Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 5, 2013, стр. 63-78.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МАТРИЦАМИ ТИПА ТЕПЛИЦА-ГАНКЕЛЯ

Х. А. ХАЧАТРЯН, М. Ф. БРОЯН

Армянский национальный аграрный университет
E-mail: *Khach82@rambler.ru; Broyan@rambler.ru*

Аннотация. Исследуется класс нелинейных бесконечных алгебраических уравнений с матрицами типа Теплица-Ганкеля. Строится однопараметрическое семейство положительных решений для этой системы. Изучается также асимптотическое поведение построенного решения на бесконечности.

MSC2010 number: 45G10, 45M20.

Ключевые слова: система алгебраических уравнений; однопараметрическое семейство решений; предел решения; бесконечная матрица типа Теплица-Ганкеля.

1. Введение

Рассматривается следующая нелинейная бесконечная система алгебраических уравнений:

$$x_n = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k - \omega_k(x_k)), \quad n = 0, 1, 2 \dots \tag{1.1}$$

относительно искомого бесконечного вектора $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)^T$.
Здесь $A = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ -бесконечная матрица с неотрицательными элементами, удовлетворяющая следующим условиям:

$$a_n > a_{n+1} \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1, \quad a_{-n} = a_n, \tag{1.2}$$

$$\nu_j(A) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^j a_n < +\infty, \quad j = 0, 1, 2. \tag{1.3}$$

$\varepsilon \in [0,1]$–заданный числовой параметр системы.
Последовательность вещественнозначных измеримых функций $\{\omega_n(\tau)\}_{n=0}^{\infty}$ обладает следующими свойствами:

(1.4) 1) $\omega_k \in C[0;+\infty), \quad k = 0,1,2,\ldots$

(1.5) 2) существует $\delta > 0$ такое, что $0 \leq \omega_k(\tau)$ убывает на $[\delta;+\infty), \ k = 0,1,\ldots$

(1.6) 3) существует функция $\overset{\circ}{\omega} \in L_1(0,+\infty) \cap C_0[0;+\infty)$, $\overset{\circ}{\omega}(\tau) \geq 0$, $\tau \in [\delta,+\infty)$, $m_1(\overset{\circ}{\omega}) < +\infty, \overset{\circ}{\omega} \downarrow [\delta;+\infty)$; $\omega_k(\tau) \leq \overset{\circ}{\omega}(k+1+\tau), k = 0,1,\ldots, \ \tau \in [\delta;+\infty)$.

Здесь $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$– заданная монотонно возрастающая последовательность, причем

$$0 < \gamma_n \leq 1, \quad n = 0,1,2,\ldots, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(1-\gamma_n)n^j < +\infty, \quad j = 0,1. \tag{1.7}$$

Система (1.1), кроме самостоятельного математического интереса, имеет важное прикладное значение в теории переноса излучения в спектральных линиях (см. [1]). Кроме того, указанная система имеет применения в эконометрике, а именно в задаче распределения национального дохода в стране (см. [2], [3]).

В том частном случае, когда $\omega_k \equiv 0$ и $\varepsilon = 0$, система (1.1) сравнительно недавно была исследована в [4]. В случае, когда $\gamma_n \equiv 1, \quad \omega_n \equiv 0, \quad \varepsilon = 0$, (1.1) превращается известное в литературе дискретное уравнение Винера-Хопфа, исследованию которого посвящены многочисленные работы (см. например [4] — [7]).

В настоящей работе при условиях (1.2)-(1.7) доказывается существование однопараметрического семейства положительных решений в пространстве ограниченных последовательностей. Строится также предел последовательности $\{x_n\}_0^{\infty}$, когда $n \to \infty$.

Отметим, что часть этих результатов являются дискретными аналогами результатов работы [8].

