Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 71-81.

ОЦЕНКИ МЕР ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОСТИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ АССОЦИИРОВАННЫХ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. Г. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *math@ysu.am*

Аннотация. В работе получены оценки типа $\Sigma\delta^{\alpha}$, для мер исключительности исключительных значений ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций.

MSC2010 number: 30D30, 30D35, 30C15.
Ключевые слова: теория Неванлинны; теория Альфорса; свойство близости а-точек.

1. Введение

Предполагаем известными основные положения теории распределений значений мероморфных функций, теории поверхностей наложения Л.Альфорса, пользуемся стандартными обозначениями (см. [1]).

В теории распределения значений мероморфных функций в качестве меры близости мероморфной функции $w(z)$ к заданному значению $a \in \mathbb{C}$ рассматривается обычно неванлинновская функция приближения (см.[1])

$$m(r,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|w(re^{i\varphi}) - a\right|^{-1} d\varphi.$$

С конца шестидесятых годов двадцатого столетия активно изучается более тонкая характеристика близости $w(z)$ к a, величина (см. [2]-[7])

$$L(r,a) = \max_{|z|=r} \ln^+ |w(z) - a|^{-1}.$$

Установлены многочисленные аналогии в поведении функций $L(r,a)$ и $m(r,a)$, составляющие предмет теории роста В. Петренко (см.[2]). В теории распределений значений мероморфных функций получение окончательных результатов зачастую упирается в оценки логарифмических производных функций $w(z)$, которые рассматривались как вспомогательные, технические средства (см. [1], [2] и [8]-[10]). Между тем в работах [11] и [12] было установлено, что величины

$$P_k(r,a) = r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left|\ln^{(k)}(w(z)-a)\right|^{1/k} d\varphi,\ k \in N, \quad (z = re^{i\varphi})$$

где $\Delta(r,a) = \Delta(r,a,w) = \{z : |z| = r, |w(z)-a| \leqslant 1\}$, обнаруживают свойство, аналогичное свойствам функций $m(r,a)$, т.е. для них выполняется аналог второй основной теоремы Р.Неванлинны, и соответственно, аналог соотношения дефектов. Доказано, что для мероморфной в $\mathbb{C}$ функции $w(z)$ конечного нижнего порядка λ множество значений a, в которых $D_k(a) = D_k(a,w) = \varliminf\limits_{r\to\infty} (P_k(r,a)/T(r)) > 0$, не более чем счетно, и имеет место неравенство

$$\sum_{(a)} D_k(a) \leqslant K(k,\lambda), \tag{1.1}$$

где $T(r)$- неванлинновская характеристика, $K(k,\lambda)$ - постоянная зависящая от k и λ. Для величин $P_k(r,a)$ устанавливаются аналог известного тождества Картана, эквивалентного следующему соотношению (см. [13]-[15])

$$\int\limits_0^{2\pi} P_k(r,e^{i\theta})d\theta = o\left[T(r)\right], r \to \infty. \tag{1.2}$$

Тем самым, указанные интегралы становятся объектом самостоятельного изучения. На актуальность изучения таких объектов указывает, кроме всего, следующее простое предложение: если мероморфная в $\mathbb{C}$ функция $w(z)$ имеет по крайней мере два исключительных в смысле В. Петренко значения, то есть существуют значения a_1 и a_2 для которых $\beta(a_1) > 0$, $\beta(a_2) > 0$, где

$$\beta(a) = \beta(a,w) = \varliminf_{r\to\infty} (L(r,a)/T(r)),$$

то для любых $a \in \mathbb{C}$ и r справедливы неравенства

$$m(r,a) \leqslant L(r,a) \leqslant P(r,a) + O(1), r \to \infty, \text{где} P(r,a) = P_1(r,a). \tag{1.3}$$

Так что, если E_1- множество дефектных в смысле Р. Неванлинны значений, E_2- множество исключительных значений в смысле В. Петренко, E_3- множество "исключительных" значений a, для которых $D(a) = D_1(a) > 0$, то из неравенства (1.3) следует, что имеют место включения $E_1 \subset E_2 \subset E_3$, если число элементов E_1 больше единицы. Из соотношений (1.2) и (1.3) следует соотношение типа тождества Картана в теории роста мероморфных функций:

$$\int\limits_0^{2\pi} L(r,e^{i\theta})d\theta = o\left[T(r)\right], r \to \infty.$$

Отметим, что этот результат отсутствовал в этой теории.

