Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 52-58.

ПОДПРЯМО НЕРАЗЛОЖИМЫЕ АЛГЕБРЫ СО СВЕРХТОЖДЕСТВАМИ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ДЕ МОРГАНА

Ю. М. МОВСИСЯН, В. А. АСЛАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *yurimovsisyan@yahoo.com*; *vahagn.aslanyan@gmail.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс подпрямо неразложимых алгебр, в которых выполняются сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. Такие алгебры называются подпрямо неразложимыми квазирешетками Де Моргана. Соответствующая характеризация оказывается близкой к классической характеризации подпрямо неразложимых Де Моргановых алгебр.

MSC2010 number: 06D30, 08A05, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: сверхтождество; алгебра Де Моргана; квазирешетка Де Моргана; подпрямо неразложимая алгебра.

1. Введение

О понятиях сверхтождества, категории T-алгебр и других предварительных понятиях и результатах см. в [1] – [4]. Множество всех сверхтождеств класса алгебр V назовем сверхэквациональной (или гиперэквациональной) теорией этого класса и обозначим через $Heq(V)$.

Алгебра $Q(+,\cdot,')$ с двумя бинарными и одной унарной операциями называется алгеброй (или решеткой) Де Моргана, если $Q(+,\cdot)$ - дистрибутивная решетка и $Q(+,\cdot,')$ удовлетворяет тождествам $(x+y)' = x'\cdot y'$ и $x'' = x$, где $x'' = (x')'$ ([5], p.3, [6]–[10]). Очевидно, что здесь выполняется и тождество: $(x\cdot y)' = x' + y'$. Сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана характеризуются в работе [11]. В настоящей работе с точностью до изоморфизма характеризуются подпрямо неразложимые алгебры со сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана.

Определение 1.1. *T-алгебра $\mathfrak{A} = (Q,\Sigma)$, где $T = \{1,2\}$, называется квазирешеткой Де Моргана (или Де Моргановой квазирешеткой), если она удовлетворяет всем сверхтождествам многообразия алгебр Де Моргана.*

В работе [12] вводится понятие Де Моргановой суммы и дается общая характеризация Де Моргановых квазирешеток с двумя бинарными операциями:

Теорема 1.1. *Алгебра $\mathfrak{A} = (Q, \{+, \cdot, ^-\})$ с двумя бинарными операциями $+, \cdot$ и одной унарной операцией $^-$ является квазирешеткой Де Моргана тогда и только тогда, когда она является алгеброй Де Моргана или Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана.*

Некоторые детали доказательства этой теоремы мы используем при доказательстве основного результата настоящей работы. Обозначим класс всех Де Моргановых квазирешеток через $\mathfrak{Q}\mathfrak{D}$. Из сверхтождества

$$X(x) = Y(x) (= \overline{x}) \tag{1.1}$$

вытекает, что унарная операция в любой квазирешетке Де Моргана –единственна. Будем обозначать ее через $^-$. Следующий результат также доказан в работе [12].

Предложение 1.1. *Если квазирешетка Де Моргана $\mathfrak{A} = (Q, \Sigma)$ подпрямо неразложима, то количество бинарных операций в множестве Σ не больше* $\mathbf{2}$.

Поэтому требуется найти подпрямо неразложимые квазирешетки Де Моргана с одной или двумя бинарными операциями.

Введем обозначения для следующих Де Моргановых алгебр: $\mathbf{2} = (\{0,1\}, \{+, \cdot, ^-\})$, $\mathbf{3} = (\{0, a, 1\}, \{+, \cdot, ^-\})$, где $\overline{a} = a$, и $\mathbf{4} = (\{0, a, b, 1\}, \{+, \cdot, ^-\})$, где $\overline{a} = a$, $\overline{b} = b$, $a + b = 1$, $a \cdot b = 0$. Обозначим далее следующие редукты этих алгебр: $\mathbf{2}^+ = (\{0,1\}, \{+, ^-\}), \mathbf{3}^+ = (\{0, a, 1\}, \{+, ^-\}), \mathbf{4}^+ = (\{0, a, b, 1\}, \{+, ^-\})$.

