Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 6, 2013, стр. 27-34.

О ПОТЕНЦИАЛАХ ГРИНА С ОГРАНИЧЕННЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ СРЕДНИМИ

А. ДЖРБАШЯН, Э. ДИАЗ

Институт математики НАН Армении
Университет Антиохии, Меделлин, Колумбия
E-mail: *armen_jerbashian@yahoo.com*

Аннотация. Статья посвящена исследованию класса потенциалов Грина в единичном круге комплексной плоскости, обладающих ограниченными квадратичными интегральными средними.

MSC2010 number: 31A99, 31C05

Ключевые слова: потенциал Грина; борелевская мера; полнота.

1. Введение

Статья посвящена исследованию класса потенциалов Грина в единичном круге комплексной плоскости, обладающих ограниченными квадратичными интегральными средними, что является близкой к классической задачей, тесно связанной с работой [2].

Хорошо известен классический результат о том, что *если $\nu(\zeta) \geq 0$ борелевская мера в $|\zeta| < 1$, то потенциал Грина*

$$P(z) = -\iint_{|\zeta|<1} \log\left|\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right| d\nu(\zeta) \tag{1.1}$$

сходится в $|z| < 1$ и

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} P(re^{i\vartheta})d\vartheta < +\infty \tag{1.2}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие Бляшке

$$\iint_{|\zeta|<1} (1-|\zeta|)\, d\nu(\zeta) < +\infty. \tag{1.3}$$

Следующая теорема отвечает на вопрос: *Какое более сильное чем* (1.3) *условие на генерирующую меру равносильно* (1.2) *с квадратом потенциала Грина?*

Теорема 1.1. *Потенциал Грина* (1.1), *генерированный борелевской мерой* $\nu \geq 0$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi(P) \equiv \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta < +\infty \tag{1.4}$$

тогда и только тогда, когда

$$\Psi(P) \equiv \iint_{|\zeta_1|<1} \iint_{|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|, |\zeta_2|) d\nu(\zeta_1) d\nu(\zeta_2) < +\infty, \tag{1.5}$$

где

$$\mathcal{K}(a,b) = \int_0^{1-a^2} dx \int_0^{1-b^2} \frac{dy}{x+y}, \quad 0 < a, b < 1,$$

и это обеспечивается следующими неравенствами:

$$C_1 \Psi(P) \leq \Phi(P) \leq C_2 \Psi(P), \tag{1.6}$$

где C_1 *и* C_2 *- положительные постоянные, зависящие только от меры* ν.

Замечание 1.1. *С применением неравенства* $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ *к* (1.5) *получаем*

$$\Psi(P) \leq 2 \left\{ \iint_{|\zeta|<1} \sqrt{1 - |\zeta|^2}\, d\nu(\zeta) \right\}^2. \tag{1.7}$$

Следующая теорема относится к полноте рассматриваемого в теореме 1.1 множества потенциалов.

Теорема 1.2. *Множество* $\mathcal{P}_0$ *потенциалов Грина* (1.1) *удовлетворяющих условию* (1.4) *полно в метрике*

$$\rho(P_1, P_2) = \left\{ \iint_{|\zeta_1|<1} \iint_{|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|, |\zeta_2|) d|(\nu_1 - \nu_2)(\zeta_1)| d|(\nu_1 - \nu_2)(\zeta_2)| \right\}^{1/2},$$

где потенциалы P_1 *и* P_2 *генерированы борелевскими мерами* $\nu_1 \geq 0$ *и* $\nu_2 \geq 0$, *а* $|\nu_1 - \nu_2|$ *означает полную вариацию заряда* $\nu_1 - \nu_2$, *т.е. сумму его положительной и отрицательной вариаций.*

Замечание 1.2. *Из приведенного в следующем разделе статьи доказательства теоремы 1.2 следует, что также множество* $\mathcal{P}_1$ ($\subset \mathcal{P}_0$) *потенциалов Грина в* $|z| < 1$, *определенное условием ограниченности правосторонней величины в* (1.7), *полно в метрике*

$$\widetilde{\rho}(P_1, P_2) = \iint_{|\zeta|<1} \sqrt{1 - |\zeta|}\, d|(\nu_1 - \nu_2)(\zeta)|.$$