В работе [16] рассматривается вопрос: что можно сказать о мерах исключительности $D(a)$ исключительных значений a, кроме того, что должно выполняться (1.1): получены неравенства типа $\sum\limits_{(a)}\left[\delta(a)/\ln\frac{e}{\delta(a)}\right]^{\alpha}$, для мер исключительности $D(a)$. В данной работе устанавливаются следующие результаты:

Теорема 1.1. *Пусть $w(z)$ мероморфная в $\mathbb{C}$ функция конечного нижнего порядка λ; $a_\nu \in \mathbb{C}, \nu = 1,2,...,n, a_i \neq a_j$ при $i \neq j$. Тогда существует такая постоянная $K(\lambda) < \infty$, зависящая от λ, что для некоторой неограниченной последовательности значений r выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\lambda)T(r), \tag{1.4}$$

где $T(r)$- неванлинновская характеристика, $|\Delta(r,a_\nu)|$- угловая мера множества $\Delta(r,a_\nu)$, $\varepsilon\in(0,1)$ - фиксированное число.

Теорема 1.2. *При условиях теоремы 1.1 выполняется следующее соотношение*

$$\sum_{\nu=1}^{n} D^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}(a_\nu) \leqslant K(\lambda), \tag{1.5}$$

где $K(\lambda)$- постоянная зависящая от λ, $\varepsilon_1 = 1/(6-4\varepsilon)$.

Следствие 1.1. *При условиях теоремы 1.1 имеет место неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \delta^{\frac{1}{3}+\varepsilon_2}(a_\nu) \leqslant K(\lambda), \tag{1.6}$$

где $\delta(a) = \varliminf\limits_{z\to\infty} (m(r,a)/T(r))$-дефект значения a, $\varepsilon_2 = 1/(15-9\varepsilon)$.

Следствие 1.2. *При условиях теоремы 1.1 выполняется*

$$\sum_{\nu=1}^{n} \beta^{\frac{1}{2}+\varepsilon_1}(a_\nu) \leqslant K(\lambda). \tag{1.7}$$

2. Вспомогательные результаты

Пусть $0<\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<1$- фиксированные числа. Обозначим

$$E_\alpha(R) = E_{\alpha_1}^{\alpha_2}(R) = \{r : \alpha_1 R < r < \alpha_2 R\}\,;\Delta_1(r,a) = \Delta(r,a)\cap\Delta(r,0,w'),$$

$$\Delta_2(r,a) = \Delta(r,a)\backslash\Delta(r,0,w'),\quad I(r,b) = r\int\limits_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-b}\right|d\varphi,\quad b\in\mathbb{C},\ z=re^{i\varphi}.$$

Лемма 2.1. *Пусть $w(z)$- мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a,b \in \mathbb{C}$ такие, что $|a-b|>2$. Тогда выполняется следующее соотношение*

$$\int\limits_{E_\alpha(R)}\frac{I(r,b)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = o[A(R)]R,\quad R\to\infty, \tag{2.1}$$

где $A(r)$- сферическая характеристика Альфорса, $|\Delta(r, a_\nu)|$- угловая мера множества $\Delta(r, a_\nu)$, $\varepsilon \in (0,1)$- фиксированное число.

Доказательство. Поскольку при $z \in \Delta(r,a)$, $|w(z) - b| > 1$, то имеем

$$I(r,b) \leqslant r \int\limits_{\Delta(r,a)} |w'(z)|\, d\varphi.$$

Используя неравенство Гельдера при $p = 2-\varepsilon$, $q = (2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$, получим

$$I(r,b) \leqslant r \left(\int\limits_{\Delta(r,a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} |\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Отсюда, учитывая следующее неравенство

$$\left(\sum_\nu c_\nu\right)^\beta \leqslant \sum_\nu c_\nu^\beta, \quad c_\nu \geqslant 0, \quad 0 < \beta < 1, \tag{2.2}$$

и что $|w'(z)| > 1$ при $z \in \Delta_2(r,a)$ имеем

$$\frac{I(r,b)}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant r \left(\int\limits_{\Delta_1(r,a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} + r \left(\int\limits_{\Delta_2(r,a)} |w'(z)|^{2}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}. \tag{2.3}$$