Сформулируем следующий известный результат.

Теорема 1.2. ([13]) *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми Де Моргановыми алгебрами являются алгебры* $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$.

Подпрямо неразложимые квазирешетки Де Моргана с одной бинарной операцией

Пусть $\mathfrak{A} = Q(+, ^-)$ является нетривиальной Де Моргановой квазирешеткой с одной бинарной операцией. Определим новую бинарную операцию $\cdot$ на множестве Q следующим образом: $x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}}$. Тогда, алгебра $\mathfrak{D} = Q(+, \cdot, ^-)$ является алгеброй Де Моргана. Действительно, так как $Q(+, ^-)$ является квазирешеткой Де Моргана, то в ней выполнены следующие тождества:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + x = x, \ x + y = y + x, \ x + (y + z) = (x + y) + z, \ \overline{\overline{x}} = x, \\ \overline{\overline{x + y} + \overline{x}} = x, \ \overline{x + y + z} = \overline{\overline{x} + z} + \overline{\overline{y} + z}. \end{array} \right. \tag{2.1}$$

(Это следует из соответствующих сверхтождеств с одной бинарной функциональной переменной). Поэтому в $Q(+, \cdot, ^-)$ справедливы следующие тождества:

$$x \cdot x = \overline{\overline{x} + \overline{x}} = \overline{\overline{x}} = x;$$
$$x \cdot y = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = \overline{\overline{y} + \overline{x}} = y \cdot x;$$

$$x \cdot (y \cdot z) = \overline{\overline{x} + \overline{y \cdot z}} = \overline{\overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})} = \overline{(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z}} = (x \cdot y) \cdot z;$$
$$(x + y) \cdot x = \overline{\overline{x + y} + \overline{x}} = x;$$
$$(x + y) \cdot z = \overline{\overline{x + y} + \overline{z}} = \overline{\overline{x} + \overline{z}} + \overline{\overline{y} + \overline{z}} = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Эти тождества вместе с тождествами (2.1) показывают, что алгебра $Q(+, \cdot, ^-)$ является алгеброй Де Моргана.

Очевидно, что если отношение эквивалентности θ на множестве Q является конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$, то оно является и конгруэнцией алгебры $\mathfrak{D}$. Следовательно, если $\mathfrak{A}$ – нетривиальная подпрямо неразложимая алгебра, то соответствующая алгебра $\mathfrak{D}$ будет подпрямо неразложимой алгеброй Де Моргана и согласно теореме 1.2, она изоморфна одной из алгебр $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$. Поэтому алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна одной из алгебр $\mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$. Этим доказан следующий результат.

Предложение 2.1. *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми Де Моргановыми квазирешетками с одной бинарной операцией являются алгебры* $\mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$.

3. Некоторые предварительные результаты

В этом параграфе всюду $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ есть квазирешетка Де Моргана с двумя бинарными операциями.

Лемма 3.1. *Для любого элемента* $p \in Q$ *можно определить конгруэнцию* θ_p *алгебры* $\mathfrak{A}$ *следующим образом:*

$$x\theta_p y \Leftrightarrow x \cdot p = y \cdot p, \ \overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p.$$

Доказательство. Очевидно, что θ_p является отношением эквивалентности. Докажем конгруэнтность. Пусть $x\theta_p y, \ z\theta_p t$. Мы должны доказать, что $x + z\theta_p y + t, \ x \cdot z\theta_p y \cdot t$ и $\overline{x}\theta_p\overline{y}$. Воспользуемся сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана:

$$F(G(x, y), z) = G(F(x, z), F(y, z)), \qquad F(\overline{G}(x, y), z) = \overline{G}(\overline{F}(\overline{x}, z), \overline{F}(\overline{y}, z)),$$

