Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 35-51.

О ГЛАДКИХ РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Г. Г. КАЗАРЯН

Российско - армянский (Славянский) университет
Ереванский государственный университет
E-mail: *haikghazaryan@mail.ru*

Аннотация. Для одного класса невырожденных (регулярных) почти гипоэллиптических уравнений, одновременно являющихся частично гипоэллиптическими по определенным переменным, выделяются бесконечно дифференцируемые в определенной полосе решения.

MSC2010 number: 12E10, 26C05.

Ключевые слова: гипоэллиптический; (почти гипоэллиптический; частично гипоэллиптический; невырожденный) оператор; мультианизотропные пространства Соболева.

1. Введение

После основополагающих работ Л. Хермандера (см. например, [1] - [3]), посвященных линейным гипоэллиптическим дифференциальным уравнениям, все решения из класса распределений (см. [4] или [5]) которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями, естественным образом возник вопрос о нахождении априорных условий на решение негипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$, при которых это решение является бесконечно дифференцируемой функцией, или, что то же, вопрос о выделении бесконечно дифференцируемых решений негипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$ из множества решений этого уравнения из определенного класса (например, из класса распределений).

Первые результаты в этом направлении принадлежат Л. Гордингу, Б. Мальгранжу, Л. Эренпрайсу, Дж. Питре и другим. В работе [6] Л. Гординга и Б. Мальгранжа введено понятие частично гипоэллиптического оператора $P(D)$. Это такие операторы, для которых все решения из класса распределений, отвечающих им дифференциального уравнения $P(D)u = f$ с бесконечно дифференцируемой правой частью, являются бесконечно дифференцируемыми, если априори предполагать, что эти решения бесконечно дифференцируемы по определенным переменным.

Введем ряд обозначений и определений, необходимых для дальнейшего: пусть N множество натуральных чисел, $N_0 = N \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times ... \times N_0$ множество $n-$ мерных мультииндексов, E^n и R^n $n-$мерные евклидовы пространства точек (векторов) соответственно $x = (x_1, ..., x_n)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$. Для $\xi \in R^n, x \in E^n$ и $\alpha \in N_0^n$ положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + ... + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} ... \xi_n^{\alpha_n}$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, ..., n)$.

Пусть $P(D) = P(D_1, ..., D_n) = \sum\limits_{\alpha \in (P)} \gamma_\alpha D^\alpha$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $P(\xi) = P(\xi_1, ..., \xi_n) = \sum\limits_{\alpha} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ его характеристический многочлен (полный символ), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in N_0^n; \gamma_\alpha \neq 0\}$.

Пусть Ω область из E^n. Через $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ обозначим множество финитных в Ω функций из $C^\infty(\Omega)$, а через $D'(\Omega)$ множество распределений (обобщенных функций) на $D(\Omega)$ (см. [4] или [5]).

Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется **гипоэллиптическим** (см. [3], определение 11.1.2 и теорему 11.1.1), если выполняется одно из следующих эквивалентных условий: 1) если $u \in D'(\Omega)$ решение уравнения $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega)$, 2) если $|\xi| \to \infty$, и $0 \neq \alpha \in N_0^n$, то $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\alpha P(\xi)/P(\xi) \to 0$.

Пусть $n \geq 2, 1 \leq k < n$. Представим точки $x \in E^n$ в виде $x = (x', x'')$, где $x' = (x_1, ..., x_k), x'' = (x_{k+1}, ..., x_n)$ (соответственно для точек $\xi \in R^n$ и $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in N_0^n$).

Оператор $P(D)$ называется **частично гипоэллиптическим** относительно гиперплоскости $x'' = 0$ (многочлен $P(\xi)$ называется частично гипоэллиптическим по ξ''), если для всех $0 \neq \alpha \in N_0^n$ $P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \to 0$, когда $|\xi''| \to \infty$, а $|\xi'|$ остается ограниченным (см. [6] или [3], определение 11.2.4).

В [6] было доказано, что если решение $u \in D'(\Omega)$ частично гипоэллиптического относительно гиперплоскости $x'' = 0$ уравнения $P(D)u = 0$, является гладкой по переменным x', то $u \in C^\infty(\Omega)$. Далее многими авторами в разных направлениях было обобщено понятие гипоэллиптичности или частичной гипоэллиптичности (см., например Л. Еренпрайс [7], Ж. Питре [8], Е. А. Горин [9], Ю. В. Егоров [10], Дж. Фриберг [11], Р. Дж. Елиот [12], [13] и другие).

В частности, в работе [14] Я. С. Бугров построил пример негипоэллиптического уравнения, все решения которого являются бесконечно дифференцируемыми в полупространстве функциями, если они вместе с некоторыми их производными интегрируемы с квадратом.

В работах [15], [16] В. И. Буренков изучил уравнение $P(D)u = f$ в цилиндре $\Omega = \Omega_l \times E^{n-l}$, где $0 \leq l < n$ и Ω_l область из E^l, а f и все её производные $l-$ локально квадратично интегрируемы. Им получены необходимые и достаточные условия при которых любое локально квадратично интегрируемое в Ω вместе со своими некоторыми производными решение уравнение $P(D)u = f$ является бесконечно дифференцируемой в Ω функцией.

В [17] мы ввели понятие почти гипоэллиптического многочлена (оператора), а в работах [18] и [19] (совместно с В. Н. Маргаряном) доказали, что при $f \in C^\infty(E^n)$ и $\delta > 0$ все решения дифференциального уравнения $P(D)u = f$, которые интегрируемы с экспоненциальным весом $e^{-\delta|x|}$, являются бесконечно дифференцируемыми функциями в E^n тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ почти гипоэллиптичен. При этом (см. [17]) оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется **почти гипоэллиптическим**, если с некоторой постоянной $C > 0$

$$|P^{(\alpha)}(\xi)|/[1 + |P(\xi)|\,] \le C \ \ \forall\xi \in R^n, \ \forall\alpha \in N_0^n.$$

Пусть $A = \{\alpha^j = (\alpha_1^j, ..., \alpha_n^j)\}_1^M$ конечный набор мультииндексов из N_0^n. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий точки A назовем **многогранником Ньютона** множества A.

Многогранник $\Re = \Re(P)$, построенный на наборе $(P) \cup \{0\}$ оператора $P(D) = P(D_1, ..., D_n) = \sum \gamma_\alpha D^\alpha$ назовем многогранником Ньютона оператора $P(D)$ (многочлена $P(\xi)$) (см. [20] или [21]).

Определение 1.1. *(см. [20] - [22]) Пусть $R_+^n = \{x \in R^n : x_j \ge 0; \ j = 1, ..., n\}$. Многогранник $\Re \subset R_+^n$ с вершинами из N_0^n назовем **полным**, если $\Re$ имеет вершины на каждой координатной оси и в начале координат N_0^n. Полный многогранник $\Re$ назовем **правильным (вполне правильным)**, если все координаты внешних нормалей $(n-1)$ - мерных некоординатных граней $\Re$ неотрицательны (положительны).*

Оказывается, что многогранник Ньютона гипоэллиптического оператора является вполне правильным, а многогранник Ньютона почти гипоэллиптического оператора - правильным (см. [22], Лемма 2.1).

Всюду далее четные числа $m, m_2, m_3, ..., m_n$ $(m > m_j; j = 2, 3, ..., n)$ фиксированы, при этом через $\Re = \Re(m, m_2, ..., m_n) \subset R_+^n$ мы обозначим многогранник с вершинами $(0, ..., 0)$, $(m, 0, ..., 0)$, $(0, m, ..., 0)$, ..., $(0, 0, ..., m)$ и $(m, m_2, 0, ..., 0)$, $(m, 0, m_3, 0, ..., 0)$, ..., $(m, 0, ..., 0, m_n)$.

Легко убедиться, что это правильный многогранник. Однако многогранник $\Re$ не является вполне правильным, так как (единичная) внешняя нормаль $(n-1)$−мерной грани с вершинами $(m, 0, ..., 0), (m, m_2, 0, ..., 0), ..., (m, 0, ..., 0, m_n)$ является вектор $(1, 0, ..., 0)$. Геометрически это означает, что эта грань перпендикулярна координатной оси $0\alpha_1$.