Применяя неравенство Гельдера при $p = 2/(2-\varepsilon)$, $q = 2/\varepsilon$, для первого интеграла в правой части получаем

$$r \left(\int\limits_{\Delta_1(r,a)} |w'(z)|^{2-\varepsilon}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}} \leqslant K(\varepsilon) r \left(\int\limits_{\Delta_1(r,a)} |w'(z)|^{2}\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.4}$$

Так как при $z \in \Delta(r,a)$, $|w(z)| < 1 + |a|$, то из неравенств (2.3) и (2.4) имеем

$$\frac{I(r,b)}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\varepsilon, a) r \left(\int\limits_{\Delta(r,a)} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2} d\varphi \right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}},$$

где $K(\varepsilon, a)$ - постоянная зависящая от ε и a. Отсюда используя неравенство Гельдера при $p = 2-\varepsilon$, $q = (2-\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ получим

$$\int\limits_{E_a(R)} \frac{I(r,b)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} = o\,[A(R)]\, R, \quad R \to \infty.$$

Лемма 2.1 доказана. □

Обозначим через $n(r,a)$ и $n(r,b)$ количества a - точек и b - точек функции $w(z)$ в круге $|z| < r$, а через $n(r,a,b)$ - количество тех a - точек $z_k(a) \in \tilde{E}_k(r) \subset$

$\bigcup\limits_{i=1}^{\tilde{\Phi}(r)} \tilde{E}_i(r)$, для каждой из которых найдется b - точка $z_k(b)$ из области $\tilde{E}_k(r) \subset \{|z| < r\}$, $k = 1, 2, ..., \tilde{\Phi}(r)$ ($\tilde{E}_k(r)$ и $\tilde{\Phi}(r)$ определены в [17]).
В работе [18] доказана следующая лемма:

Лемма 2.2. *Пусть $w(z)$- мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}$, $\nu = 1, 2, ..., n$, такие что $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Если $1 < c = const < \infty$, то*

$$\sum_{\nu=1}^{n} [n(r, a_\nu) + n(r, b_\nu) - 2n(r, a_\nu, b_\nu)] \leqslant K_0 \frac{c}{c-1} T(cr), \quad r \notin E,\ r > r^*, \tag{2.5}$$

где $\int\limits_E d\ln t < \infty$, K_0 - абсолютная постоянная[1].

Лемма 2.3. *Пусть $w(z)$ - мероморфная в $\mathbb{C}$ функция; $a, b \in \mathbb{C}$, такие что $|a - b| > 2$. Тогда при $R > R_0$ выполняется следующее неравенство ($R' = \alpha_3 R$)*

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{P(r,a)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_1 \{m(R', a) + m(R', b)\} R + K_2 \{(n(R', a) + n(R', b)$$

$$-2n(R', a, b))\} R + K_3 \left\{A^{\frac{1}{8}}(R') L(R') + o[A(R')]\right\} R \ln R, \tag{2.6}$$

где $L(r), A(r)$ - сферические характеристики Альфорса.

Доказательство. Индексом i будем отмечать те a-точки $z_i(a)$ и b- точки $z_i(b)$, которые фигурируют в определении $n(R', a, b)$; остальные a-точки (b- точки) из круга $|z| < R'$ будем отмечать индексом $l(j) - z_l(a)(z_j(b))$. При доказательстве этой леммы используем неравенство Гельдера при $p = 2 - \varepsilon$,
$q = (2 - \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$. Используя формулу Неванлинны получим

$$P(r,a) \leqslant r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \ln \left| \frac{w(R'e^{i\theta}) - a}{w(R'e^{i\theta}) - b} \right| \right| \frac{R' d\theta}{|R'e^{i\theta} - z|^2} \right\} d\varphi$$

$$+ \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{1}{z_i(b) - z} - \frac{1}{z_i(a) - z} \right| d\varphi + \sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{1}{z - z_j(b)} \right| d\varphi$$

$$+ \sum_{l=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{1}{z - z_l(a)} \right| d\varphi + \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} r \int\limits_{\Delta(r,a)} \left| \frac{\bar{z}_i(a)}{R'^2 - \bar{z}_i(a) z} - \frac{\bar{z}_i(b)}{{R'_n}^2 - \bar{z}_i(b) z} \right| d\varphi$$

[1] В дальнейшем обозначим через K_i, $i = 0, 1, 2, ...$ постоянные, не обязательно одинаковые, даже на протяжении одной цепочки неравенств.