2. Вспомогательные результаты

Пусть E–одно из следующих банаховых пространств: $m, \quad l_p, \quad p \geq 1$, где m–пространство ограниченных последовательностей $m = \{b = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)^T : \sup\limits_{0 \leq k \leq \infty} |b_k| < +\infty\}$, с нормой $\| b \|_m = \sup\limits_{0 \leq k \leq \infty} |b_k|$, а l_p– пространство бесконечных векторов $l_p = \{b = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)^T : \sum\limits_{k=0}^{\infty} |b_k|^p < +\infty\}$ с нормой $\| b \|_{l_p} =$

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Введем следующий класс Ω бесконечных теплицевых матриц: $A \in \Omega$, если

$$(A)_{nk} = a_{n-k} \quad n,k = 0,1,\ldots, \qquad \| A \|_{\Omega} = \mu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < +\infty.$$

При $\mu \leq 1$ матрица A называется регулярной, а при $\mu < 1$-вполне регулярной. Если $a_{-k} = a_k$, то A симметричная и совпадает со своей транспонированной A^*. Введем также подклассы $\Omega^{\pm} \subset \Omega$:

1) $U_+ \in \Omega^+$, если $U_+ = (\overset{+}{u}_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ и $\overset{+}{u}_n = 0$, при $n < 0$.

2) $U_- \in \Omega^-$, если $U_- = (\overline{u}_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ и $\overline{u}_n = 0$, при $n < 0$.

Как известно, классы $\Omega^{\pm}$ замкнуты относительно умножения и являются банаховыми алгебрами (см. [6]).

В наших дальнейших рассмотрениях основную роль играет следующий факт: если $U_- \in \Omega^-$ и $U_+ \in \Omega^+$, то $U_-U_+ \in \Omega$ и $(U_-U_+)_{nk} = \sum\limits_{j=max(n,k)}^{\infty} \overline{u}_{j-n}\overset{+}{u}_{j-k}$. Как известно (см. [6], [9]), если A- регулярная матрица, то при условиях (1.2),(1.3) имеет место следующая факторизация:

$$I - A = (I - U_-)(I - U_+), \tag{2.1}$$

где I-единичная матрица, $U_+ \in \Omega^+$, $U_- \in \Omega^-$. Факторизация (2.1) эквивалентна следующей нелинейной системе относительно $\{\overline{u}_n, \overset{+}{u}_n\}$:

$$\overset{+}{u}_n = a_n + \sum_{k=0}^{\infty}\overline{u}_k\overset{+}{u}_{n+k}, \quad \overline{u}_n = a_{-n} + \sum_{k=0}^{\infty}\overline{u}_{n+k}\overset{+}{u}_k, \quad n = 1,2,\ldots,$$

$$\overset{+}{u}_0 + \overline{u}_0 = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\overline{u}_k\overset{+}{u}_k \quad \text{и} \quad \sigma_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty}\overset{\pm}{u}_k = 1.$$

Наряду с (1.1) рассмотрим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})S_k, \qquad n = 0,1,2\ldots. \tag{2.2}$$

Систему (2.2) запишем в матричной форме:

$$(I - A_0 + \varepsilon A_1)S = 0,$$

Здесь A_0 и A_1 следующие операторы:

$$A_0 = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}, \quad (A_0S) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}a_{n-k}S_k\right)_{n=0}^{\infty},$$

$$A_1 = (a_{n+k})_{n,k=0}^{\infty}, \quad (A_1 S) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} S_k \right)_{n=0}^{\infty},$$
$$S = (S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots)^T \in E.$$

Так как A_0– регулярная матрица, то оператор $I - A_0$ допускает факторизацию (2.1) (см.[9]). Из (2.1), с учетом факторизационной теоремы 1 работы [10] следует, что оператор $I - A_0 + \varepsilon A_1$ в E допускает следующую факторизацию:

$$I - A_0 + \varepsilon A_1 = (I - U_-)(I + B)(I - U_+),$$

(2.3)
$$B = (b_{n+k})_{n,k=0}^{\infty}, \quad b_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (BS) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k} S_k \right)_{n=0}^{\infty},$$
$$b = (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots)^T \in l_1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k b_k < +\infty,$$

причем B является вполне непрерывным в каждом из пространств E.

С учетом факторизации (2.3), решение системы (2.2) сводится к последовательному решению следующих уравнений:

$$(I - U_-)\overset{\circ}{S} = 0, \tag{2.4}$$

$$(I + B)\overset{1}{S} = \overset{\circ}{S}, \tag{2.5}$$

$$(I - U_+)S = \overset{1}{S}. \tag{2.6}$$

Рассмотрим следующие возможности:

a) $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора B.