В настоящей работе мы рассматриваем линейный дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, D_2, ..., D_n)$ с вещественными коэффициентами и с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3, ..., m_n)$. При этом будем считать, что характеристический многочлен $P(\xi)$, отвечающий этому оператору является невырожденным (регулярным) в том смысле, что с некоторой положительной постоянной μ_1 справедливо неравенство

$$(1.1) \qquad 1 + |P(\xi)| \geq \mu_1 \sum_{\alpha \in \Re} |\xi^\alpha|, \quad \forall \xi \in R^n.$$

Простые вычисления показывают (см., например, [20] или [22]), что для любого многочлена $P(\xi)$ с правильным многогранником Ньютона существует число $\mu_2 > 0$ такое, что для всех $l = 0, 1, ...$

$$(1.2) \qquad |D_1^l P(\xi)| \leq \mu_2 \left[1 + \sum_{(\alpha_1 + l, \alpha'') \in \Re} |\xi^\alpha| \right], \quad \forall \xi \in R^n.$$

Также легко убедиться в том, что многочлен $P(\xi)$, с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3, ..., m_n)$, удовлетворяющий условиям (1.1), (1.2) является почти гипоэллиптическим (см. [22]) и частично гипоэллиптическим относительно $\xi'' = (\xi_2, ..., \xi_n)$ (см. [3], теорема 11.2.3). Отметим,что в связи с изучением единственности решения задачи Дирихле, общие невырожденные уравнения с полными многогранниками Ньютона впервые рассмотрены С. М. Никольским (см. [23]). В. П. Михайловым в [20] найдены необходимые и достаточные условия, при которых многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона является невырожденным. В частности, там доказано, что вершины многогранника Ньютона невырожденного многочлена с вещественными коэффициентами имеют чётные координаты. Этим и мотивируется наше предположение о четности чисел $m, m_2, ..., m_n$.

Для $\kappa > 0$ обозначим $\Omega_\kappa = \{x \in E^n : |x_1| < \kappa\}$. Целью настоящей работы является доказательство существования числа $\kappa_0 > 0$ такого, что при $\kappa \geq \kappa_0$ все решения $u \in D'(\Omega_\kappa)$ уравнения $P(D)u = 0$, которые удовлетворяют условиям $D^{(0, \alpha_2, ..., \alpha_n)} u \in L_2(\Omega_\kappa)$ для $\alpha \in N_0^n$; $\alpha_2 + ... + \alpha_n \leq m$, принадлежат $C^\infty(\Omega_\kappa)$. Эти условия намного слабее, чем соответственные условия в [14], [15] или [6].

Пусть $\Re \subset R_+^n$ произвольный полный многогранник, $\alpha'' = (\alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha'') \in N_0^n$. Обозначим через $\Re'$ множество мультииндексов $\alpha \in \Re$ таких,что $(\alpha_1 + 1, \alpha'') \notin \Re$. Для выделения гладких решений исследуемого уравнения, нам необходимо построить на множестве N_0^n функцию $d(\alpha)$, принимающую целочисленные значения и такую, что

1) $d(\alpha_1 \pm l, \alpha'') = d(\alpha) \pm l$ для всех $l \in N, \alpha_1 - l \in N_0$,
2) $d(\alpha) < m$ для $\alpha \in \Re \setminus \Re'$
3) $d(\alpha) = m$ для $\alpha \in \Re'$.

Так как при построении такой функции мы часто будем пользоваться геометрическими соображениями, то далее ограничимся трёхмерным случаем.

2. Построение функции $d(\alpha)$

Итак, всюду далее $n = 3$, четные числа m, m_2, m_3, $(m > m_j; j = 2, 3)$ фиксированы, при этом через $\Re = \Re(m, m_2, m_3) \subset R^3_+$ мы обозначим многогранник с вершинами $(0,0,0)$, $(m,0,0), (0,m,0), (0,0,m)$ и $(m, m_2, 0), (m, 0, m_3)$. Легко убедиться, что это правильный (но не вполне правильный) многогранник, ограниченный координатными плоскостями $\xi_j = 0$ $(j = 1, 2, 3)$ и плоскостями

$$P_1 = \{\xi : \xi \in R^3, \Delta_1(\xi) \equiv \frac{1}{m}\,\xi_1 = 1\},$$

$$P_2 = \{\xi : \xi \in R^3, \Delta_2(\xi) \equiv \frac{m - m_2}{m^2}\,\xi_1 + \frac{1}{m}\,(\xi_2 + \xi_3) = 1\},$$

$$P_3 = \{\xi : \xi \in R^3, \Delta_2(\xi) \equiv \frac{m - m_3}{m^2}\,\xi_1 + \frac{m_3}{m_2}\,\frac{1}{m}\,\xi_2 + \frac{1}{m}\,\xi_3 = 1\}.$$

Для построения функции $d(\alpha)$, удовлетворяющей условиям 1) - 3), обозначим

$$A(\alpha) = \frac{m[|\,\alpha''| - m_2]}{m - m_2};\ B(\alpha) = \frac{m[\frac{m_3}{m_2}\,\alpha_2 + \alpha_3 - m_3]}{m - m_3}$$

и для любого $\alpha \in \Re \cap N_0^3$ положим

$$d(\alpha) = [\max\{\alpha_1, \alpha_1 + A(\alpha), \alpha_1 + B(\alpha)\}]', \tag{2.1}$$

где $[a]' = [a] = a$, если a целое число и $[a]' = [a] + 1$, в противном случае.

Нам будет удобно видоизменить формулу (2.1). Для этого проведем в R^3 плоскость P_4, проходящую через точки (вершины многогранника $\Re$) $(0, m_2, 0), (0, 0, m)$ и $(m, m_2, 0)$. Уравнение этой плоскости будет

$$P_4 = \{\xi \in R^3; \Delta_4(\xi) \equiv \frac{\xi_2}{m_2} + \frac{\xi_3}{m} = 1\}.$$

Далее запись $\alpha \in \Re$ будет означать, что $\alpha \in \Re \cap N_0^3$, а запись $\alpha \in P_j$ что $\alpha \in P_j \cap \Re$ $(j = 1, ..., 5)$ (определение P_5 см. ниже). Плоскость P_4 делит множество $\Re \bigcap N_0^n$ на два подмножества: $\Im_1 = \{\alpha \in \Re; \Delta_4(\alpha) \le 1\}$ и $\Im_2 = \Re \setminus \Im_1$, при этом имеет место

Лемма 2.1. *Выполнены следующие утверждения:*

1) для точек $\alpha \in P_4$ числа $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ целые, при этом $A(\alpha) = B(\alpha) = \alpha_3$;

2) при $m_3 = m_2$ $A(\alpha) = B(\alpha)$ для всех $\alpha \in \Re$;

3) если $m_3 < m_2$, то $A(\alpha) \le B(\alpha)$ при $\alpha \in \Im_1$ и $A(\alpha) > B(\alpha)$ при $\alpha \in \Im_2$, а в случае $m_3 > m_2$, наоборот.

Доказательство. Так как пункты 2) и 3) получаются простыми вычислениями, то докажем только первый пункт. Для точек $\alpha \in P_4$ имеем $\frac{\alpha_2}{m_2}+\frac{\alpha_3}{m}=1$. Умножая обе части этого соотношения на $m(m_2-m_3)$, получим

$$\frac{m}{m_2}(m_2-m_3)\alpha_2+(m_2-m_3)\alpha_3=m(m_2-m_3).$$

Представим полученное равенство в виде

$$(m-m_3)\alpha_2+(m-m_3)\alpha_3-m_2(m-m_3)=$$

$$=\frac{m_3}{m_2}(m-m_2)\alpha_2+(m-m_2)\alpha_3-(m-m_2)m_3.$$

Деля обе части полученного равенства на $\frac{(m-m_2)(m-m_3)}{m}$, получим

$$A(\alpha)=m\frac{|\alpha''|-m_2}{m-m_2}=m\frac{\frac{m_3}{m_2}\alpha_2+\alpha_3-m_3}{m-m_3}=B(\alpha)=\alpha_3.$$

Лемма 2.1 доказана. □

За счет перенумерации координатных осей N_0^3 можно считать, что $m_3 \le m_2$. Поэтому всюду далее будем считать, что $m_3 \le m_2$ и свойства 1) - 3) функции $d(\alpha)$ мы докажем только в этом случае. Исходя из леммы 2.1, формулу (2.1) можно преобразовать так

$$d(\alpha)=\max\{\alpha_1,\alpha_1+[B(\alpha)]';\ \alpha\in\Im_1\}, \tag{2.2}$$

$$d(\alpha)=max\{\alpha_1,\alpha_1+[A(\alpha)]';\ \alpha\in\Im_2\}, \tag{2.3}$$

К доказательству свойств 1)-3) функции $d(\alpha)$ предпошлем следующую лемму.

