$$\Delta_n^k(\hat{F})=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\hat{F}_{n-sgn(n)j}.$$

Принимая во внимание, что

$$\Delta_n^w(\Delta_n^{p-k}(\hat{F}))=\Delta_n^{w+p-k}(\hat{F})$$

получим

$$\Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta,\hat{F}))=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{j=0}^{w+p-k}\binom{w+p-k}{j}\hat{F}_{n-sgn(n)(k+j)}. \tag{4.4}$$

Ввиду (2.1), при $n\to\infty$ имеем

$$\hat{F}_{n-sgn(n)(k+j)}=\frac{(-1)^{n+k+j+1}}{2}\sum_{s=q}^{q+p-k+r+1}\frac{A_s(f)}{(i\pi(n-(\pm(k+j))))^{s+1}}+o(n^{-q-p+k-r-2}).$$

Теперь, из (4.4), получим

$$\begin{aligned}
\Delta_n^w(\Delta_n^p(\theta,\hat{F})) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{p}\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{j=0}^{w+p-k}(-1)^j\binom{w+p-k}{j}\sum_{s=q}^{q+p-k+r+1}\frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}}\\
&\times\ \frac{1}{\left(1-\frac{\pm(k+j)}{n}\right)^{s+1}}+\frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sum_{k=0}^{p}\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{j=0}^{w+p-k}(-1)^j\binom{w+p-k}{j}\sum_{s=q}^{q+p-k+r+1}\frac{A_s(f)}{(i\pi n)^{s+1}} \qquad (4.5)\\
&\times\ \sum_{t=s}^{\infty}(\pm1)^{t-s}\binom{t}{s}\frac{(k+j)^{t-s}}{n^{t-s}}+\frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{2(i\pi n)^{q+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{\gamma_k(\tau)}{N^k}\sum_{t=0}^{p-k+r+1}\frac{1}{n^t}\sum_{s=0}^{t}(\pm1)^s\binom{t+q}{s}\frac{A_{t+q-s}(f)}{(i\pi)^{t-s}}\alpha_{k,s}(w)\\
&+\ \frac{o(N^{-p})}{n^{q+r+2}}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\alpha_{k,s}(w)=0$ для $s<w+p-k$, и известное тождество (см. [18])

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^j=0,\ j=0,\ldots,p-1, \tag{4.6}$$

в правой части (4.5) рассмотрим только $s\ge w+p-k$ и, соответственно, $t\ge w+p-k$, и после несложных преобразований получим требуемую оценку. □

Лемма 4.2. *Пусть* $f^{(q+p+r+1)} \in AC[-1,1]$ *для некоторых* $q, r \geq 0$, $p \geq 1$, *и*

$$\theta_k = \theta_{-k} = 1 - \frac{\tau_k}{N}, \quad k = 1, \dots, p,$$

где τ_k *корни полинома Лагерра:* $L_p^q(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, p$. *Тогда, при* $N \to \infty$

$$\Delta_{\pm N}^w(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{t=\frac{p+w}{2}}^{r+1} \frac{1}{N^t} \sum_{s=w}^{t} A_{t+q-s}(f) \frac{\beta_{p,q}(w,s,t)}{(\pm i\pi)^{t-s}} + o(N^{-q-p-r-2}), \quad w \leq p \tag{4.7}$$

когда w *и* p *имеют одинаковую четность, и*

$$\Delta_{\pm N}^w(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{t=\frac{p+w+1}{2}}^{r+1} \frac{1}{N^t} \sum_{s=w}^{t} A_{t+q-s}(f) \frac{\beta_{p,q}(w,s,t)}{(\pm i\pi)^{t-s}} + o(N^{-q-p-r-2}), \ w \leq p+1 \tag{4.8}$$

когда w *и* p *имеют противоположную четность, где*

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = \sum_{k=0}^{p} \gamma_k(\tau) \binom{t+p-k+q}{p-k+s} \alpha_{k,s+p-k}(w)$$

и $\alpha_{k,s}$ *определены в Лемме 4.1.*

Доказательство. Положив $n = \pm N$ в (4.3), получим

$$\Delta_{\pm N}^w(\Delta_n^p(\theta, \hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1} N^p} \sum_{t=w}^{r+1} \frac{1}{N^t} \sum_{s=w}^{t} \frac{A_{t+q-s}(f)}{(\pm i\pi)^{t-s}} \beta_{p,q}(w,s,t) + o(N^{-q-p-r-2}).$$