Замечание 1.3. *Ввиду теоремы 1.2 легко доказать, что множества генерированных зарядами потенциалов Грина, удовлетворяющих условиям* $\|P\|_0 = \rho(P, 0) < +\infty$, *или* $\|P\|_1 = \widetilde{\rho}(P, 0) < +\infty$ *- Банаховы пространства.*

2. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Доказательство теоремы 1.1. Если $d_0 \in (0,1)$ - фиксированное число и

$$P_0(z) = -\iint_{|\zeta|<d_0} \log\left|\frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\right| d\nu(\zeta),$$

то $P_0(z)$ очевидно удовлетворяет условию (1.4). Тем самым, далее будем считать, что борелевская мера $\nu(\zeta)$ такова, что $\inf\{|\zeta| : \zeta \in \operatorname{supp}\nu\} \geq d_0$. Это предположение не умаляет общности применяемого рассуждения, нацеленного на доказательство неравенств (1.6).

Для доказательства правого неравенства (1.6) следует оценить интеграл (1.4), что достижимо оценкой величины

$$I(r,\zeta_1,\zeta_2) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|b_0\big(re^{i\vartheta}, \rho_1 e^{i\varphi_1}\big)\right| \log\left|b_0\big(re^{i\vartheta}, \rho_2 e^{i\varphi_2}\big)\right| d\vartheta$$

$(0 < r, \rho_1, \rho_2 < 1,\ \varphi_{1,2} \in [0, 2\pi])$, где

$$\log|b_0(z,\zeta)| = -\mathrm{Re}\int_{|\zeta|^2}^1 \frac{dt}{(1-\frac{z}{\zeta}t)t} = \log\left|\frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\right| - \log\frac{1}{|\zeta|} < 0 \tag{2.1}$$

частный вид фактора типа Бляшке из [1]. Отметив, что $I(r,\zeta_1,\zeta_2)$ очевидно является непрерывной функцией от r, ρ_1, ρ_2 и φ_1, φ_2, рассмотрим два отдельных случая. Однако, предварительно заметим, что если $z = re^{i\vartheta}$ и $\zeta = \rho e^{i\varphi}$ - точки единичного круга и $r/\rho < 1$, то

$$\frac{z}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}t} = \frac{z}{\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}t\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k+1} t^k,$$

и, тем самым,

$$\log\left|b_0\big(re^{i\vartheta}, \rho e^{i\varphi}\big)\right| = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1} \cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi)\right]\int_{\rho^2}^1 t^k dt - \log\frac{1}{\rho^2}. \tag{2.2}$$

Отметим также, что при любых целых числах $k, n \geq 0$ и любом $\varphi_{1,2} \in [0, 2\pi)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi_1)\right]\cos\left[(n+1)(\vartheta-\varphi_2)\right]d\vartheta = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq n, \\ \frac{1}{2}\cos\left[(k+1)(\varphi_1-\varphi_2)\right] & \text{при} \quad k = n. \end{cases} \tag{2.3}$$

(a) Пусть $\zeta_{1,2} = \rho_{1,2}e^{i\varphi_{1,2}}$, $0 < d_0 \leq \rho_1, \rho_2 < 1$ и $0 < r < \rho_1, \rho_2$. Тогда $r/\rho_{1,2} < 1$ и, ввиду (2.2), (2.3) нетрудно вычислить

$$I(r,\zeta_1,\zeta_2) = \frac{1}{2}\int_{\rho_1^2}^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_1^2}^1 \frac{dt_2}{t_2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r^2 t_1 t_2}{\rho_1\rho_2}\right)^{k+1}\cos\left[(k+1)(\varphi_1-\varphi_2)\right] + \log\frac{1}{\rho_1^2}\log\frac{1}{\rho_2^2}.$$

Здесь $0 < \frac{r^2 t_1 t_2}{\rho_1\rho_2} < t_1 t_2 < 1$, и поэтому вычислением последней суммы получаем

$$(2.4)\qquad I(r,\zeta_1,\zeta_2)=\frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^1 P\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1^3}\log\frac{1}{\rho_2^2},$$

где

$$P\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2},\varphi_1-\varphi_2\right)=\frac{1-\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2}\right)^2}{\left(1-\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2}\right)^2+4\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2}\sin^2\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}$$