$$+\sum_{j=1}^{n(R',b)-n(R',a,b)} r\int_{\Delta(r,a)}\left|\frac{|z_j(b)|}{R'^2-\bar{z}_j(a)z}\right|d\varphi+\sum_{l=1}^{n(R',a)-n(R',a,b)} r\int_{\Delta(r,a)}\left|\frac{|z_l(b)|}{R'^2-\bar{z}_l(a)z}\right|d\varphi+$$

$$+r\int_{\Delta(r,a)}\left|\frac{w'(z)}{w(z)-b}\right|d\varphi=I_1(r)+\cdots+I_8(r) \tag{2.7}$$

Используя неравенство Гельдера нетрудно видеть, что

$$\int_{E_\alpha(R)}\frac{I_1(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\leqslant K_1\left\{m(R',a)+m(R',b)\right\}R. \tag{2.8}$$

Обозначим через $\rho_i=|z_i(a)-z_i(b)|,\quad i=1,2,\cdots,n(R',a,b)$ и применяя неравенство Гельдера для следующего интеграла, получим

$$I_i^{(2)}(r)=r\int_{\Delta(r,a)}\left|\frac{1}{z_i(b)-z}-\frac{1}{z_i(a)-z}\right|d\varphi\leqslant$$

$$\leq r\rho_i\left(\int_{\Delta(r,a)}\frac{d\varphi}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}\,|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}.$$

Отсюда вытекает

$$\int_{E_\alpha(R)}\frac{I_i^{(2)}(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\leqslant K\rho_i R^{\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}A_i(R), \tag{2.9}$$

где

$$A_i(R)=\left(\int_{E_\alpha(R)}\int_{\Delta(r,a)}\frac{rdrd\varphi}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}\,|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}.$$

Оценим этот интеграл. Для этого обозначим $D_a(r)=\{z:|z-a|\leqslant r\}$, $D_a^b(r)=\left\{z:\left|z-\frac{a+b}{2}\right|\leqslant r\right\}$, $\bar{D}_a^b(r)=D_a^b(r)\backslash\{D_a(r/2)\cup D_b(r/2)\}$. Используя неравенство (1.2) имеем

$$A_i(R)\leqslant\left(\iint_{D_{z_i(a)}(\rho_i/2)}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+\left(\iint_{D_{z_i(b)}(\rho_i/2)}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+\left(\iint_{\bar{D}_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}+$$

$$+\left(\iint_{\bar{D}_{z_i(a)}^{z_i(b)}(2R)\backslash D_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)}\frac{rdrd\varphi}{|z-z_i(a)|^{2-\varepsilon}\,|z-z_i(b)|^{2-\varepsilon}}\right)^{\frac{1}{2-\varepsilon}}=I_{i,1}(R)+\cdots+I_{i,4}(R).$$

Так как при $z\in D_{z_i(a)}(\rho_i/2)$, $|z-z_i(b)|\geqslant\rho_i/2$, то получим, что $I_{i,1}(R)\leqslant K_1\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$. Точно так же $I_{i,2}(R)\leqslant K_2\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$. Учитывая, что когда $z\in\bar{D}_{z_i(a)}^{z_i(b)}(\rho_i)$

или когда $z \in D^{z_i(b)}_{z_i(a)}(2R)\backslash D^{z_i(b)}_{z_i(a)}(\rho_i)$, то $|z - z_i(a)| > \rho_i/2$, $|z - z_i(b)| > \rho_i/2$; и исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что $I_{i,3}(R) \leqslant K_3\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}$, $I_{i,4}(R) \leqslant K_4\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}\{\ln R - \ln \rho_i\}$. Окончательно из этих неравенств имеем $A_i(R) \leqslant K\rho_i^{-\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}}\{\ln R - \ln\rho_i\}$, $i = 1, 2, ..., n(R', a, b)$. Отсюда и из неравенства (2.9) получим

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_i^{(2)}(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant KR^{\frac{2-2\varepsilon}{2-\varepsilon}} \ln R \sum_{i=1}^{n(R',a,b)} \rho_i^{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}}. \tag{2.10}$$

В работе [17] для ρ_i устанавливается следующая оценка

$$\rho_i < d(\tilde{E}_i(R')) < KR\varphi^8(R')A^{-\frac{1}{2}}(R'),\ i = 1, 2, ..., n(R', a, b), \tag{2.11}$$

где $d(x)$- диаметр множества x; $\varphi(r)$- произвольная монотонная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $r \to +\infty$. Из неравенств (2.10) и (2.11) имеем