Как уже упоминалось выше, когда τ_k корни полинома Лагерра $L_p^q(x)$, то коэффициенты $\gamma_k(\tau)$ имеют явную форму (см. (4.1)) и, следовательно, $\beta_{p,q}(w,s,t)$ может быть переписано в виде

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = \frac{(p+q)!}{(t+q-s)!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(t+p-k+q)!}{(q+p-k)!(p-k+s)!} \times \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} (k+j)^{s+p-k}. \tag{4.9}$$

Для доказательства (4.7) и (4.8) достаточно показать, что

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = 0, \quad t \leq \frac{w+p-1}{2}, \tag{4.10}$$

Применяя формулу бинома Ньютона, мы перепишем (4.9) в форме

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = \frac{(p+q)!}{(t+q-s)!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{(t+q+p-k)!}{(q+p-k)!(p-k+s)!} \sum_{u=0}^{s+p-k} \binom{s+p-k}{u} k^u \times \sum_{j=0}^{w+p-k} (-1)^j \binom{w+p-k}{j} j^{s+p-k-u}.$$

Учитывая, что последняя сумма равна нулю при $s+p-k-u < w+p-k$, мы получим

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = (-1)^{w+p}\frac{(p+q)!}{(t+q-s)!}\sum_{\alpha=0}^{s-w}\frac{1}{(s-w-\alpha)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^{s-\alpha-w}\binom{p}{k}$$
$$\times\frac{(t+q+p-k)!}{(q+p-k)!}\frac{(w+p-k)!}{(w+p-k+\alpha)!}S(p-k+\alpha+w,p-k+w),$$

где $S(n,k)$ числа Стирлинга второго рода ([18]).

Числа Стирлинга второго рода имеют представление ([18])

$$S(k+\alpha,k) = \sum_{j=0}^{\alpha}\binom{k+\alpha}{j+\alpha}c_j(\alpha),\ \alpha\geq 0, \tag{4.11}$$

где $c_j(\alpha)$ присоединенные числа Стирлинга второго рода. Тогда

$$S(p-k+\alpha+w,p-k+w) = \sum_{j=0}^{\alpha}\binom{p-k+w+\alpha}{j+\alpha}c_j(\alpha)$$

и для чисел $\beta_{p,q}(w,s,t)$ получим

$$\beta_{p,q}(w,s,t) = (-1)^{w+p}\frac{(p+q)!}{(t+q-s)!}\sum_{\alpha=0}^{s-w}\frac{1}{(s-w-\alpha)!}\sum_{j=0}^{\alpha}\frac{c_j(\alpha)}{(j+\alpha)!}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^{s-\alpha-w}\binom{p}{k}$$
$$\times\frac{(t+q+p-k)!}{(q+p-k)!}\frac{(w+p-k)!}{(w+p-k-j)!}. \tag{4.12}$$

Это доказывает оценку (4.10) ввиду тождества (4.6). □

Теорема 4.2. *Пусть p четное и $f^{(q+p+\frac{p}{2}+1)}\in AC[-1,1]$ для некоторых $q\geq 0$ и $p\geq 1$. Пусть $\theta_k=\theta_{-k}=1-\frac{\tau_k}{N}$, $k=1,\ldots,p$, где τ_k корни полинома Лагерра: $L_p^q(\tau_k)=0$, $k=1,\ldots,p$. Тогда при $|x|<1$*

$$R_{N,q,p}(f,x) = A_q(f)\frac{(-1)^N}{2^{p+1}\pi^{q+1}N^{q+p+\frac{p}{2}+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$$
$$+o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}),\quad N\to\infty,$$

где $\beta_{p,q}$ определены в Лемме 4.2.