где $\overline{G}(x, y)$ означает $\overline{G(x, y)}$. Полагая $F = \cdot$, $G = +$ и учитывая равенства $x \cdot p = y \cdot p$, $\overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p$ и $z \cdot p = t \cdot p$, $\overline{z} \cdot p = \overline{t} \cdot p$, получим:

$$(x + y) \cdot p = x \cdot p + y \cdot p = z \cdot p + t \cdot p = (z + t) \cdot p,$$

$$\overline{x + y} \cdot p = \overline{\overline{\overline{x} \cdot p} + \overline{\overline{y} \cdot p}} = \overline{\overline{\overline{z} \cdot p} + \overline{\overline{t} \cdot p}} = \overline{z + t} \cdot p.$$

А это значит, что $x + y\theta_p z + t$. Точно так же, полагая $F = \cdot$, $G = \cdot$, получим $x \cdot y\theta_p z \cdot t$. Соотношение $\overline{x}\theta_p\overline{y}$ очевидно. □

Лемма 3.2. *Для любых элементов* $p, q \in Q$ *имеем* $\theta_p \cap \theta_q = \theta_{\overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}}$.

Доказательство. Пусть $x\theta_p y$ и $x\theta_q y$. Тогда $x \cdot p = y \cdot p$, $\overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p$ и $x \cdot q = y \cdot q$, $\overline{x} \cdot q = \overline{y} \cdot q$. Следовательно, воспользуясь сверхтождеством

$$F(x, \overline{F}(\overline{y}, \overline{z})) = \overline{F}(\overline{F}(x, y), \overline{F}(x, z)), \tag{3.1}$$

получим: $x \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = \overline{\overline{x \cdot p} \cdot \overline{x \cdot q}} = \overline{\overline{y \cdot p} \cdot \overline{y \cdot q}} = y \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$. Аналогично, $\overline{x} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = \overline{y} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$. Этим мы доказали, что $x \ \theta_{\overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}} \ y$.

Пусть теперь $x \ \theta_{\overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}} \ y$, т.е. $x \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = y \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$ и $\overline{x} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = \overline{y} \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}}$. Используя сверхтождество

$$F(x, \overline{F}(\overline{x}, \overline{y})) = x, \tag{3.2}$$

будем иметь: $x \cdot p = x \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} \cdot p = y \cdot \overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} \cdot p = y \cdot p$. Подобным путем доказываются равенства: $x \cdot q = y \cdot q$, $\overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p$, $\overline{x} \cdot q = \overline{y} \cdot q$. Отсюда имеем: $x\theta_p y$ и $x\theta_q y$. □

Лемма 3.3. *Для любого элемента $p \in Q$ имеем $\theta_p \cap \theta_{\overline{p}} = 0$, где 0 –нулевое отношение эквивалентности.*

Доказательство. Если $x \ \theta_p \ y$ и $x \ \theta_{\overline{p}} \ y$, то

$$x \cdot p = y \cdot p, \ \overline{x} \cdot p = \overline{y} \cdot p, \qquad x \cdot \overline{p} = y \cdot \overline{p}, \ \overline{x} \cdot \overline{p} = \overline{y} \cdot \overline{p}.$$

Поэтому:

$$x \overset{(3.2)}{=} x \cdot \overline{\overline{x} \cdot \overline{p}} = x \cdot \overline{\overline{y} \cdot \overline{p}} \overset{(3.1)}{=} \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{x \cdot p}} = \overline{\overline{x \cdot y} \cdot \overline{y \cdot p}} = y \cdot \overline{\overline{x} \cdot \overline{p}} = y \cdot \overline{\overline{y} \cdot \overline{p}} = y.$$

Следовательно, $\theta_p \cap \theta_{\overline{p}} = 0$. □

Введем отношение $\leq_\bullet$ на множестве Q следующим образом:

$$x \leq_\bullet y \Leftrightarrow x \cdot y = x, \ x, y \in Q.$$

Ясно, что $\leq_\bullet$ является отношением порядка.