- ядро Пуассона, и, тем самым,

$$\begin{aligned}I(r,\zeta_1,\zeta_2)&\le\frac{1}{2d_0^2}\int_{\rho_1^2}^1 dt_1\int_{\rho_1^2}^1\frac{dt_2}{1-t_1t_2}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1}\log\frac{1}{\rho_2}\\&=\frac{1}{2d_0^2}\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{1-(1-x)(1-y)}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1}\log\frac{1}{\rho_2}.\end{aligned}$$

Здесь же $x\le 1-d_0^2<(1-d_0^2)(\frac{x}{y}+1)$, и тем самым $1-(1-x)(1-y)=x+y-xy>d_0^2(x+y)$. Следовательно

$$(2.5)\qquad I(r,\zeta_1,\zeta_2)\le\frac{1}{2d_0^4}\int_0^{1-\rho_1^2}dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y}+\frac{3}{4}\log\frac{1}{\rho_1}\log\frac{1}{\rho_2}$$

при $0<d_0\le\rho_{1,2}<1$ и $0<r<\rho_{1,2}$.

(б) Пусть $0<d_0\le\rho_{1,2}<r<1$. Тогда для аналогичного вычисления заметим, что если $|\zeta|<|z|<1$ (т.е. $\rho<r<1$), то ввиду (2.1)

$$\begin{aligned}\log|b_0(z,\zeta)|&=-\mathrm{Re}\frac{z}{\zeta}\int_{|\zeta|^2}^{|\zeta/z|}\frac{dt}{1-\frac{z}{\zeta}t}-\int_{|\zeta|^2}^{|\zeta/z|}\frac{dt}{t}+\mathrm{Re}\frac{\zeta}{z}\int_{|\zeta/z|}^1\frac{dt}{\left(1-\frac{\zeta}{zt}\right)t^2}\\&=-\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{r}{\rho}\right)^{k+1}\cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi)\right]\int_{\rho^2}^{\rho/r}t^kdt-\log\frac{1}{r\rho}\\&\quad+\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{\rho}{r}\right)^{k+1}\cos\left[(k+1)(\vartheta-\varphi)\right]\int_{\rho/r}^1 t^{-k-2}dt.\end{aligned}$$

Поэтому, пользуясь (2.3) получаем

$$\begin{aligned}I(r,\zeta_1,\zeta_2)&=\log\frac{1}{r\rho_1}\log\frac{1}{r\rho_2}-\frac{1}{4}\log^2\frac{1}{r^2}+\frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^{\rho_1/r}\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^{\rho_2/r}P\left(\frac{r^2t_1t_2}{\rho_1\rho_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}\\&\quad+\frac{1}{4}\int_{\rho_1/r}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2/r}^1 P\left(\frac{\rho_1\rho_2}{r^2t_1t_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}\\&\quad-\frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^{\rho_1/r}\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2/r}^1 P\left(\frac{\rho_2t_1}{\rho_1t_2},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}\\&\quad-\frac{1}{4}\int_{\rho_1/r}^1\frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^{\rho_2/r}P\left(\frac{\rho_1t_2}{\rho_2t_1},\varphi_1-\varphi_2\right)\frac{dt_2}{t_2}.\end{aligned}$$

Выбросив последние два отрицательных члена и рассуждая как в предыдущем случае (a) получим, что при $0 < d_0 \le \rho_1, \rho_2 < r < 1$

$$I(r, \zeta_1, \zeta_2) \le \frac{1}{2d_0^4}\left(1 + \frac{1}{d_0^4}\right)\int_0^{1-\rho_1^2} dx \int_0^{1-\rho_2^2} \frac{dy}{x+y} + \log\frac{1}{\rho_1^2}\log\frac{1}{\rho_2^2}. \tag{2.6}$$

Перейдя к интегралу от квадрата потенциала Грина, заметим, что

$$\begin{aligned} J(r) &\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{|\zeta|<1}\log\left|b_0(re^{i\vartheta},\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{|\zeta|\le r}\log\left|b_0(re^{i\vartheta},\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{r<|\zeta|<1}\log\left|b_0(re^{i\vartheta},\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta \\ &= 2\left(\iint_{|\zeta_1|\le r}\iint_{|\zeta_2|\le r} + \iint_{r<|\zeta_1|<1}\iint_{r<|\zeta_1|<1}\right) I(r,\zeta_1,\zeta_2)\,d\nu(\zeta_1)\,d\nu(\zeta_2), \end{aligned} \tag{2.7}$$