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_2(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant KR\ln R\,[\varphi(R')]^{\frac{8\varepsilon}{2-\varepsilon}}\,[A(R')]^{-\frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}}n(R', a, b). \tag{2.12}$$

В работе [17] для $\tilde{\Phi}(r)$ получено следующее неравенство

$$\tilde{\Phi}(R') \leqslant A(R') + \frac{8A(R')}{\varphi(R')} + h\varphi^2(R')L(R').$$

Поскольку $\varphi(r)$- произвольная функция, то, выбирая $\varphi^{24}(r) < A(r)$, и учитывая, что $n(R', a, b) < \Phi(R')$, из неравенства (2.12) получаем

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_2(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_2\left\{A^{\frac{1}{8}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\} R\ln R. \tag{2.13}$$

Используя неравенство Гельдера и исходя из геометрических соображений, нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_3(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_3\{n(R', b) - n(R', a, b)\} R, \tag{2.14}$$

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_4(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_4\{n(R', a) - n(R', a, b)\} R. \tag{2.15}$$

Оценим интеграл I_5. Для этого обозначим через

$$I_5^i(r) = r\int\limits_{\Delta(r,a)} \left|\frac{\bar{z}_i(a)}{R'^2 - \bar{z}_i(a)z} - \frac{\bar{z}_i(b)}{R'^2 - \bar{z}_i(b)z}\right| d\varphi,\ i = 1, 2, ..., n(R', a, b).$$

Применяя неравенство Гельдера легко видеть, что $I_5^i(r) \leqslant K_5\rho_i R^{-2} r\,|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}$. Используя неравенство (2.11) получим

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_5(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_5 R\varphi^8(R')A^{-\frac{1}{2}}(R')n(R',a,b).$$

Отсюда, как и при выводе неравенства (2.13) имеем

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_5(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_5\left\{A^{\frac{1}{8}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\}R. \tag{2.16}$$

Нетрудно видеть, что

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_6(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_6\{n(R',b) - n(R',a,b)\}R, \tag{2.17}$$

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{I_7(r)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_7\{n(R',a) - n(R',a,b)\}R. \tag{2.18}$$

Учитывая лемму 1.1 и неравенства (2.7), (2.8) и (2.13)-(2.18), получим

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \frac{P(r,a)dr}{|\Delta(r,a)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K_1\{m(R',a) + m(R',b)\}R+$$

$$+K_2\{n(R',a) + n(R',b) - 2n(R',a,b)\}R + K_3\left\{A^{\frac{1}{8}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\}R\ln R.$$

Лемма 2.3 доказана. □

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1.1 Пусть $a_\nu, b_\nu \in \mathbb{C}$, $|a_\nu - b_\nu| > 2$, $\nu = 1,2,...,n$. Записав для каждого a_ν неравенство (2.6) леммы 2.3 и просуммировав, имеем

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \left\{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r,a_\nu)}{|\Delta(r,a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\right\}dr \leqslant K_1 R\sum_{\nu=1}^{q}[m(R',a_\nu) + m(R',b_\nu)] +$$

$$+K_2 R\sum_{\nu=1}^{n}[n(R',a_\nu) + n(R',b_\nu) - 2n(R',a_\nu,b_\nu)] +$$

$$+K_3\left\{A^{\frac{1}{8}}(R')L(R') + o[A(R')]\right\}R\ln R. \tag{3.1}$$

По второй основной теореме Р.Неванлинны (с учетом леммы о логарифмической производной) при $R > R_0^*$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{n}[m(R',a_\nu) + m(R',b_\nu)] \leqslant 3T(R'). \tag{3.2}$$

Положим теперь $\alpha_1 = 1/(\lambda+2)$, $\alpha_2 = 1/(\lambda+1)$. Из оценки $L(r) < [A(r)]^{2/3}$, $r \notin E$ (см. [1], п.326) вытекает, что при $R > R_1^*$ в каждом интервале $\left(\frac{1+\alpha_2}{2}R, \frac{3+\alpha_2}{4}R\right)$ найдется такая точка $R' = \alpha_3(R)R = \alpha_3 \cdot R$, для которой $L(R') = L(\alpha_3 R) \leqslant [A(\alpha_3 R)]^{\frac{2}{3}}$ (здесь мы учли, что E имеет конечную логарифмическую меру). Отсюда учитывая очевидное неравенство $A(r) << T(\beta r)/\ln\beta$, $(\beta > 1)$, имеем

$$L(R') \leqslant \left[\left(\ln\frac{1}{\alpha_3}\right)^{-1} T(R)\right]^{\frac{2}{3}}. \tag{3.3}$$