Лемма 2.2. *Для точек $\alpha \in (P_1\cup P_2\cup P_3)$ числа $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ целые, при этом $d(\alpha)=m$.*

Доказательство. Точки $(0,m_2,0)$, $(0,0,m_3)$, $(m,0,m_3)$ и $(m,m_2,0)$, лежат на плоскости $P_5 := \{\xi\in R^3,\ \Delta_5(\xi)\equiv\frac{\xi_2}{m_2}+\frac{\xi_3}{m_3}=1\}$, поэтому для точек $\alpha\in P_5$ справедливо соотношение $\frac{m_3}{m_2}\alpha_2+\alpha_3-m_3=m_3(\frac{\alpha_2}{m_2}+\frac{\alpha_3}{m_3}-1)=0$. Это значит, что $B(\alpha)=0$ для точек $\alpha\in P_5$ и поэтому $B(\alpha)=0$ для точек $\alpha\in\Gamma_0$ одномерной грани $\Gamma_0 := \{(m,0,m_3)-(m,m_2,0))\}\subset P_5$ многогранника $\Re$. Так как $\alpha_1=m$ для точек $\alpha\in\Gamma_0\subset P_1$ и точки $\alpha\in P_5$ лежат в $\Im_1$, то функция $d(\alpha)$ определяется формулой (2.2), поэтому $d(\alpha)=\alpha_1=m$ для точек $\alpha\in\Gamma_0$. Точки $\alpha\in P_1\setminus\Gamma_0$ лежат под плоскостью P_5, поэтому для них $B(\alpha)<0$ и опять $d(\alpha)=\alpha_1=m$.

Пусть $\alpha\in P_3\subset\Im_1$, т.е. функция $d(\alpha)$ опять определяется формулой (2.2). Для таких точек $\frac{m_3}{m_2}\alpha_2+\alpha_3=m-\frac{m-m_3}{m}\alpha_1$. Поэтому

$$\alpha_1+B(\alpha)=\alpha_1+[m\frac{m-\frac{m-m_3}{m}\alpha_1-m_3}{m-m_3}]'=\alpha_1+[m(1-\frac{\alpha_1}{m})]'=m.$$

Таким образом доказано, что для $\alpha\in P_3$ число $B(\alpha)$ целое и, так как $\alpha_1\le m$ для всех точек $\alpha\in\Re$, то $d(\alpha)=\max\{\alpha_1,m\}=m$.

Пусть $\alpha \in P_2 \subset \Im_2$, т.е. функция $d(\alpha)$ определяется формулой (2.3). Тогда $\alpha_2+\alpha_3 = m - \frac{m-m_2}{m}\alpha_1$, поэтому

$$A(\alpha) = \alpha_1 + [m\frac{m - \frac{m-m_2}{m}\alpha_1 - m_2}{m-m_2}]' = \alpha_1 + [m(1-\frac{\alpha_1}{m})]' = m,$$

т.е. $A(\alpha)$ целое для точек $\alpha \in P_2$ и $d(\alpha) = m$. Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. *Функция $d(\alpha)$, определенная формулами (2.2), (2.3) удовлетворяет условиям 1) - 3).*

Доказательство. Первое свойство очевидно. Сначала докажем свойство 3). Точки $\alpha \in (P_1 \cup P_2 \cup P_3) \cap \Re$ принадлежат $\Re'$. Для таких точек свойство 3) следует из леммы 2.2. Пусть поэтому $\alpha \in \Re' \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$. Тогда $\alpha_1 < m$, $\Delta_2(\alpha) < 1$, $\Delta_3(\alpha) < 1$ и $(\alpha_1+1, \alpha'') = (\alpha_1+1, \alpha_2, \alpha_3) \notin \Re$.

Докажем свойство 3) для точек $\alpha \in \Im_1$, т.е. при $\Delta_4(\alpha) \le 1$, $\Delta_3(\alpha) < 1$, при этом, так как $(\alpha_1+1,\alpha'') \notin \Re$, то либо $\alpha_1 + 1 > m$ (т.е. точка (α_1+1,α'') покидает $\Re$, пересекая плоскость P_1), либо $\Delta_3(\alpha_1+1,\alpha'') > 1$ (т.е. точка $(\alpha_1 + 1,\alpha'')$ покидает $\Re$, пересекая плоскость P_3.)

Так как мы рассматриваем точки $\alpha \in \Re' \setminus P_1$, то первый случай исключается. Во втором случае имеем

$$1 < \Delta_3(\alpha_1+1,\alpha'') = \Delta_3(\alpha) + \frac{m-m_3}{m^2} < 1 + \frac{m-m_3}{m^2},$$

$$m < \frac{m-m_3}{m}\alpha_1 + \frac{m_3}{m_2} + \alpha_3 + \frac{m-m_3}{m} < m + \frac{m-m_3}{m},$$

$$m - m_3 - \frac{m-m_3}{m}(\alpha_1+1) < \frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 - m_3 < (m-m_3) - \frac{m-m_3}{m}\alpha_1.$$

Так как $m_3 < m$, то отсюда имеем

$$1 - \frac{1}{m}(\alpha_1+1) < \frac{\frac{m_3}{m_2}\alpha_2 + \alpha_3 - m_3}{m-m_3} < 1 - \frac{\alpha_1}{m},$$

что эквивалентно неравенству $m - 1 < \alpha_1 + B(\alpha) < m$.

Для точек $\alpha \in \Re' \setminus P_1$ $\alpha_1 \le m-1$, поэтому отсюда следует во первых, что $[B(\alpha)]' \ge B(\alpha) > 0$ и во вторых, что $B(\alpha)$– число нецелое. Поэтому $d(\alpha) = max\{\alpha_1, \alpha_1 + [B(\alpha)]'\} = \alpha_1 + [B(\alpha)]'$ и $m-1 \le \alpha_1 + [B(\alpha)] < m$. Отсюда, и из свойства $[a]' = [a]+1$ для нецелых a, получаем

$$m \le \alpha_1 + [B(\alpha)] + 1 = \alpha_1 + [B(\alpha)]' < m+1,$$

т.е. $m \le d(\alpha) < m+1$. Так как $d(\alpha)$ целое, то отсюда следует, что $d(\alpha) = m$. Свойство 3) функции $d(\alpha)$ для точек $\alpha \in \Im_1$ доказано.

Докажем это свойство для точек $\alpha \in \Im_2$, т.е. для точек, лежащих строго между плоскостями P_2 и P_4. Для таких точек $d(\alpha)$ определяется формулой (2.3), при этом $\Delta_2(\alpha) < 1$, $(\alpha_1+1,\alpha'') \notin \Re$. Как выше получим, что либо

$\alpha_1+1>m$, либо $\Delta_2(\alpha_1+1,\alpha'')>1$. В первом случае имеем $m-1<\alpha_1\leq m$, тогда $\alpha_1=m$, т.е. $\alpha\in P_1\cap\Re$. Для таких точек 3) доказано. Во втором случае

$$1<\Delta_2\left(\alpha_1+1,\alpha''\right)=\Delta_2(\alpha)+\frac{m-m_2}{m^2}<1+\frac{m-m_2}{m^2},$$

откуда следует, что

$$m<\frac{m-m_2}{m}\,\alpha_1+|\,\alpha''|+\frac{m-m_2}{m}<m+\frac{m-m_2}{m},$$

$$(m-m_2)-\frac{m-m_2}{m}\,(\alpha_1+1)<|\,\alpha''|-m_2<(m-m_2)-\frac{m-m_2}{m}\,\alpha_1.$$

Так как $m_2<m$, то отсюда имеем

$$1-\frac{1}{m}\,(\alpha_1+1)<\frac{|\alpha''|-m_2}{m-m_2}<1-\frac{\alpha_1}{m},$$

откуда в свою очередь следует, что $m-1<\alpha_1+A(\alpha)<m$. Это значит, что число $A(\alpha)$ не может быть целым. Тогда $m-1\leq\alpha_1+[A(\alpha)]<m$, поэтому

$$m\leq\alpha_1+[A(\alpha)]+1=\alpha_1+[A(\alpha)]'<m+1. \tag{2.4}$$

Так как для точек $\alpha\in\Im_2$ $\Delta_4(\alpha)>1$ и $m_2<m$, то $|\,\alpha''|-m_2>0$, поэтому $A(\alpha)>0$ и $d(\alpha)=max\{\alpha_1,\alpha_1+[A(\alpha)]'\}=\alpha_1+[A(\alpha)]'$. Следовательно из (2.4) имеем $m\leq d(\alpha)<m+1$. Так как $d(\alpha)$ целое, то отсюда следует, что $d(\alpha)=m$.