а отсюда, ввиду (2.5) и (2.6), получаем

$$J(r) \le 2\left(\iint_{|\zeta|<1}\log\frac{1}{|\zeta|^2}d\nu(\zeta)\right)^2 + \frac{1}{2d_0^4}\left(2 + \frac{1}{d_0^4}\right)\int_0^{1-\rho_1^2} dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y}.$$

Далее, при лобых числах $\rho_{1,2} \in [d_0, 1)$

$$\log\frac{1}{\rho_1^2}\log\frac{1}{\rho_2^2} \le \frac{1}{d_0^4}(1-\rho_1^2)(1-\rho_2^2) \le \frac{2}{d_0^4}\int_0^{1-\rho_1^2} dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y},$$

и поэтому

$$\sup_{0<r<1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta = \sup_{0<r<1} J(r) \le \frac{1}{d_0^4}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{1}{d_0^4}\right)\int_0^{1-\rho_1^2} dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y},$$

т.е. доказано правое неравенство в (1.6).

Для доказательства левого неравенства в (1.6) сначала отметим, что если замыкание множества $\operatorname{supp}\nu(\zeta)$ содержится в некотором круге $|\zeta| < d_0 < 1$, то функция $\mathcal{K}(|\zeta_1|, |\zeta_2|)$ ($\zeta_{1,2} \in \operatorname{supp}\nu(\zeta)$) ограничена, и поэтому

$$+\infty > \sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\left[P(re^{i\vartheta})\right]^2 d\vartheta > C_{d_0}\iint_{|\zeta_1|<\delta}\iint_{|\zeta_2|<\delta}\mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)\,d\nu(\zeta_1)\,d\nu(\zeta_2)$$

с некоторой постоянной $C_{d_0} > 0$ зависящей только от d_0. Для случая же, когда $\operatorname{supp}\nu(\zeta)$ имеет предельные точки на окружности $|\zeta| = 1$, заметим, что для величины $J(r)$ из (2.7)

$$\sup_{0<r<1} J(r) \geq J(1/3) \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta|<1} \log\left|b_0(e^{i\vartheta}/3,\zeta)\right|d\nu(\zeta)\right)^2 d\vartheta$$
$$= \iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_1|<1}\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_2|<1} I(1/3,\zeta_1,\zeta_2)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2),$$

где, ввиду (2.4),

$$I(1/3,\zeta_1,\zeta_2) > \frac{1}{4}\int_{\rho_1^2}^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^1 \frac{1-\left(\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2}{\left(1-\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2+4\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}}\frac{dt_2}{t_2}$$
$$\geq \frac{1}{8}\int_{\rho_1^2}^1 \frac{dt_1}{t_1}\int_{\rho_2^2}^1 \frac{1-\left(\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2}{\left(1-\frac{t_1t_2}{9\rho_1\rho_2}\right)^2}\frac{dt_2}{t_2} = \frac{1}{8}\int_{\rho_1/3}^1 \frac{d\lambda_1}{\lambda_1}\int_{\rho_2/3}^1 \frac{1+\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{\lambda_2}$$
$$> \frac{1}{8}\int_0^{1-\rho_1/3} dx\int_0^{1-\rho_2/3}\frac{dy}{x+y}dy > \frac{1}{8}\int_0^{1-\rho_1^2} dx\int_0^{1-\rho_2^2}\frac{dy}{x+y}dy.$$

Таким образом

$$\sup_{0<r<1} J(r) \geq \frac{1}{8}\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_1|<1}\iint_{\frac{5}{8}<|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2),$$

левое неравенство (1.6) справедливо в любом случае, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $\{P_n\}_1^\infty \subset \mathcal{P}_0$ - фундаментальная последовательность потенциалов, удовлетворяющих условию (1.4). Ввиду теоремы 1.1, это означает, что неотрицательные борелевские меры $\{\nu_n\}_1^\infty$, генерирующие $\{P_n\}_1^\infty$, удовлетворяют условию (1.5), и для любого $\varepsilon > 0$

$$\rho^2(P_{n+m},P_n) = \iint_{|\zeta_1|<1}\iint_{|\zeta_2|<1} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_1)|d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_2)| < \varepsilon$$

при достаточно большом $N_\varepsilon \geq 1$ и любых $n \geq N_\varepsilon$ и $m \geq 1$. Для доказательства существования потенциала $P(z) \in \mathcal{P}_0$, такого что $\rho(P_n, P) \to 0$ при $n \to \infty$, будем пользоваться некоторыми хорошо известными результатами из [3].