Лемма 3.4. *Для любого элемента $p \in Q$ имеем $\theta_p = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{p} \leq_\bullet p$.*

Доказательство. Если $\overline{p} \leq_\bullet p$, то $\overline{p} = \overline{p} \cdot p$ и $0 = \theta_p \cap \theta_{\overline{p}} = \theta_{\overline{\overline{p} \cdot p}} = \theta_p$ согласно леммам 3.2 и 3.3. И наоборот, пусть $\theta_p = 0$. Согласно сверхтождеству (3.2) имеем: $p\theta_p \overline{p \cdot \overline{p}}$. Следовательно, $p = \overline{p \cdot \overline{p}}$. Отсюда $\overline{p} = p \cdot \overline{p}$, т.е. $\overline{p} \leq_\bullet p$. □

Лемма 3.5. *Пусть квазирешетка Де Моргана $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ подпрямо неразложима. Тогда для любого элемента $x \in Q$ имеем $x \leq_\bullet \overline{x}$ или $\overline{x} \leq_\bullet x$.*

Доказательство Алгебра $\mathfrak{A}$ подпрямо неразложима и $\theta_x \cap \theta_{\overline{x}} = 0$ согласно лемме 3.3. Следовательно, $\theta_x = 0$ или $\theta_{\overline{x}} = 0$. Теперь требуемый результат следует из леммы 3.4.

Аналогично можно определить отношение порядка $\leq_+$ на множестве Q:

$$x \leq_+ y \Leftrightarrow x + y = x, \ x, y \in Q.$$

Ясно, что лемма 3.5 справедлива и для этого отношения порядка, т.е. элементы $x, \overline{x}$ сравнимы относительно порядка $\leq_+$ для любого элемента $x \in Q$ в подпрямо неразложимой квазирешетке Де Моргана $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$.

4. Подпрямо неразложимые квазирешетки Де Моргана с двумя бинарными операциями

Пусть алгебра $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ является Де Моргановой квазирешеткой с двумя бинарными операциями. Определим отношение $\sim$ на множестве Q следующим образом:

$$x \sim y \Leftrightarrow x + (xy) = x, \ y + (yx) = y.$$

В работе [12] доказано, что $\sim$ является отношением конгруэнтности для алгебры $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$. Пусть $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$ – соответствующее разбиение множества Q. Определим новую унарную операцию $'$ на множестве Q следующим образом:

$$x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})}.$$

Известно (см. [12]), что множества Q_i, $i \in I$ замкнуты относительно операций $+, \cdot, '$ и алгебры $Q_i(+, \cdot, ')$, $i \in I$ – суть алгебры Де Моргана. Более того алгебры Q_i и Q_j изоморфны для любых $i, j \in I$. Далее $(x+y)' = x' \cdot y'$ для любых $x, y \in Q$. Напомним, что унарная операция x' и конгруэнция $\sim$ используются в работе [12] для доказательства структурной теоремы для Де Моргановых квазирешеток. Теперь мы можем доказать основной результат настоящей работы.

Теорема 4.1. *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми квазирешетками Де Моргана с двумя бинарными операциями являются алгебры* **2**, **3**, **4**.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ – такая алгебра. Сначала заметим, что если $x \sim y$ и $x \leq_\bullet y$, то $x + y = xy + y = y$, т.е. $y \leq_+ x$. И наоборот, если $x \leq_\bullet y$ и $y \leq_+ x$, то $x \sim y$. Действительно, по определению порядков $\leq_\bullet$ и $\leq_+$ имеем: $x + xy = x + x = x$, $y + yx = y + x = y$. Далее, как следует из леммы 3.5, для любого $x \in Q$ имеем: $x \leq_\bullet \overline{x}$ или $\overline{x} \leq_\bullet x$ и $x \leq_+ \overline{x}$ или $\overline{x} \leq_+ x$.