Таким образом свойство 3) для функции $d(\alpha)$ полностью доказано.

Докажем свойство 2) функции $d(\alpha)$ для точек $\alpha\in\Im_1$. Сначала заметим, что $\Delta_3(\alpha_1+1,\alpha'')\leq 1$ для точек $\alpha\in\Im_1\setminus\Re'$, поэтому

$$\frac{m-m_3}{m}(\alpha_1+1)+(\frac{m_3}{m_2}\alpha_2+\alpha_3)\leq m,$$

$$\frac{m_3}{m_2}\alpha_2+\alpha_3\leq(m-m_3)-\frac{m-m_3}{m}(\alpha_1+1),$$

откуда следует, что $B(\alpha)\leq m-(\alpha_1+1)$. Если $\alpha\in P_4\setminus\Re'\subset\Im_1$, то по первому пункту леммы 2.1 $B(\alpha)=\alpha_3\geq 0$ и для таких точек

$$d(\alpha)=max\{\alpha_1,\alpha_1+[B(\alpha)]'\}=max\{\alpha_1,\alpha_1+B(\alpha)\}=\alpha_1+B(\alpha)\leq m-1,$$

что доказывает свойство 2) для точек $\alpha\in(P_4\cap\Re)\setminus\Re'\subset\Im_1$. Поэтому далее можем считать, что $\alpha\in\Im_1\setminus(P_1\cap\Re')$. Для таких точек $\Delta_4(\alpha)<1,\Delta_3(\alpha_1+1,\alpha'')\leq 1$ и $\alpha_1<m$. Если $B(\alpha)$ целое, то как выше, $d(\alpha)\leq m-1$. Пусть $B(\alpha)$ нецелое, тогда $[B(\alpha)]'=[B(\alpha)]+1$, при этом $[B(\alpha)]<B(\alpha)\leq m-(\alpha_1+1)$, т.е.

$$\alpha_1+[B(\alpha)]'=\alpha_1+[B(\alpha)]+1<\alpha_1+B(\alpha)+1\leq m.$$

Так как $\alpha_1<m$, то отсюда следует $d(\alpha)=max\{\alpha_1,\alpha_1+[B(\alpha)]'\}<m$, что доказывает свойство 2) для всех точек $\alpha\in\Im_1$.

Докажем свойство 2) для точек $\alpha \in \Im_2$. В этом случае функция $d(\alpha)$ определяется формулой (2.3). Поступая как выше, для точек $\alpha:\ \Delta_2(\alpha_1+1,\alpha'') \le 1$, $\Delta_4(\alpha) > 1$ получим $A(\alpha) \le m-(\alpha_1+1)$, при этом $A(\alpha) > 0$, так как

$$|\alpha''| - m_2 = m_2(\frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m_2} - 1) > m_2(\frac{\alpha_2}{m_2} + \frac{\alpha_3}{m} - 1) > 0.$$

Если $A(\alpha)$ целое, то $d(\alpha) = max\{\alpha_1, \alpha_1 + A(\alpha)\} = \alpha_1 + A(\alpha) \le m-1$, если $A(\alpha)$ нецелое, то $d(\alpha) = \max\{\alpha_1, \alpha_1 + [A(\alpha)] + 1\} < \alpha_1 + A(\alpha) + 1 \le m$.

Так как $d(\alpha)$ целое , то в обоих случаях получаем, что $d(\alpha) \le m-1$ и свойство 2) для функции $d(\alpha)$ доказано для всех $\alpha \in \Re$. Лемма 2.3 доказана. □

3. Априорные весовые оценки

Введем весовую функцию $g(t)$ одной переменной $t \in R^1$ так, чтобы 1) $0 \le g(t) \le 1$, $g(-t) = g(t)$ для всех $t \in R^1$, и 2) $g(t) = 0$ для $|t| \ge 1$.

Пусть $\kappa > 0$ и $g_\kappa(t) = g(t/\kappa)$. Тогда очевидно, что 3) $g_\kappa^{(l)}(t) \equiv D^l[g_\kappa(t)] = \kappa^{-l}(D^l g)_\kappa(t)$ для $t \in (-\kappa,\kappa)$ и для всех $l = 0, 1, \ldots$

В качестве такой функции мы будем рассматривать, например, функцию $g(t) = [1/(2k)!](1-t^{2k})$ для $t \in (-1,1)$ и $g(t) = 0$ для $|t| \ge 1$ для любого $k \in N$.

Пусть многогранник $\Re = \Re(m, m_2, m_3)$, множество $\Re'$ и функция $d(\alpha)$ определены как выше, $\kappa > 0$ и $\Omega_\kappa = \{x \in E^3, |x_1| < \kappa\}$. Ниже нам понадобится следующее предложение, доказанное в [24, следствия 2.1 и 2.2]

Лемма 3.1. *Существуют положительные числа C_1 и κ_1 такие, что для всех $\kappa \ge \kappa_1$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ справедливы следующие оценки*

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||D^\alpha\varphi\ g_\kappa^{d(\alpha)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} \le C_1[\sum_{\alpha\in\Re'} ||D^\alpha\varphi\ g_\kappa^m||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha''|\le m} ||D^{\alpha''}\varphi\ g_\kappa^{d(0,\alpha'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}]. \tag{3.1}$$

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||D^\alpha\varphi\ g_\kappa^{d(\alpha)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} \le C_1[\sum_{\alpha\in\Re'} ||D^\alpha(\varphi\, g_\kappa^m)||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+ \sum_{|\alpha''|\le m} ||D^{\alpha''}\varphi\ g_\kappa^{d(0,\alpha'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}]. \tag{3.2}$$

В следующей лемме доказываются оценки, связанные с изучаемым оператором.

Лемма 3.2. *Пусть символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3)$ удовлетворяет условиям (1.1), (1.2). Тогда существуют положительные числа C и κ_0 такие, что для всех $\kappa \ge \kappa_0$*

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||D^\alpha\varphi\ g_\kappa^{d(\alpha)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} \le C[||P(D)\varphi\ g_\kappa^m||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$(3.3) \qquad + \sum_{|\alpha''|\le m} ||D^{\alpha''} \varphi \, g_\kappa^{d(0,\,\alpha'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}] \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega\kappa).$$

Доказательство. Ниже, в доказательствах лемм 3.2 и 3.3 $||\cdot|| = ||\cdot||_{L_2(\Omega_\kappa)}$. Пусть $\kappa_2 \ge max\{m, \kappa_1\}$, где число κ_1 выбрано так, что выполняются неравенства (3.1) и (3.2). Применяя преобразование Фурье и ее обратное, а также равенство Парсеваля, для любого $\kappa > 0$ и для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ получаем

$$\sum_{\alpha\in\Re'} ||D^\alpha(\varphi \, g_\kappa^m)|| \le \mu^{-1}[\,||P(D)(\varphi \, g_\kappa^m)|| + ||\varphi \, g_\kappa^m||].$$

Отсюда и из (3.2) получаем, что для любого $\kappa \ge \kappa_2$

$$\sum_{\alpha\in\Re} ||D^\alpha \varphi \, g_\kappa^{d(\alpha)}|| \le C_1\mu^{-1}[\,||P(D)(\varphi \, g_\kappa^m)|| + ||\varphi \, g_\kappa^m|| +$$

$$(3.4) \qquad +C \sum_{|\alpha''|\le m} ||D^{\alpha''} \varphi \, g_\kappa^{d(0,\,\alpha'')}||\,] \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega\kappa).$$

Здесь следует отметить, что из определения функции g следует, что $\varphi g_\kappa^m \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ при $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$.