Далее положим $c = (\lambda+2)/(\lambda+1)$ и используя лемму 2.2, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}[n(R', a_\nu) + n(R', b_\nu) - 2n(R', a_\nu, b_\nu)] \leq K(\lambda)T(cR). \tag{3.4}$$

Из неравенств (3.1)-(3.4) следует, что

$$\int\limits_{E_\alpha(R)} \left\{\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\right\}dr \leqslant K(\lambda)T(cR)R.$$

Используя теорему о среднем значении, в некоторой точке $R^* \in E_\alpha(R)$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(R^*, a_\nu)}{|\Delta(R^*, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\lambda)T(cR), \quad R > R_0. \tag{3.5}$$

Выберем множество $R_n = R_n(\alpha_1, c)$ значений R, зависящих только от α_1 и c, для которых выполняется неравенство

$$T(cR_n) = T\left(\frac{c}{\alpha_1}\cdot\alpha_1 R_n\right) \leqslant \left(\frac{c}{\alpha_1}\right)^{\lambda+1} T(\alpha_1 R_n). \tag{3.6}$$

Возможность такого выбора обеспечивается леммой 1.3.1 из работы [2]. Ясно что для таких R_n существуют множества $R_n^* = R_n^*(\alpha_1, c)$ значений R^*, что выполняется неравенство (3.5). Из неравенств (3.5) и (3.6) получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{P(R_n^*, a_\nu)}{|\Delta(R_n^*, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}} \leqslant K(\lambda)T(R_n^*).$$

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.2 Пусть $K > 1$ - фиксированное число. Учитывая, что при $z \in \Delta(r, a, w)\backslash\Delta(r, Ka, Kw)$, $1/K < |w(z) - a| < 1$, имеем

$$P(r, a, w) = P(r, Ka, Kw) + O(L(z)), \quad r \to \infty. \tag{3.7}$$

Из неравенств (3.3) и (3.6) следует, что существует последовательность $r = r_n \to \infty$, $n \to \infty$, такое, что $L(r) = o[T(r)]$. Отсюда, используя соотношение (3.7) получим $P(r, a, w) = P(r, Ka, Kw) + [T(r)]$, $r \to \infty$, следовательно

$$D(a, w) = D(Ka, Kw). \tag{3.8}$$

Предположим теперь, что $\{a_\nu\}$ является конечным множеством комплексных чисел, удовлетворяющих условию

$$|a_i - a_j| > 2, \ (1 \leqslant i < j \leqslant n.) \tag{3.9}$$

Если a_n различны и не удовлетворяют условию (3.9), то при достаточно большой постоянной $K > 0$ $K\,|a_i - a_j| > 2 \quad (i \neq j)$. Следовательно из соотношения (3.8) следует, что теорему достаточно доказать при условии (3.9). Пусть теперь $p = (3-2\varepsilon)/(2-\varepsilon)$, $q = (3-2\varepsilon)/(1-\varepsilon)$ и $l = (1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)$. Ясно, что $l \cdot q/p = 1$. Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} P^{\frac{1}{p}}(r, a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P^{\frac{1}{p}}(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{\frac{l}{p}}} \cdot |\Delta(r, a_\nu)|^{\frac{l}{p}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{l}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta(r, a_\nu)|\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Из условия (3.9) следует, что $\Delta(r, a_i) \cap \Delta(r, a_j) = \Phi$, при $i \neq j$, следовательно $\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\Delta(r, a_\nu)| \leqslant 2\pi$. Учитывая это и теорему 1.1, получим, что для некоторой последовательности $r = r_n \to \infty$, $n \to \infty$ выполняется неравенство $\sum\limits_{\nu=1}^{n} P^{\frac{1}{p}}(r, a_\nu) \leqslant K(\lambda) T^{\frac{1}{p}}$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} D^{\frac{1}{p}}(a_\nu) \leqslant K(\lambda).$$

Теорема 1.2 доказана.