Зафиксировав произвольное число $\delta \in (0,1)$, заметим, что

$$\left(\iint_{|\zeta|\leq\delta} d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta)|\right)^2$$
$$\leq \frac{2}{(1-\delta^2)^2}\iint_{|\zeta_1|\leq\delta}\iint_{|\zeta_2|\leq\delta} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_1)|d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta_2)|$$
$$\leq \frac{2}{(1-\delta^2)^2}\rho^2(P_{n+m},P_n) < \frac{2\varepsilon}{(1-\delta^2)^2}.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $N'_\varepsilon \ge 1$ такое, что

$$\iint_{|\zeta|\le\delta} d|(\nu_{n+m}-\nu_n)(\zeta)| < \varepsilon, \quad n \ge N'_\varepsilon, \; m \ge 1.$$

Отсюда следует, что последовательность чисел $\{\nu_n(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\}_1^\infty$ фундаментальна, и поэтому $0 \le \nu(\overline{\mathbb{D}}_\delta) \le A_\delta < +\infty$, $n \ge 1$. Кроме того, последовательность борелевских мер $\{\nu_n\}_1^\infty$ фундаментальна на линейном многообразии Φ_δ вещественных, непрерывных функций в круге $\overline{\mathbb{D}}_\delta = \{\zeta : |\zeta| \le \delta\}$, и поэтому, ввиду теоремы 0.4′ из [3], существует Борелевская мера $\nu_* \ge 0$ на $\overline{\mathbb{D}}_\delta$ такая, что в Φ_δ справедлива слабая сходимость $\nu_n \Rightarrow \nu_*$, $n \to \infty$, т.е. при любой функции $g(\zeta) \in \Phi_\delta$

$$\iint_{|\zeta|<1} g(\zeta)d\nu_n(\zeta) \to \iint_{|\zeta|<1} g(\zeta)d\nu_*(\zeta) \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Далее, ввиду очевидного неравенства $\left|\rho(P_{n+m},0)-\rho(P_n,0)\right| \le \rho(P_{n+m},P_n)$ также последовательность чисел $\{\rho(P_n,0)\}_1^\infty$ фундаментальна, и поэтому

$$\rho(P_n,0) \to b < +\infty \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{и} \quad \rho(P_n,0) \le B < +\infty, \quad n \ge 1. \tag{2.8}$$

В силу теоремы 0.6 из [3] существует последовательность $n_k \uparrow +\infty$ такая, что при $k \to \infty$ в Φ_δ имеем $\nu_{n_k} \Rightarrow \nu^\delta$, где $\nu^\delta \ge 0$ - борелевская мера на $\overline{\mathbb{D}}_\delta$. Теперь, полагая, что рассмотренное $\delta \in (0,1)$ - первый член некоторой последовательности $\delta_m \uparrow 1$, для δ_2 как выше выберем подпоследовательность из $\{n_k\}_1^\infty$, из чего - подпоследовательность для δ_3, и т.д. Затем, перейдя к диагональной последовательности $\{n_m\}_1^\infty$ заметим, что $\nu_{n_m} \Rightarrow \nu$ при $m \to \infty$ в Φ_δ с любым $\delta \in (0,1)$, где $\nu \ge 0$ - борелевская мера уже на всем круге $\mathbb{D} = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$. Далее, заметим, что ввиду фундаментальности последовательности чисел $\{\nu(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\}_1^\infty$ при любом $\delta \in (0,1)$, при любом $\delta \in (0,1)$

$$\left|(\nu_n-\nu)(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\right| \le \left|(\nu_n-\nu_{n_m})(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\right| + \left|(\nu_{n_m}-\nu)(\overline{\mathbb{D}}_\delta)\right| < \varepsilon$$