Оценим первое слагаемое правой части (3.4). Для этого применим обобщенную формулу Лейбница (см., например, [3] теорема 11.1.7), свойства 1) - 3) функции $d(\alpha)$ (Лемма 2.3), неравенство (1.2), равенство Парсеваля и свойство 3) функции g_κ. Получим, что для любого $\kappa \ge \kappa_2$ и для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$

$$||P(D)(\varphi \, g_\kappa^m)|| \le ||(P(D)\varphi) \, g_\kappa^m)|| + \sum_{j\ge1} \frac{1}{j!} \, ||\,[P^{(j,\,0'')}(D)\varphi] \; (D^j g_\kappa^m)|| \le$$

$$\le ||\,[P(D)\varphi]\, g_\kappa^m|| + C_2\,\mu_2 \sum_{\beta\in(P);\beta_1\ge1} \; \sum_{j=1}^{\beta_1} (\frac{2}{\kappa})^j \, ||D^{(\beta_1-j,\;\beta'')}\varphi \, g_\kappa^{m-j}|| \le$$

$$\le ||(P(D)\varphi)\, g_\kappa^m)|| + \frac{2}{\kappa}\, C_2\, m\, \mu_2 \sum_{\beta\in(P)} ||D^\beta \varphi \, g_\kappa^{d(\beta)}||,$$

где $P^{(j,\,0'')}(D)$ оператор, отвечающий многочлену $D_1^j P(\xi)$ $j = 0, 1, \ldots$ Здесь мы воспользовались тем, что для $\kappa \ge m \ge 2$ имеет место неравенство $(2/\kappa)^j \le 2/\kappa$ для всех $j = 1, 2, \ldots$ Выберем число $\kappa_0 > max\{m, 2\, C_2\, \mu_2\, m\}$. Так как $(P) \subset \Re$, то переведя последний член последнего неравенства справа налево, деля обе части полученного неравенства на возникший положительный коэффициент и применяя неравенство (3.4), получим (3.3) для всех $\kappa \ge \kappa_0$. Лемма 3.2 доказана.

Далее для любого $k \in N_0$ через $\Re_k$ обозначим многогранник Ньютона набора мультииндексов $\{\alpha \in N_0^n; (\alpha_1 - k, \alpha'') \in \Re'\}$. В следующем предложении число κ_0 выбрано так, что для всех $\kappa \ge \kappa_0$ выполняются неравенства (3.1) - (3.3).

Лемма 3.3. *Пусть выполняются условия леммы 3.2. Тогда для каждого* $k \in N_0$ *существуют числа* a_j $(j = 0, 1, ..., k+1)$ *такие, что для любого* $\kappa \geq \kappa_0$

$$\sum_{\beta \in \Re_k} ||D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq \sum_{j=0}^{k} a_j\, ||D_1^j (P(D)\varphi)\, g_\kappa^{m+j}||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+a_{k+1} \sum_{|\alpha''| \leq m} ||D^{\alpha''} \varphi\, g_\kappa^{d(0,\alpha'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}] \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega\kappa). \tag{3.5}$$

Доказательство. Применим индукцию по k. Так как $\Re_0 = \Re$, то при $k = 0$ неравенство (3.5) следует из неравенства (3.3). Предположим, что $r \in N_0$ и что неравенства (3.5) справедливы для всех $k \leq r$, докажем их для $k = r+1$.

Применяя формулу Лейбница, получим $(d(\alpha_1 + r + 1, \alpha'') = d(\alpha) + r + 1)$

$$\sum_{\beta \in \Re_{r+1}} ||D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}|| = (\sum_{\beta \in \Re_{r+1} \setminus \Re_r} + \sum_{\beta \in \Re_r})||D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}|| =$$

$$= \sum_{\alpha \in \Re} ||D^{(\alpha_1+r+1,\,\alpha'')} \varphi\, g_\kappa^{d(\alpha_1+r+1,\,\alpha'')}|| + \sum_{\beta \in \Re_r} ||D^\beta \varphi\, g_\kappa^{d(\beta)}||, \tag{3.6}$$

По предположению индукции неравенство (3.5) справедливо для $k = r$, поэтому вторая сумма в правой части (3.6) оценивается через правую часть (3.5) при $k = r$ и, следовательно, через правую часть (3.5) при $k = r+1$. Таким образом, остается оценить только первую сумму правой части (3.6). С этой целью применим еще раз формулу Лейбница, получим ($C_{\alpha_1}^j$ – биномиальные коэффициенты)

$$\sum_{\alpha \in \Re} ||D^{(\alpha_1+r+1,\,\alpha'')} \varphi\; g_\kappa^{d(\alpha_1+r+1,\,\alpha'')}|| =$$

$$= \sum_{\alpha_1=0} ||D^{\alpha''} [D_1^{r+1} \varphi\; g_\kappa^{r+1}]\; g_\kappa^{d(\alpha)}|| + \sum_{\alpha_1 \geq 1} ||D^\alpha [D_1^{r+1} \varphi\; g_\kappa^{r+1}]\; g_\kappa^{d(\alpha)} -$$

$$- \sum_{j=1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^j [D^{(\alpha_1-j+r+1,\,\alpha'')} \varphi]\; (D_1^j g_\kappa^{r+1})\; g_\kappa^{d(\alpha)}|| \leq \sum_{\alpha \in \Re} ||D^\alpha [D_1^{r+1} \varphi\; g_\kappa^{r+1}]\; g_\kappa^{d(\alpha)}|| +$$

$$+ \sum_{\alpha \in \Re;\, \alpha_1 \geq 1} \sum_{j=1}^{\alpha_1} C_{\alpha_1}^j ||[D^{(\alpha_1-j+r+1,\,\alpha'')} \varphi]\; (D_1^j g_\kappa^{r+1})\; g_\kappa^{d(\alpha)}||. \tag{3.7}$$

Пусть $\alpha \in \Re$, положим $l_j = l_j(\alpha_1) = max\{r + 1 - j, 0\}$, тогда a) $d(\alpha) + l_j(\alpha) \geq d(\alpha_1 - j + r + 1,\, \alpha'')$; b) так как для точек $x \in \Omega_\kappa$ $|g_\kappa(x_1)| \leq 1$ и $|x_1|/\kappa \leq 1$, то с некоторыми постоянными $b_j > 0$ имеем (здесь $\beta^j \equiv (\alpha_1 - j + r + 1, \alpha'') \in \Re_r$)

$$|D^j\; g_\kappa^{r+1}(x_1)| \equiv |D_1^j\; g_\kappa^{r+1}(x_1)| \leq b_j\, g_\kappa^{l_j}(x_1); \;\; |x_1| \leq \kappa, \;\; (j = 1, \cdots, \alpha_1)$$

$$|\, D^j\; g_\kappa^{r+1}(x_1)\, g_\kappa^{d(\alpha)}| \leq b_j\, g_\kappa^{d(\alpha)+l_j}(x_1) \leq b_j\, g_\kappa^{d(\alpha_1-j+r+1,\,\alpha'')}(x_1),$$

Таким образом вторая сумма в правой части (3.7) оценивается через левую часть (3.5) для $k = r$, что по предположению индукции оценивается через правую часть (3.5) для $k = r + 1$. Так как $D_1^{r+1}\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$, то из леммы 3.2 следует, что

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha\in\Re}\|D^{\alpha}[D_1^{r+1}\varphi\ g_\kappa^{r+1}]\ g_\kappa^{d(\alpha)}\|\le C_1\,\|P(D)[D_1^{r+1}\varphi\ g_\kappa^{r+1}]\ g_\kappa^{m}\|+\\ &\qquad+\sum_{|\alpha''|\le m}\|D^{\alpha''}[D_1^{r+1}\varphi\ g_\kappa^{r+1}]\ g_\kappa^{d(0,\,\alpha'')}\|.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Применяя обобщенную формулу Лейбница, для первого слагаемого получаем

$$P(D)[D_1^{r+1}\varphi\ g_\kappa^{r+1}]=P(D)[D_1^{r+1}\varphi]\ g_\kappa^{r+1}+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l!}P^{(l,\,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\ D^l g_\kappa^{r+1}.$$