Доказательство следствия 1.1. Нетрудно видеть, что

$$\frac{m(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|} \leqslant P(r, a_\nu) + O(1), \ r \to \infty. \tag{3.10}$$

Положим теперь $p = (5-3\varepsilon)/(2-\varepsilon)$, $q = (5-3\varepsilon)/(3-2\varepsilon)$ и $\gamma = (3-2\varepsilon)/(2-\varepsilon)$. Тогда ясно, что $q\gamma/p = 1$. Используя неравенство Гельдера получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} m^{\frac{1}{p}}(r, a_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m^{\frac{1}{p}}(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{\frac{\gamma}{p}}} \cdot |\Delta(r, a_\nu)|^{\frac{\gamma}{p}} \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{m(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{\gamma}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\Delta(r, a_\nu)|\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда, учитывая (3.10) и что $\sum\limits_{\nu=1}^{n} |\Delta(r, a_\nu)| \leqslant 2\pi$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} m^{\frac{1}{p}}(r, a_\nu) \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{\gamma-1}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{P(r, a_\nu)}{|\Delta(r, a_\nu)|^{\frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Используя теорему 1.1 получим

$$\sum_{\nu=1}^{n} m^{\frac{1}{p}}(r, a_\nu) \leqslant K(\lambda) T^{\frac{1}{p}}(r), \ r = r_n \to \infty,$$

следовательно $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \delta^{\frac{1}{p}}(a_\nu) \leqslant K(\lambda)$. Следствие 1.1 доказано. Доказательство следствия 1.2 очевидно, так как $\beta(a) \leqslant D(a)$.

Автор выражает благодарность Г. А. Барсегяну за ценные обсуждения результатов.

Abstract. In this paper certain estimates of type $\Sigma\delta^{\alpha}$ for the measures of exceptions of the exceptional values associated with logarithmic derivatives of meromorphic functions are obtained.

Список литературы

[1] Р. Неванлинна, Однозначные Аналитические Функции, ОГИЗ (1941).
[2] В. П. Петренко, Рост Мероморфных Функций, Харьков: Выш. Школа (1978).
[3] Н. В. Говоров, "О проблеме Пейли", Функц. анализ и его приложения, **3**, вып. 2, 38 – 43 (1969).
[4] А. А. Гольдберг, "К вопросу о связи между дефектом и отклонением мероморфной функции", Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, вып. 29, 31 – 35 (1978).
[5] А. А. Гольдберг, И. В. Островский, "Некоторые теоремы о росте мероморфных функций", Зап. мат. отд. Харьк. ун-та и Харьк. мат. об-ва, Серия 4, **27**, 3 – 37 (1961).
[6] А. Э. Еременко, "Об отклонениях мероморфных функций конечного нижнего порядка", Теория функций, функ. анализ и их прилож., вып. 40, 56 – 64 (1983).
[7] Г. А. Барсегян, Докторская диссертация, Тбилиси (1984).
[8] W. H. J. Fuchs, "A theorem on the Nevanlinna deficiences of meromorphic functions of finite order", Ann.Math., **68**, no. 2, 203 – 209 (1958).
[9] W. H. J. Fuchs, "Proof of a conjecture of G. Polya concerning gap series", III J.Math., **7**, no. 4, 661 – 667 (1963).
[10] E. Muess, "Über eine Vermutung von Hayman", Math. Z., **119**, no. 1, 11 – 20 (1971).
[11] Г. А. Барсегян, "Исключительные значения, ассоциированные с логарифмическими производными мероморфных функций", Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **16**, no. 5, 408 – 423 (1981).
[12] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, "Исключительные значения, определяемые посредством высших производных мероморфных функций", Изв. АН. Арм. ССР, сер. матем., **28**, no. 3 (1993).
[13] В. К. Хейман, Мероморфные Функции, М., Мир (1966).
[14] Г. А. Барсегян, В. Г. Петросян, "Соотношения типа тождества Картана для величин, ассоциированных с логарифмическими производными мероморфных функций", Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., **25**, no. 5, 474 – 488 (1990).
[15] В. Г. Петросян, "Соотношения типа тождества Картана", ДАН Арм. ССР, **93**, no. 5, 200 – 205 (1992).
[16] В. Г. Петросян, "Некоторые оценки мер исключительности исключительных значений мероморфных функций конечного нижнего порядка", Арм. НИИНТИ, N73 АР-89, деп., 20с.
[17] Г. А. Барсегян, "Свойство близости a- точек мероморфных функций", Матем. сб., **120** (162), no. 1, 42 – 67 (1983).
[18] В. Г. Петросян, Кандидатская диссертация, Ереван (1990).

Поступила 17 мая 2012