Доказательство. Применение преобразования Абеля к $R^{+}_{N,q,p}(f,x)$ (см. (3.2)) приводит к разложению

$$\begin{aligned} R^{\pm}_{N,q,p}(f,x) &= -\frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k}e^{\pm i\pi x})}\frac{\Delta^0_{\pm N}(\Delta^p_n(\theta,\hat F))}{1+e^{\pm i\pi x}} \\ &- \frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k}e^{\pm i\pi x})}\sum_{w=1}^{\frac{p}{2}+1}\frac{\Delta^w_{\pm N}(\Delta^p_n(\theta,\hat F))}{(1+e^{\pm i\pi x})^{w+1}} \\ &+ \frac{1}{\prod_{k=1}^{p}(1+\theta_{\pm k}e^{\pm i\pi x})}\frac{1}{(1+e^{\pm i\pi x})^{\frac{p}{2}+2}}\sum_{n=N+1}^{\infty}\Delta^{\frac{p}{2}+2}_{\pm n}(\Delta^p_n(\theta,\hat F))e^{\pm i\pi n x}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Согласно Лемме 4.1, $\Delta_n^{\frac{p}{2}+2}(\Delta_n^p(\theta,\hat{F})) = \frac{o(N^{-p})}{n^{q+\frac{p}{2}+2}}$, $N\to\infty$, $|n|\geq N+1$ и, следовательно, последний член в правой части (4.13) имеет порядок $o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1})$. Оценки (4.7) и (4.8) Леммы 4.2 показывают, что второе слагаемое в (4.13) имеет порядок $O(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2})$. Поэтому

$$(4.14)\quad R_{N,q,p}^{\pm}(f,x) = -\frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{(1+e^{\pm i\pi x})^{p+1}}\Delta_{\pm N}^0(\Delta_n^p(\theta,\hat{F})) + o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}),\ N\to\infty.$$

Оценка (4.7) приводит к разложению

$$\Delta_{\pm N}^0(\Delta_n^p(\theta,\hat{F})) = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1}N^p}\sum_{t=\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}+1}\frac{1}{N^t}\sum_{s=0}^{t}A_{t+q-s}(f)\frac{\beta_{p,q}(0,s,t)}{(\pm i\pi)^{t-s}} + o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2})$$

$$(4.15)\qquad = \frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1}N^{p+\frac{p}{2}}}\sum_{s=0}^{\frac{p}{2}}A_{\frac{p}{2}+q-s}(f)\frac{\beta_{p,q}\left(0,s,\frac{p}{2}\right)}{(\pm i\pi)^{\frac{p}{2}-s}} + O(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2}).$$

Формула (4.12) показывает, что согласно тождеству (4.6) имеем, что $\beta_{p,q}\left(0,s,\frac{p}{2}\right) = 0$ для $s=0,\ldots,\frac{p}{2}-1$ и, следовательно, в правой части уравнения (4.15), только члены $s=\frac{p}{2}$ ненулевые, что наконец, приводит к оценке

$$\Delta_{\pm N}^0(\Delta_n^p(\theta,\hat{F})) = A_q(f)\frac{(-1)^{N+1}}{2(\pm i\pi N)^{q+1}N^{p+\frac{p}{2}}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)+O(N^{-q-p-\frac{p}{2}-2}),\ N\to\infty.$$

Подставив это в (4.14), получим

$$R_{N,q,p}^{\pm}(f,x) = A_q(f)\frac{e^{\pm i\pi(N+1)x}}{(1+e^{\pm i\pi x})^{p+1}}\frac{(-1)^N}{2(\pm i\pi)^{q+1}N^{p+q+\frac{p}{2}+1}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)+o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}),$$

что приводит к следующему представлению ошибки

$$R_{N,q,p}(f,x) = A_q(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+1}N^{p+q+\frac{p}{2}+1}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)Re\left[\frac{e^{i\pi(N+1)x}}{(1+e^{i\pi x})^{p+1}i^{q+1}}\right]+o(N^{-q-p-\frac{p}{2}-1}).$$

Это завершает доказательство. □

Точно также можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть p нечетное и $f^{(q+p+\frac{p+1}{2}+1)}\in AC[-1,1]$ для некоторых $q\geq 0$ и $p\geq 1$. Пусть $\theta_k=\theta_{-k}=1-\frac{\tau_k}{N}$, $k=1,\ldots,p$, где τ_k корни полинома Лагерра: $L_p^q(\tau_k)=0$, $k=1,\ldots,p$. Тогда, при $|x|<1$*

$$R_{N,q,p}(f,x) = \frac{\varphi_{N,q,p}(x)}{N^{p+q+\frac{p+1}{2}+1}} + o(N^{-p-q-\frac{p+1}{2}-1}),\quad N\to\infty$$