Отсюда имеем с некоторой постоянной $C_2>0$

$$|P(D)[D_1^{r+1}\varphi\ g_\kappa^{r+1}]|\le|P(D)[D_1^{r+1}\varphi]\ g_\kappa^{r+1}|+C_2\sum_{l=1}^{m}(\frac{2}{\kappa})^l|P^{(l,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]D^l g_\kappa^{r+1}|.$$

Откуда в свою очередь следует, что для любого $\kappa\ge 2$

$$\begin{aligned}&\|P(D)[D_1^{r+1}\varphi\ g_\kappa^{r+1}]\ g_\kappa^{m}\|\le\|P(D)[D_1^{r+1}\varphi]g_\kappa^{r+1+m}\|+\\ &\qquad+C_2\ \frac{2}{\kappa}\sum_{l=1}^{m}\|P^{(l,\,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\ g_\kappa^{r+1+m}\|.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Пусть $P^{(l,\,0'')}(D)=\sum\limits_{\nu\in(P);\,\nu_1\ge l}\gamma_\nu^l\,D^{(\nu_1-l,\,\nu'')}$ $(l=1,\cdots,m)$. Тогда

$$P^{(l,\,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\,g_\kappa^{r+1+m-l}=[\sum_{\nu\in(P)}\gamma_\nu^l\,D^{(\nu_1+r+1-l,\,\nu'')}\varphi]\,g_\kappa^{r+1+m-l}.$$

Так как $r+1+m-l\le r+1+m-1$ $(l=1,...,m)$ и $(r+m,\nu'')\in\Re_r$ для $\nu\in\Re$, то $(r+1+m-l,\nu'')\in\Re_r$ для всех $\nu\in\Re$ и $l=1,...,m$. С другой стороны, так как $0\le g_\kappa(x_1)\le 1$ для $x\in\Omega_\kappa$ и $\nu_1\le m$ для $\nu\in\Re$, то $g_\kappa^{r+1+m-l}\le g_\kappa^{r+1+\nu_1-l}$ для $x\in\Omega_\kappa$ и $\nu\in\Re$. Поэтому отсюда имеем с некоторой постоянной $C_3>0$

$$\sum_{l=1}^{m}\|P^{(l,\,0'')}(D)[D_1^{r+1}\varphi]\,g_\kappa^{r+1+m-l}\|\le C_3\sum_{\beta\in\Re_r}\|D^\beta\varphi\,g_\kappa^{d(\beta)}\|.$$

Для второй суммы в (3.8) имеем

$$\sum_{|\alpha''|\le m}\|D^{\alpha''}[D_1^{r+1}\varphi\,g_\kappa^{r+1}]\,g_\kappa^{d(0,\,\alpha'')}\|\le\sum_{|\alpha''|\le m}\|D^{(r+1,\,\alpha'')}\varphi\,g_\kappa^{d(0,\,\alpha'')+r+1}\|.$$

Так как $m\ge 2$ и $d(0,\alpha'')+r+1=d(r+1,\alpha'')$, то $(r+1,\alpha'')\in\Re_r$ для всех $\alpha''\in N_0^2:|\alpha''|\le m$ и отсюда имеем с некоторой постоянной $C_3>0$

$$\sum_{|\alpha''|\le m}\|D^{(r+1,\,\alpha'')}\varphi\,g_\kappa^{d(0,\,\alpha'')+r+1}\|\le C_3\sum_{\beta\in\Re_r}\|D^\beta\varphi\,g_\kappa^{d(\beta)}\|.$$

По предположению индукции правая часть этого неравенства оценивается через правую часть (3.5) для $k=r$, а из последних двух неравенств следует, что вторая сумма правой части (3.8) оценивается через правую часть (3.5) для $k=r+1$, что завершает доказательство леммы. Лемма 3.3 доказана. □

4. Весовые анизотропные пространства Соболева. Основной результат.

Пусть функция $g(t), d(\alpha)$, область Ω_κ и многогранник $\Re_l$ для любого $l \in N_0$ определены как выше и $H_l = H_l(\Re_l, g, d, \Omega_\kappa)$ множество функций u, локально интегрируемых в Ω_κ, с ограниченной нормой

$$||u||_{H_l} \equiv \sum_{\alpha\in\Re_l} ||D^\alpha u\, g_\kappa^{d(\alpha)}||_{L_2(\Omega_\kappa)}. \tag{4.1}$$

Легко проверить, что для любого $l \in N_0$ и для произвольных функций $d(\alpha)$ и $g(t)$, удовлетворяющих приведенным выше условиям, множество H_l с нормой (4.1) является полным нормированным пространством, совпадающим с $W_{2,\,g}^{m}(\Omega_\kappa)$ Соболева при $m_2 = m_3 = 0\cdot$ При $m_2^2 + m_3^2 \neq 0$ пространства типа H_l часто называют мультианизотропными весовыми пространствами Соболева.

Для полноты изложения, приведем, еще одно предложение, которым будем пользоваться. Сначала напомним, что положительная функция k, заданная в R^n называется **умеренно растущей весовой функцией,** (см. [3], Определение 10.1.1) если существуют положительные числа C и M, такие что

$$k(\xi+\eta) \le (1 + C|\xi|)^M; \;\; \forall \xi, \eta \in R^n.$$

Следуя Л. Хермандеру, множество всех таких функций обозначим через K. Для $k \in K$ через B_k обозначим множество $u \in S'$ (где $S' = S'(R^n)$ множество умеренно растущих распределений Л. Шварца, (см., например [4])) таких что преобразование Фурье $F(u)-$ функция и $||u||_k^2 \equiv ||u||_{B_k}^2 = \int |k(\xi)F(u)(\xi)|^2 d\xi < \infty$. Легко показать, что если $k_0 \in K$ и $k_j(\xi) = k_0(\xi)(1 + |\xi_1|^j)$, то $k_j \in K$ $(j = 1, 2, \cdots)\cdot$

Теорема Гординга - Мальгранжа (см. [3], Теорема 11.2.5). *Пусть $P(D)$ частично гипоэллиптический оператор относительно гиперплоскости $x'' = (x_2, ..., x_n) = 0$, $B_k^{loc}(G) = \{u \in B_k(G') \;\forall G' \subset G\}$ и $k_0 \in K$. Если $u \in B_{k_j}^{loc}(\Omega_\kappa)$ $(j = 0, 1, ...)$ является решением уравнения $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega_\kappa)$.*

Пусть, как выше, $P(D)$ частично гипоэллиптический (относительно плоскости $x'' = (x_2, x_3) = 0$ пространства E^3) оператор с многогранником Ньютона $\Re = \Re(m, m_2, m_3)$, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет (1.1) - (1.2) и $\kappa > 0$. Примером такого оператора является следующий оператор

$$P(D) = (-1)^{\frac{m}{2}}(D_1^m + D_2^m + D_3^m) + (-1)^{\frac{m+m_2}{2}} D_1^m D_2^{m_2} + (-1)^{\frac{m+m_3}{2}} D_1^m D_3^{m_3}.$$

Легко проверяется, что это частично гипоэллиптический (относительно плоскости $x'' = 0$) оператор, символ $P(\xi)$ которого является невырожденный, частично гипоэллиптический по $\xi'' = (\xi_2, \xi_3)$ и почти гипоэллиптический многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1^m + \xi_2^m + \xi_3^m + \xi_1^m\xi_2^{m_2} + \xi_1^m\xi_3^{m_3}$. Положим

$$N(P, \kappa) = \{u; D^{(0,\,\alpha'')}u \in L_2(\Omega_\kappa), |\,\alpha''| \le m, \;\; P(D)u = 0 \;\; x \in \Omega_\kappa\}\cdot$$

Пусть $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$, $\psi \geq 0$, $\int \psi(t)dt = 1$, $h > 0$ и $\psi_h(t) = h^{-1}\,\psi(t/h)$. Обозначим

$$u_h(x) = u * \psi_h = \frac{1}{h}\int\limits_{E^1} u(x_1 - t, x'')\psi_h(t)dt\cdot$$