Уравнение (2.4) запишем в раскрытом виде:

$$\overset{\circ}{S}_n = \sum_{k=n}^{\infty} \bar{u}_{k-n} \overset{\circ}{S}_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.7}$$

или

$$\overset{\circ}{S}_n = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k \overset{\circ}{S}_{n+k}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Так как $\sigma_- := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \bar{u}_k = 1$, то $\overset{\circ}{S} = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)^T$ будет удовлетворять системе (2.7). Подставляя это значение в (2.5), получим:

$$\overset{1}{S}_n = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k} \overset{1}{S}_k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

Так как $\lambda = -1$ не является собственным значением для вполне непрерывного (в E) оператора B, то система (2.8) имеет ограниченное решение $\overset{1}{S} = (\overset{1}{S}_0, \overset{1}{S}_1, \ldots, \overset{1}{S}_n)^T$, т.е. $\overset{1}{S} \in m$.

Теперь убедимся, что $\lim\limits_{n\to\infty}\overset{1}{S}_n = 1$ и $\overset{0}{S}-\overset{1}{S}\in l_1$. С этой целью систему (2.8) запишем в следующей форме:

$$1-\overset{1}{S}_n=\sum_{k=0}^{\infty} b_{n+k}\overset{1}{S}_k \tag{2.9}$$

Из (2.9) непосредственно следует

$$|1-\overset{1}{S}_n|\le \sup_{j\in N}|\overset{1}{S}_j|\sum_{k=n}^{\infty} b_k\to 0,\quad \text{при } n\to\infty. \tag{2.10}$$

Нетрудно убедиться, что $b^*=\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k, \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k,\dots,\sum\limits_{k=n}^{\infty} b_k,\dots\right)^T\in l_1$, поскольку $b\in l_1$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kb_k<+\infty$. Следовательно, из (2.10), с учетом вышесказанного получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\overset{1}{S}_n=1,\quad \overset{0}{S}-\overset{1}{S}\in l_1. \tag{2.11}$$

Перейдем теперь к решению уравнения (2.6):

$$S_n=\overset{1}{S}_n+\sum_{k=0}^{\infty}\overset{+}{u}_{n-k}\overset{1}{S}_k\quad n=0,1,2,\dots. \tag{2.12}$$

Так как свободный член $\overset{1}{S}_n$ системы (2.12) обладает свойствами (2.11), то из (1.3), с учетом того, что и $\sigma_+=1$, следует, что система (2.12) имеет решение следующей структуры (см. [6] теорема 3):

$$S_n=\frac{1}{m_1}n+q_n,$$

где

$$m_1=\sum_{n=0}^{\infty} n\overset{+}{u}_n<+\infty,\quad q^*=(q_0,q_1,\dots,q_n,\dots)^T,\quad q^*\in m.$$

b) Теперь предположим, что $\lambda=-1$ является собственным значением оператора B. В этом случае из (2.4) выберем нулевое решение $\overset{\circ}{S}=(0,0,\dots,0,\dots)^T$. Подставляем это решение в (2.5), получаем

$$\overset{1}{S}_n=-\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\overset{1}{S}_k,\quad n=0,1,2,\dots$$

Из условия *b*) следует, что система имеет ненулевое, ограниченное решение $\overset{1}{S}=(\overset{1}{S}_0,\overset{1}{S}_1,\dots,\overset{1}{S}_n,\dots)^T$.

$$|\overset{1}{S}_n|\le\sup_n|\overset{1}{S}_n|\sum_{k=n}^{\infty} b_k\Rightarrow \overset{1}{S}_n\to 0,\quad \text{когда}\quad n\to\infty.$$

Более того, если учитывать последнее неравенство и тот факт, что $b^* \in l_1$, получим $\frac{1}{S} \in l_1$. Следовательно, система (2.12) имеет ограниченное решение (см.[6]).

Однако в обоих случаях это решение может быть знакопеременным. Докажем, что система (2.2) обладает также положительным решением $S^* = (S_0^*, S_1^*, \ldots, S_n^*, \ldots)^T$, причем $S_n^* \geq |S_n|$.

Теорема 2.1. *Предположим, что $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора B и выполнены условия (1.2)-(1.3). Тогда, если $\varepsilon = 1$, то система (2.2) имеет ненулевое, неотрицательное, монотонно возрастающее решение $S^* = (S_0^*, S_1^*, \ldots, S_n^*, \ldots)^T$, причем*

$$|S_n| \leq S_n^* \leq \frac{1}{m_1} n + q, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

где $q = \sup\limits_n |q_n|$ и $S_n^* \sim \frac{1}{m_1} n$, когда $n \to \infty$.