для достаточно большого $m \ge 1$ и любого $n > n_m$. Отсюда следует, что $\nu_n(\overline{\mathbb{D}}_\delta) \to \nu(\overline{\mathbb{D}}_\delta)$ при $n \to \infty$, и очевидно $\nu_n \Rightarrow \nu$ при $n \to \infty$ в Φ_δ с любым $\delta \in (0,1)$. Далее, полагая что $\{r_k\}_0^\infty \subset (0,1)$ - возрастающая последовательность, ввиду (2.8) получим

$$B \ge \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty \sum_{m=1}^\infty \iint_{r_{k-1}<|\zeta_1|\le r_k} \iint_{r_{m-1}<|\zeta_2|\le r_m} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d\nu_n(\zeta_1)d\nu_n(\zeta_2)$$
$$\ge \iint_{r_{k-1}<|\zeta_1|\le r_k} \iint_{r_{m-1}<|\zeta_2|\le r_m} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2) = \rho^2(P,0),$$

где $P(z)$ - потенциал Грина, генерированный мерой ν. Итак $\rho(P,0) < +\infty$. Теперь, введя в рассмотрение следующие функции от $r \in (0,1)$:

$$\varphi_n(r) = \iint_{|\zeta_1|<r} \iint_{|\zeta_2|<r} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2), \quad n \geq 1,$$

заметим, что $\varphi_n(r) \nearrow \rho(P_n,0)$ при любом $n \geq 1$. Положив $\varphi_n(1) = \rho(P_n,0)$ $(n \geq 1)$ получим фундаментальную на всем отрезке $[0,1]$ последовательность функций, непрерывных в точке $r=1$. Предельная функция $\varphi(r) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(r)$ неубывающая и непрерывная в $r=1$, и $\varphi(1) = \rho(P,0)$, поскольку $\rho(P_r,0) \to \rho(P,0)$ при $r \to 1-0$ для потенциалов $P_r(z)$, генерированных мерами $\chi_{\mathbb{D}_r}(\zeta)\nu(\zeta)$, где $\chi_{\mathbb{D}_r}(\zeta)$ - характеристическая функция круга $\mathbb{D}_r$. С другой стороны $\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(1)-\varphi_n(r)] = \varphi(1)-\varphi(r) < \varepsilon$ когда r достаточно близко к 1. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $r_\varepsilon \in (0,1)$ и $N_\varepsilon \geq 1$ такие, что $0 \leq \varphi_n(1)-\varphi_n(r) < \varepsilon$ при $r_\varepsilon < r < 1$ и $n \geq N_\varepsilon$. Теперь заметим, что при любых $r \in (0,1)$ и $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\rho(P,P_n) \leq & \iint_{|\zeta_1|<r} \iint_{|\zeta_2|<r} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d|(\nu-\nu_n)(\zeta_1)|d|(\nu-\nu_n)(\zeta_2)| \\ & + \iint\iint_{(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\setminus(\mathbb{D}_r\times\mathbb{D}_r)} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d\nu(\zeta_1)d\nu(\zeta_2) \\ & + \iint\iint_{(\mathbb{D}\times\mathbb{D})\setminus(\mathbb{D}_r\times\mathbb{D}_r)} \mathcal{K}(|\zeta_1|,|\zeta_2|)d\nu_n(\zeta_1)d\nu_n(\zeta_2) \equiv I_1 + I_2 + I_3,\end{aligned}$$

где $I_2 = \varphi(1)-\varphi(r)$ и $I_3 = \varphi_n(1)-\varphi_n(r)$. Тем самым, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0 \in (0,1)$ такое, что $0 \leq I_{2,3} < \varepsilon$ при $n > N_{\varepsilon,r_0}$, а $0 \leq I_1 < \varepsilon$ при $n > N'_{\varepsilon,r_0}$, поскольку $\nu_n \Rightarrow \nu$ при $n \to \infty$ в Φ_{r_0}. Таким образом $\rho(P,P_n) \to 0$ при $n \to \infty$, и доказательство завершено.

Abstract. The paper is devoted to investigation of the class of Green potentials in the unit disc of the complex plane, which possess bounded square integral means.

Список литературы

[1] М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР, **2**, 3-40 (1948).

[2] A. M. Jerbashian, "Orthogonal Decomposition of Functions Subharmonic in the Unit Disc", in: Operator Theory: Advances and Applications, **190**, The Mark Krein Centenary Conference, 1: Operator Theory and Related Topics, 335-340 (Birkhäuser, 2009).

[3] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала* (Наука, Москва, 1966).

Поступила 25 марта 2013