Если $x \leq_\bullet \overline{x}$ и $x \leq_+ \overline{x}$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot \overline{x} + \overline{\overline{x} \cdot x} = x + \overline{x} = x$,

Если $\overline{x} \leq_\bullet x$ и $\overline{x} \leq_+ x$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot x + \overline{x \cdot \overline{x}} = x + x = x$,

Если $x \leq_\bullet \overline{x}$ и $\overline{x} \leq_+ x$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot x + \overline{x \cdot \overline{x}} = x + \overline{x} = \overline{x}$,

Если $\overline{x} \leq_\bullet x$ и $x \leq_+ \overline{x}$, то $x' = x \cdot \overline{x + \overline{x}} + \overline{x \cdot (x + \overline{x})} = x \cdot \overline{x} + \overline{\overline{x} \cdot x} = \overline{x} + \overline{x} = \overline{x}$.

Итак:

$$x' = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq_\bullet \overline{x}, \ x \leq_+ \overline{x} \text{ или } \overline{x} \leq_\bullet x, \ \overline{x} \leq_+ x, \\ \overline{x}, & \text{если } x \leq_\bullet \overline{x}, \ \overline{x} \leq_+ x \text{ или } \overline{x} \leq_\bullet x, \ x \leq_+ \overline{x}. \end{cases}$$

Из этого следует, что $x \sim \overline{x}$ тогда и только тогда, когда $x' = \overline{x}$. Докажем, что либо $x' = x$ для всех $x \in Q$, либо $x' = \overline{x}$ для всех $x \in Q$. Пусть $a' \neq \overline{a}$ для некоторого $a \in Q$. Тогда $a' = a$. Докажем, что в этом случае $x' = x$ для любого $x \in Q$. Предположим, что $a \in Q_k$, где $k \in I$. Пусть сначала $x \in Q_k$ и $x' \neq x$. Тогда $x' = \overline{x}$ и $x \sim \overline{x}$, $x \sim a$, следовательно $\overline{a} \sim \overline{x} \sim x \sim a$ (так как $\sim$ является отношением конгруэнтности), откуда $a' = \overline{a}$. Пришли к противоречию. Значит $x' = x$ для всех $x \in Q_k$. Теперь допустим $x \notin Q_k$, т.е. $x \in Q_p$, $p \neq k$. Так как $Q_p(+,\cdot,')$ и $Q_k(+,\cdot,')$ изоморфны, то существует изоморфизм $\phi : Q_p \to Q_k$. Тогда $\phi(x) \in Q_k$, поэтому $\phi(x') = (\phi(x))' = \phi(x)$. Из инъективности отображения ϕ вытекает $x' = x$, что и требовалось доказать. Итак, либо $x' = \overline{x}$ для всех $x \in Q$, либо $x' = x$ для всех $x \in Q$.

Если $x' = x$ для всех $x \in Q$, то $xy = x'y' = (x+y)' = x+y$ для всех $x, y \in Q$, т.е. операции $+$ и $\cdot$ совпадают. Этот случай мы уже исследовали во втором параграфе. Рассмотрим тот случай, когда $x' = \overline{x}$ для всех $x \in Q$. В этом случае $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$ для любых $x, y \in Q$ и следовательно алгебра $\mathfrak{A} = Q(+,\cdot,^-)$ является алгеброй Де Моргана, которая подпрямо неразложима. Поэтому $\mathfrak{A}$ изоморфна одной из алгебр $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$, согласно теореме 1.2. $\square$

5. Следствия

Из предложений 1.1, 2.1 и теоремы 4.1 легко выводятся следующие результаты.

Теорема 5.1. *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми квазирешетками Де Моргана являются алгебры* $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$.

Следствие 5.1. *В категории T-алгебр, где $T = \{1,2\}$, любая квазирешетка Де Моргана представляестя как подпрямое произведение алгебр* $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$.

Так как алгебры $\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{2}^+, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+$ являются подалгебрами (в смысле [1]) алгебры $\mathbf{4}$, то получаем и следующий результат.

Следствие 5.2. *Де Моргановыми квазирешетками (с точностью до изоморфизма) являются в точности подалгебры прямых степеней* $\mathbf{4}$ *в категории T-алгебр, где $T = \{1,2\}$.*

Следствие 5.3. $Heq\ \mathfrak{QD} = Heq\ \mathbf{4}$.