Если $\varepsilon \in [0, 1)$ и

$$l_0 \equiv \sup_n \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k}{a_n} < +\infty,$$

то система (2.2) имеет положительное, монотонно возрастающее решение $S^* = (S_0^*, S_1^*, \ldots, S_n^*, \ldots)^T$, $S_n^* \geq |S_n|$, причем

$$S_n^* \sim \frac{1}{m_1} n, \quad n \to \infty,$$

$$\inf_n S_n^* = \alpha_0 > 0, \quad S_n^* \leq \frac{1}{m_1} n + c, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

где

$$c \equiv \max\left(\frac{l_0}{m_1}, \frac{2r_0}{m_1}, q\right), \quad r_0 = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n. \tag{2.13}$$

Доказательство. Сперва подробно обсудим случай $\varepsilon = 1$.

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) S_k, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{gathered} S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - a_{n+k}) S_k^{(p)}, \\ S_n^{(0)} = \frac{1}{m_1} n + q, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{2.14}$$

По индукции докажем, что $S_n^{(p)}$ монотонно убывают по p.

Сперва убедимся, что $S_n^{(1)} \leq S_n^{(0)}$, при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$.

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - a_{n+k})\left(\frac{1}{m_1}k + q\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-k}\left(\frac{1}{m_1}k + q\right) - \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}\left(\frac{1}{m_1}k + q\right)$$

$$= \sum_{\tau=-\infty}^{n} a_\tau\left(\frac{1}{m_1}(n-\tau) + q\right) - \sum_{\tau=n}^{\infty} a_\tau\left(\frac{1}{m_1}(\tau - n) + q\right) \leq \frac{1}{m_1}n + q - 2q\sum_{\tau=n+1}^{\infty} a_\tau$$

$$\leq \frac{1}{m_1}n + q = S_n^{(0)},$$

Так как a_n убывает и $a_{-n} = a_n$. Учитывая, что $a_{n-k} \geq a_{n+k}$, то предполагая $S_n^{(p)} \leq S_n^{(p-1)}$, из (2.14) получим

$$S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - a_{n+k})S_k^{(p)} \leq \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - a_{n+k})S_k^{(p-1)} = S_n^{(p)}.$$

Теперь по индукции докажем,что

$$S_n^{(p)} \geq |S_n|, \quad p = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.15}$$

В случае $p = 0$ неравенство (2.15) очевидно, поскольку

$$|S_n| \leq \frac{1}{m_1}n + q = S_n^{(0)}.$$

Предположим теперь, что (2.15) выполняется при некотором $p \in \mathbb{N}$ и докажем его в случае $p + 1$. Имеем

$$S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - a_{n+k})S_k^{(p)} \geq \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - a_{n+k})|S_k| \geq |S_n|.$$

Из последнего неравенства, с учетом монотонности $S_n^{(p)}$ по p, получим что последовательность $\{S_n^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ имеет предел

$$\lim_{p\to\infty} S_n^{(p)} = \widetilde{S}_n,$$

причем $\widetilde{S}_n$ удовлетворяет системе (2.1). Из (2.14), (2.15) получаем

$$\frac{1}{m_1}n + q \geq \widetilde{S}_n \geq |S(x)|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.16}$$

Следовательно, учитывая (2.16) и (2.12), можем утверждать, что $\widetilde{S}_n \sim \frac{1}{m_1}n$, при $n \to \infty$

Теперь убедимся, что $\widetilde{S}_n$ возрастает по n. С этой целью сначала по индукции докажем, что $S_n^{(p)}$ возрастает по n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Действительно, записывая итерации (2.14) в следующем виде:

$$(2.17)\qquad \begin{aligned} S_n^{(p+1)} &= \sum_{\tau=-\infty}^{n} a_\tau S_{n-\tau}^{(p)} - \sum_{\tau=n}^{\infty} a_\tau S_{\tau-n}^{(p)}, \\ S_n^{(0)} &= \frac{1}{m_1} n + q, \; n = 0,1,2,\ldots, p = 0,1,2,\ldots. \end{aligned}$$