где

$$\varphi_{N,q,p}(x) = A_q(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{2^{p+1}\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p+1}{2},\frac{p+1}{2}\right)$$
$$-A_{q+1}(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+2}}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(x(2N-p+1)-q)}{2^{p+1}\cos^{p+1}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(0,\frac{p-1}{2},\frac{p+1}{2}\right)$$

$$+A_q(f)\frac{(-1)^N}{\pi^{q+1}}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(x(2N-p)-q)}{2^{p+2}\cos^{p+2}\frac{\pi x}{2}}\beta_{p,q}\left(1,\frac{p+1}{2},\frac{p+1}{2}\right),$$

и $\beta_{p,q}$ определены в Лемме 4.2.

Abstract. The paper considers a problem of approximation of functions by means of their finite number of Fourier coefficients. Convergence acceleration of approximations by the truncated Fourier series is achieved by application of polynomial and rational correction functions. Rational corrections include unknown parameters whose determination is a crucial problem. We consider an approach connected with the roots of the Laguerre polynomials and study the rates of convergence of such approximations.

Список литературы

[1] B. Adcock, Modified Fourier expansions: theory, construction and applications. PHD thesis, Trinity Hall, University of Cambridge (2010).

[2] G.A. Baker, and P. Graves-Morris, Padė Approximants, Encyclopedia of mathematics and its applications. Vol. 59, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1966).

[3] G. Baszenski, F.-J. Delvos, and M. Tasche. *A united approach to accelerating trigonometric expansions*, Comput. Math. Appl. **30**(3-6), 33–49 (1995).

[4] H. Bateman, Higher Transcendental functions. Vol. II, McGraw-Hill Book Company (1953).

[5] D. Batenkov, and Y. Yomdin. *Algebraic Fourier reconstruction of piecewise smooth functions,* Mathematics of Computation, **81**(277), 277–318 (2012).

[6] J. P. Boyd, *Acceleration of algebraically-converging Fourier series when the coefficients have series in powers of* $1/n$, J. Comp. Phys. **228**(5), 1404–1411 (2009).

[7] E.W. Cheney, Introduction to Approximation Theory. McGraw-Hill, New York (1966).

[8] J. Geer, *Rational trigonometric approximations using Fourier series partial sums*, Journal of Scientific Computing, **10**(3), 325-356 (1995).

[9] W. B. Jones and G. Hardy, *Accelerating Convergence of Trigonometric Approximations*, Math. Comp., 24, 47-60 (1970).

[10] A. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях. Лекции прочитанные в 1906 году. С. Петербург 1907, Типолитография Биркенфельда.

[11] C. Lanczos, Discourse on Fourier series. Oliver and Boyd, Edinburgh (1966).

[12] A. Nersessian, and A. Poghosyan, *On a rational linear approximation of Fourier series for smooth functions,* Journal of Scientific Computing, **26**(1), 111–125 (2006).

[13] A. Poghosyan, *On an autocorrection phenomenon of the Krylov-Gottlieb-Eckhoff method,* IMA Journal of Numerical Analysis, **31**(2), 512–527 (2011).

[14] A. Poghosyan, *Fast convergence of the Fourier-Pade approximation for smooth functions (abstract).* International Conference Harmonic Analysis and Approximations V, 10-17 September, Tsaghkadzor, Armenia, (2011), http://math.sci.am/conference/sept2011/abstracts.html.

[15] A. Poghosyan, T. Barkhudaryan, and A. Nurbekyan, *Convergence accleration of Fourier series by the roots of the Laguerre polynomial,* Proceedings of the Third Russian-Armenian workshop on mathematical physics, complex analysis and related topics, October 4-8 (2010), Tsaghkadzor, Armenia, 137–141, http://math.sci.am/conference/oct2010/abstractsbook.html.

[16] A. Poghosyan, *On a convergence of the L_2-optimal rational approximation,* Доклады Национальной Академии Наук Армении, **112**(4), 341–349 (2012).

[17] И. И. Привалов, Ряды Фурье. Гос. техн.-теор. изд-во, Москва-Ленинград (1931).

[18] J. Riordan, Combinatorial identities. New York:Wiley (1979).

[19] G. P. Tolstov, Fourier series (translated from the Russian (1950) by R. A. Silverman). Prentice-Hall, New Jersey (1962).

Поступила 24 февраля 2012