Легко убедиться в том, что $D^\alpha u_h \in L_2$ для $\alpha \in \Re_l$ $(l = 0, 1, \cdots)$ и $D^{\alpha''} u_h = (D^{\alpha''} u)_h$ для $|\alpha''| \leq m\cdot$

Лемма 4.1. *Пусть* $u \in N(P, \kappa)\cdot$ *Тогда для любого* $l = 0, 1, \cdots$

$$\|(D_1^l P(D) u_h) g_\kappa^{m+l}\|_{L_2(\Omega_\kappa)} \to 0 \quad \text{при } h \to +0. \tag{4.3}$$

Доказательство. Так как $P(D)u = 0$ для $u \in N(P, \kappa)$, то $D_1^l[P(D)u] = 0$ $(l = 0, 1, \cdots)\cdot$ Поэтому $D_1^l P(D) u_h(x) = [D_1^l P(D)u]_h(x) = 0$ $(l = 0, 1, \cdots)$ для точек $x \in \Omega_{\kappa-h}$ (см. [25] , 6.2.(2)). Следовательно, для доказательства (4.3) достаточно доказать, что при $h \to +0$

$$\|(D_1^l P(D) u_h) \cdot g_\kappa^{m+l}\|_{L_2(\Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h})} \to 0; \quad l = 0, 1, \cdots. \tag{4.4}$$

Пусть $D_1^l P(D) = \sum\limits_{\alpha \in (D_1^l P)} \gamma_\alpha^k D^\alpha$ и $\gamma = max\{|\gamma_\alpha^l|,\ \alpha \in (D_1^l P)\}$. Так как $g_\kappa(x_1) \leq 2h/\kappa$ для $x \in \Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h}$, то, применяя неравенство Юнга, получим с некоторой постоянной $C_l = C_l(\kappa) > 0$

$$\|(D_1^l P(D) u_h)\, g_\kappa^{m+l}\|_{L_2(\Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h})} \leq (\frac{2h}{\kappa})^{m+l}\, \|D_1^l P(D) u_h\|_{L_2(\Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h})} \leq$$

$$\leq \gamma\, (\frac{2h}{\kappa})^{m+l} \sum_{\alpha \in (\Re)} \|\int (D^{\alpha''} u)(x_1 - y_1, x'')\, D_1^{\alpha_1 + l} \psi_h(y_1) dy_1\|_{L_2(\Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h})} \leq$$

$$\leq \gamma\, (\frac{2h}{\kappa})^{m+l} \sum_{\alpha \in \Re} \|D_1^{\alpha_1 + l} \psi_h\|_{L_1} \sup_{|y_1| < h} \|(D^{\alpha''} u)(x_1 - y_1, x'')\|_{L_2(\Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h})} \leq$$

$$\leq C_l (\frac{1}{h})^{m+l} (\frac{2h}{\kappa})^{m+l} \sum_{|\alpha''| \leq m} \sup_{|y_1| < h} \|(D^{\alpha''} u)(x_1 - y_1, x'')\|_{L_2(\Omega_\kappa \setminus \Omega_{\kappa-h})}\cdot \tag{4.5}$$

По определению множества $N(P, \kappa)$ имеем $D^{\alpha''} u \in L_2(E^n)$ для $|\alpha''| \leq m$. Поэтому применение теоремы Фубини даёт

$$\omega_{\alpha''}(x_1) \equiv \int_{E^{n-1}} (D^{\alpha''} u)^2(x) dx'' \in L_1(E^1); \quad \omega_{\alpha''}(x_1) = 0, \ |x_1| > \kappa.$$

Отсюда имеем при $h \to +0$, и $|\alpha''| \leq m$

$$\sup_{|y_1| < h} \|(D^{\alpha''} u)(x_1 - y_1, x'')\| = \sup_{|y_1| < h} \|\omega_{\alpha''}(x_1 - y_1)\|^{1/2}_{L_1(\kappa - h < |x_1| < \kappa)} \to 0.$$

Это вместе с (4.5) доказывает (4.4). Лемма 4.1 доказана.

Докажем наконец основной результат настоящей работы.

Теорема 4.1. *Пусть* $\Re = \Re(m_1, m_2, m_3)$ *многогранник Ньютона оператора* $P(D)$, *символ* $P(\xi)$ *которого удовлетворяет условиям (1.1) - (1.2) и число* $\kappa_0 > 0$ *выбрано как в лемме 3.2. Тогда для* $\kappa \geq \kappa_0$

a) $N(P,\kappa) \subset H(\Re_l, g, \Omega_\kappa)$ *для всех* $l = 0, 1, ...$

b) $N(P,\kappa) \subset C^\infty(\Omega_\kappa)$.

Доказательство первой части. Пусть $l \in N_0, \kappa \geq \kappa_0, u \in N(P,\kappa)\cdot$ Мы должны доказать, что $u \in H(\Re_l, g, \Omega_\kappa)\cdot$ При этом будем считать, что функции $u \in N(P,\kappa)$ продолжены нулем вне Ω_κ . Пусть $h > 0$ и по функции $\psi \in C_0^\infty(-1,1)$ функция $u_h(x)$ построена как выше. Очевидно, для любых $h > 0$ и $l \in N_0$ $u_h \in H_l$. Поэтому, применяя лемму 3.3, получим для любого $\kappa \geq \kappa_0\cdot$

$$||u_h||_{H_l} = \sum_{\beta \in \Re_l} ||(D^\beta u_h) g_\kappa^{d(\beta)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq \sum_{j=0}^{l} a_j \, ||D_1^j (P(D) u_h) g_\kappa^{m+j}||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$

$$+ a_{l+1} \sum_{|\beta''| \leq m} ||D^{\beta''} u_h \, g_\kappa^{d(0,\beta'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}. \tag{4.6}$$

Пусть $\{h_k\}$ произвольная бесконечно убывающая последовательность. Покажем, что последовательность $\{u_{h_k}\}$ сходится в H_l. Так как H_l полное пространство, для этого достаточно доказать, что последовательность $\{u_{h_k}\}$ фундаментальна в H_l. Так как $u_{h_p} - u_{h_s} \in H_l$, то из неравенства (4.6) получим

$$||u_{h_p} - u_{h_s}||_{H_l} \leq \sum_{j=0}^{l} a_j \, ||D_1^j (P(D)[u_{h_p} - u_{h_s}]) g_\kappa^{m+j}||_{L_2(\Omega_\kappa)} +$$
$$+ a_{l+1} \sum_{|\beta''| \leq m} ||D^{\beta''} [u_{h_p} - u_{h_s}] \, g_\kappa^{d(0,\beta'')}||_{L_2(\Omega_\kappa)}.$$

Пусть $p, s \to \infty$, тогда первая сумма правой части этого неравенства стремится к нулю по лемме 4.1, а вторая сумма стремится к нулю так как по определению множества $N(P,\kappa)$ $D^{\beta''} u \in L_2(\Omega_\kappa)$ при $|\beta''| \leq m$, следовательно (если еще иметь в виду, что $|g_\kappa^{d(0,\beta'')}| \leq 1$) $D^{\beta''} u_h \, g_\kappa^{d(0,\beta'')} \in L_2(\Omega_\kappa)$ при $|\beta''| \leq m$ для любого $h > 0$.

Итак, $u_{h_k}-$ последовательность Коши в пространстве H_l для каждого $l \in N_0$, следовательно $u_{h_k}-$ сходится. Очевидно, в $L_2(\Omega_\kappa)$ последовательность u_{h_k} сходится к исходной функции $u\cdot$ Так как оператор обобщенного дифференцирования является замкнутым оператором (см. [25], лемма 6.2), то $u_{h_k} \to u$ при $k \to \infty$ также в H_l, при этом $u \in H_l$, что доказывает пункт а) теоремы.

Для доказательства второй части теоремы, сначала покажем, что для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ и каждого $j \in N_0$ существует число $C = C(j, \varphi, g, \kappa) > 0$, не зависящее от u такое, что

$$\sum_{\alpha \in \Re_j} ||D^\alpha (u\varphi)||_{L_2(\Omega_\kappa)} \leq C ||u||_{H_j} \quad \forall u \in H_j. \tag{4.7}$$

Пусть $\alpha \in \Re_j$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ и $j \in N_0$ фиксированы. Применяя формулу Лейбница, имеем для произвольной функции $u \in H_j$

$$(4.8) \qquad D^\alpha(u\varphi) = \sum_{\beta\le\alpha} C_{\alpha,\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta}\varphi = \sum_{\beta\le\alpha} C_{\alpha,\beta}\{[D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}]\,[D^{\alpha-\beta}\varphi/g_\kappa^{d(\beta)}]\},$$

где $C_{\alpha,\beta}-$ биномиальные коэффициенты.