и предполагая, что $S_n^{(p)}$ возрастает по n, из (2.17) получим

$$S_{n+1}^{(p+1)} - S_n^{(p+1)} = \sum_{\tau=-\infty}^{n+1} a_\tau S_{n+1-\tau}^{(p)} - \sum_{\tau=n+1}^{\infty} a_\tau S_{\tau-n-1}^{(p)} - \sum_{\tau=-\infty}^{n} a_\tau S_{n-\tau}^{(p)} + \sum_{\tau=n}^{\infty} a_\tau S_{\tau-n}^{(p)}$$

$$\geq \sum_{\tau=-\infty}^{n} a_\tau (S_{n+1-\tau}^{(p)} - S_{n-\tau}^{(p)}) + \sum_{\tau=n}^{\infty} a_\tau (S_{\tau-n}^{(p)} - S_{\tau-n-1}^{(p)}) \geq 0.$$

Следовательно $S_n^{(p+1)}$ возрастает по n для $p = 0,1,\ldots$. Из последнего следует, что $\widetilde{S}_n$ возрастает по n. □

Перейдем теперь ко второй части доказательства, когда $\varepsilon \in [0,1)$. С этой целью докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 2.1. *Пусть* $l_0 \equiv \sup\limits_n \frac{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}{a_n} < +\infty$. *Тогда, при выполнении условий* (1.2)-(1.3), *для всех* $\varepsilon \in [0,1)$ *справедливо следующее неравенство:*

$$(2.18)\qquad \frac{1-\varepsilon}{m_1 c(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)n} \leq \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k}{\sum\limits_{k=n}^{\infty} k a_k}, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

где число c *задается согласно* (2.13).

Доказательство. Обозначим через φ_n следующую последовательность:

$$(2.19)\qquad \varphi_n = (m_1 c(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)n) \sum_{k=n}^{\infty} a_k - (1-\varepsilon) \sum_{k=n}^{\infty} k a_k, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Докажем, что последовательность φ_n убывает и

$$\varphi_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Сначала заметим,что $\varphi_0 > 0$:

$$\varphi_0 = m_1 c(1+\varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} a_k - (1-\varepsilon) \sum_{k=0}^{\infty} k a_k = \frac{m_1 c(1+\varepsilon)}{2} - (1-\varepsilon) r_0$$

$$\geq \frac{m_1}{2} \cdot \frac{2r_0}{m_1}(1+\varepsilon) - (1-\varepsilon) r_0 = 2 r_0 \varepsilon > 0.$$

Оценим разность:

$$\varphi_n - \varphi_{n+1} = m_1 c(1+\varepsilon)\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right) + (1-\varepsilon)n\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right)$$

$$-(1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \geq m_1 \frac{l_0}{m_1}(1+\varepsilon)a_n + (1-\varepsilon)na_n - (1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$$\geq (1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k - (1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + (1-\varepsilon)na_n = 2\varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + (1-\varepsilon)na_n \geq 0.$$

Из сказанных фактов следует, что $\varphi_n \geq \varphi_{n+1}$.
Поскольку $n\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=n}^{\infty} ka_k \to 0, \quad n \to \infty$, то из (2.19) непосредственно следует, что $\varphi_n \to 0, \quad n \to \infty$. Так как φ_n убывает по n и $\varphi_n \to 0$, $n \to \infty$, то $\varphi_n \geq 0$, т.е. справедливо неравенство (2.18). Лемма доказана. □

Рассмотрим (2.2) и следующие последовательные приближения:

$$S_n^{(p+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})S_k^{(p)},$$

$$S_n^{(0)} = \frac{1}{m_1}n + c, \qquad n, p = 0, 1, 2, \ldots.$$

Используя (2.13) и оценку (2.18), аналогичным образом можно убедиться в достоверности следующих фактов:

$$S_n^{(p)} \text{ убывает по } p, \quad S_n^{(p)} \text{ возрастает по } n, \quad S_n^{(p)} \geq \widetilde{S}_n.$$

Следовательно последовательность $\{S_n^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ имеет предел:

$$\lim_{p\to\infty} S_n^{(p)} = S_n^* \geq \widetilde{S}_n$$

и этот предел удовлетворяет системе (2.2).