Доказательство. Очевидно, что $Heq\ \mathfrak{QD} \subseteq Heq\ \mathbf{4}$. Пусть $\mathfrak{A} \in \mathfrak{QD}$, т.е. $\mathfrak{A}$ – произвольная квазирешетка Де Моргана. Тогда $\mathfrak{A}$ является подалгеброй прямой степени алгебры $\mathbf{4}$. Но любое сверхтождество алгебры $\mathbf{4}$ истинно и в прямой степени этой алгебры. Следовательно, оно верно и в алгебре $\mathfrak{A}$. Поэтому $Heq\ \mathfrak{QD} \supseteq Heq\ \mathbf{4}$. $\square$

Следствие 5.4. ([11]) *Сверхэквациональная теория многообразия алгебр Де Моргана разрешима.*

Следствие 5.5. ([14]) *Единственными (с точностью до изоморфизма) нетривиальными подпрямо неразложимыми T-алгебрами, где $T = \{1, 2\}$, удовлетворяющими сверхтождествам многообразия булевых алгебр есть алгебры* $\mathbf{2}$ *и* $\mathbf{2}^+$.

Доказательство. Алгебры $\mathbf{3}, \mathbf{3}^+, \mathbf{4}^+, \mathbf{4}$ не удовлетворяют всем сверхтождествам многообразия булевых алгебр. Например, в этих алгебрах не выполняется следующее сверхтождество: $X(x, \overline{x}) = X(y, \overline{y})$, ибо $a + \overline{a} \neq 0 + \overline{0}$. □

Abstract. The paper characterizes the class of subdirectly non-factorable algebras with hyperidentities of the variety of De Morgan algebras. Such algebras are called subdirectly non-factorable De Morgan quasilattices. The suggested characterization is too close to that of the classical case of subdirectly non-factorable De Morgan algebras.

Список литературы

[1] Ю. М. Мовсисян, Введение в Теорию Алгебр со Сверхтождествами, Изд-во Ереванского госуниверситета (1986).
[2] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и Сверхмногообразия в Алгебрах, Изд-во Ереванского госуниверситета (1990).
[3] Ю. М. Мовсисян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр", Известия РАН, сер. Мат., **60**, но. 6, 127 – 168 (1996).
[4] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи Мат. Наук, **53** (1(319)), 61 – 114 (1998).
[5] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, Third edition (1979).
[6] A. Bialynicki-Birula, H.Rasiowa, "On the representation of quasi-Boolean algebras", Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astronom. Phys., **5**, 259 – 261 (1957).
[7] G. C. Moisil, "Recherches sur l'algebre de la logique", Annales scientifiques de l'universite de Jassy, **22**, 1 – 117 (1935).
[8] H. P. Sankappanavar, "A characterization of principal congruences of DeMorgan algebras and its applications", Math. Logic in Latin America, Proc. IV Latin Amer. Symp. Math. Logic, Santiago, 341 – 349 (1978). Nort-Holland Pub. Co., Amsterdam (1980).
[9] J. A. Brzozowski, "A characterization of De Morgan algebras", International Journal of Algebra and Computation, **11**, 525 – 527 (2001).
[10] Yu. M. Movsisyan, "Binary representations of algebras with at most two binary operations. A Cayley theorem for distributive lattices", International Journal of Algebra and Computation, **19**, 97 – 106 (2009).
[11] Yu. M. Movsisyan, V. A. Aslanyan, "Hyperidentities of De Morgan algebras", Logic Journal of the IGPL. **20**, 1153 – 1174 (doi:10.1093/jigpal/jzr053) (2012).
[12] Ю. М. Мовсисян, В. А. Асланян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана", Известия НАН, сер. Математика, **48**, но. 5, 49 – 62 (2013).
[13] J. A. Kalman, "Lattices with involution", Trans. Amer. Math. Soc. **87**, 485 – 491 (1958).
[14] Ю. М. Мовсисян, А. Г. Бархударян, "О сверхмногообразии QB-алгебр", Ученые Записки ЕГУ, **2**, 16 – 24 (1996).

Поступила 19 января 2012