Очевидно, что для любых $\alpha,\beta \in \Re_j$ функция $\phi_{\alpha,\beta}(x) = D^\alpha\varphi(x)/g_\kappa^{d(\beta)}(x_1)$ при $x \in supp\,\varphi$ и $\phi_{\alpha,\beta}(x) = 0$ при $x \notin supp\,\varphi$ принадлежит $C_0^\infty(\Omega_\kappa)$. Положим $C_j' = \max_{\alpha,\beta\in\Re_j}\{C_{\alpha,\beta}\}$, $c_j' = \max_{\alpha,\beta\in\Re_j}\{|\phi_{\alpha,\beta}(x)|\}$, $c_j = c_j'C_j'$.

Так как многогранник $\Re_j$ правильный и $\alpha \in \Re_j$, то $\beta \in \Re_j$ и $(\alpha-\beta) \in \Re_j$ для любого мультииндекса $\beta \le \alpha$. Поэтому из (4.8) имеем

$$|D^\alpha(u\varphi)| \le c_j \sum_{\beta\le\alpha} |D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}| \le \sum_{\beta\in\Re_j} |D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}|.$$

Отсюда имеем с некоторой постоянной $C_j = C_j(\varphi, g) > 0$

$$||D^\alpha(u\varphi)||_{L_2(\Omega_\kappa)} \le C_j \sum_{\beta\in\Re_j} ||D^\beta u g_\kappa^{d(\beta)}||_{L_2(\Omega_\kappa)} = C_j||u||_{H_j}.$$

Так как мультииндекс $\alpha \in \Re_j$ произвольный, то это доказывает неравенство (4.7) с постоянной $C = C_j\,C(\Re_j) > 0$, где $C(\Re_j)$ число мультииндексов $\alpha \in \Re_j$.

Пусть $k_0(\xi) = 1 + |P(\xi)|$, $k_j(\xi) = k_0(\xi).(1+|\xi_1|)^j$ $(j = 1,2,...)$. Так как оператор $P(D)$ удовлетворяет условиям (1.1)-(1.2), то легко убедится в том, что $k_j(\xi)$ $(j = 0,1,\cdots)$ являются медленно растущими весовыми функциями. С другой стороны, так как оператор $P(D)$ частично гипоэллиптичен относительно плоскости $x'' = (x_2,x_3) = 0$, то имея в виду теорему Гординга - Мальгранжа, получим, что для доказательства второй части теоремы, достаточно показать, что $N(P,\kappa) \subset B_{2,k_j}^{loc}(\Omega_\kappa)$, $\kappa \ge \kappa_0$, $j = 0,1,\cdots$, т.е. достаточно показать, что для произвольных $u \in N(P,\kappa)$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$ $u\varphi \in B_{2,k_j}$ $j = 0,1,\cdots$.

Легко показать, что для многочлена $P(\xi)$ с многогранником $\Re$ и для каждого $j \in N_0$ существует постоянная $\delta_j > 0$ такая, что

$$(4.9) \qquad (1+|P(\xi)|)(1+|\xi_1|)^j \le \delta_j \sum_{\alpha\in\Re_j} |\xi^\alpha| \quad \forall\xi \in R^3.$$

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\kappa)$. Применяя неравенство (4.9), уже доказанный пункт а) настоящей теоремы и равенство Парсеваля, получим с некоторыми положительными постоянными $C_1 = C_1(\Re_j)$, $C_2 = C_2(\Re,\varphi)$

$$||u\varphi||_{B_{2,k_j}(\Omega_\kappa)} = ||(1+|P(\xi)|)(1+|\xi_1|)^j F(u\varphi)(\xi)||_{L_2(E^3)} \le$$

$$\le \delta_j \,||\sum_{\alpha\in\Re_j} |\xi^\alpha| F(u\varphi)(\xi)||_{L_2(E^3)} = \delta_j \sum_{\alpha\in\Re_j} ||D^\alpha(u\varphi)||_{L_2(\Omega_\kappa)}.$$

Применяя здесь оценку (4.7), получим $||u\varphi||_{B_{2,k_j}(\Omega_\kappa)} \le C\,\delta_j\,||u||_{H_j}$, где число δ_j, не зависящее от $u \in N(P,\kappa)$, взято из (4.7). Теорема 4.1 доказана.

Abstract. For a class of non-degenerate (regular) almost hypoelliptic equations, which are partially hypoelliptic with respect to certain variables, infinitely differentiable in a specific strip solutions are extracted.

Список литературы

[1] L. Hörmander, On the Theory of General Partial Differential Operators, Acta Math. **94** (1955).
[2] L. Hörmander, "Hypoelliptic differential operators", Ann. Inst. Fourier11, 477 – 492 (1961).
[3] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators. 2, Springer - Verlag (1983).
[4] L. Schwartz, Theorie des Distributions 1, Hermann, Paris (1950).
[5] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщенные Функции, Вып. 1, Москва, Физматгиз (1959).
[6] L. Gårding, B. Malgrange, "Operateurs differentiels partillement hypoelliptiques", Math. Scand. **9**, 5 – 21, (1961).
[7] L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division. 4", Amer. J. Math. **82**, 522 – 588 (1960).
[8] J. Peetre, Theoremes de Regularite Pour Quelques Classes D'operateurs Differentiels, Thesis - Lund (1959).
[9] Е. А. Горин, "Частично гипоэллиптические дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами", Сиб. Мат. Журнал, **3**, но. 4, 500 – 526 (1962).
[10] Ю. В. Егоров, "О субэллиптических операторах", УМН, **30**, но. 2, 57 – 114 (1975).
[11] J. Friberg, Estimates for Partially Hypoelliptic Differential Operators, Medd.Lunds Univ.Mat. Sem., **17** (1963).
[12] Robert J. Elliot, "Almost hypoelliptic differential operators", Proceedings of the London Mathematical Society, **19**, Issue 3, 537 – 552 (1969).
[13] Robert J. Elliot, "Almost hypoelliptic differential operators with variable coefficients", Mathematical Procedings of the Cambrige Philosophical Soceity, **67**, 287 – 293 (1970).
[14] Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов", Труды МИАН СССР, **77**, стр. 45 – 64 (1965).
[15] В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоэллиптичности для функций стремящихся к нулю на бесконечности", Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, Ереван, 63 – 67 (1982).
[16] V. I. Burenkov, "Conditional hypoellipticity and Fourier multipliers in weighted L_p−spaces with an exponential weight", Proc.of the Summer School "Function spaces, differential operators, nonlinear analysis" held in Fridrichroda in 1993. B. G. Teubner, Stuttgart - Leipzig. Teubner - Texte zur Mathematik, **133**, 256 – 265 (1993).
[17] G. G. Kazaryan, "On almost hypoelliptic polynomials", Dolady Ross. Acad. Nauk, Math. **398**, no. 6, 701 – 703 (2004).
[18] Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Об одном классе почти гипоэллиптических операторов", Известия НАН Армении, Математика, **41**, но. 6, 39 – 56 (2006).
[19] H. G. Ghazaryan, V. N. Margaryan, "On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations", Eurasian Math. Journal, 1, no. 1, 54 – 72 (2010).
[20] В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, **91**, 59 – 81 (1967).
[21] L. R. Volevich, S. G. Gindikin, The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of PDE, Kluwer (1992).
[22] Г. Г. Казарян, "О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности", Известия НАН Армении, Математика, **46**, но. 6, 11 – 30, (2011).
[23] С. М. Никольский, "Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения", ДАН СССР, **146**, но. 4, 2083 – 2085 (1962).
[24] H. G. Ghazaryan, "On selection of infinite differentiable solutions of a class of partially hypoelliptic equations", Eurasian Math. Journal, **3**, no 3, 58 – 70 (2012).
[25] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Москва, Наука, Физматгиз (1996).

Поступила 14 марта 2012