Докажем, что $\inf\limits_n S_n^* \equiv \alpha_0 > 0$. Так как $S_n^* \geq \widetilde{S}_n$, $\widetilde{S}_n \geq 0$, $\widetilde{S}_n \not\equiv 0$, то существует хотя бы одно $n_0 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, такая что $S_{n_0}^* > 0$. Зафиксируем это число. Из (2.2), с учетом монотонности S_n^*, получим

$$S_n^* \geq \sum_{k=n_0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})S_k^* \geq S_{n_0}^* \sum_{k=n_0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})$$

$$= S_{n_0}^*\left(\sum_{j=-\infty}^{n-n_0} a_j - \varepsilon \sum_{j=n+n_0}^{\infty} a_j\right) \geq S_{n_0}^*\left(\sum_{j=-\infty}^{-n_0} a_j - \varepsilon \sum_{j=n_0}^{\infty} a_j\right) \geq S_{n_0}^*(1-\varepsilon)\sum_{j=n_0}^{\infty} a_j.$$

Откуда следует, что $\alpha_0 \geq (1-\varepsilon)S_{n_0}^* \sum\limits_{j=n_0}^{\infty} a_j > 0$. Таким образом теорема 2.1 полностью доказана.

Аналогичным образом доказывается следующий результат.

Теорема 2.2. *Предположим, что $\lambda = -1$ является собственным значением оператора B и выполнены условия (1.2)-(1.3). Тогда, если $\varepsilon = 1$, то система (2.2) имеет ненулевое, неотрицательное, возрастающее и ограниченное решение $\widetilde{S} = (\widetilde{S}_0, \widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \ldots, \widetilde{S}_n, \ldots)^T$, причем $|S_n| \le \widetilde{S}_n \le \sup\limits_n |S_n|$. Если же $\varepsilon \in [0,1)$, то система (2.2) имеет положительное, монотонно возрастающее и ограниченное решение $S^* = (S_0^*, S_1^*, S_2^* \ldots, S_n^*, \ldots)^T$, $S_n^* \ge \widetilde{S}_n$, причем:*

$$S_n^* \le \sup_n \widetilde{S}_n, \quad \inf_n S_n^* \equiv \beta_0^* > 0, \quad \lim_{n\to\infty} S_n^* = \sup_n \widetilde{S}_n.$$

Теперь займемся вопросами построения положительного, монотонно возрастающего решения для следующей более общей системы:

$$h_n = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) h_k, \qquad n = 0,1,2\ldots. \tag{2.20}$$

относительно искомого вектора $h = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)^T$.

При условиях (1.2)-(1.3) и (1.7), система (2.20) имеет нетривиальное решение $\widetilde{h} = (\widetilde{h}_0, \widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_n, \ldots)^T$ следующей структуры: $0 \le \widetilde{h} \equiv \widetilde{S}_n - r_n \le \widetilde{S}_n$ (см. [4]), где $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n, \ldots)^T$-ограниченное решение системы:

$$r_n = (1-\gamma_n)\widetilde{S}_n + \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) r_k.$$

С использованием неотрицательного решения $\widetilde{h}$, аналогичным образом как и выше, устанавливаются следующие результаты:

Теорема 2.3. *Пусть $\lambda = -1$ не является собственным значением оператора B и выполнены условия (1.2)-(1.3) и (1.7). Тогда, если $\varepsilon = 1$, то система (2.20) имеет ненулевое, неотрицательное, монотонно возрастающее решение $h = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)^T$, причем $h_n \ge \widetilde{h}_n$ и*

$$h_n \le \frac{1}{m_1} n + q, \ n = 0,1,2,\ldots,$$

$$h_n \sim \frac{1}{m_1} n, \ \text{когда } n \to \infty.$$

Далее, при $\varepsilon \in [0,1)$, $\quad l_0 < +\infty$, система (2.20) имеет положительное, монотонно возрастающее решение $h^* = (h_0^*, h_1^*, \ldots, h_n^*, \ldots)^T$, причем $h_n^* \ge h_n$, и

$$h_n^* \sim \frac{1}{m_1} n, \ \text{когда } n \to \infty,$$

$$\inf_n h_n^* \equiv \beta_0 > 0, \qquad h_n^* \le \frac{1}{m_1} n + c,$$

где число c задается согласно (2.13).

Теорема 2.4. *Предположим, что* $\lambda = -1$ *является собственным значением оператора* B *и выполнены условия* (1.2)-(1.3) *и* (1.7). *Тогда, если* $\varepsilon = 1$, *то система* (2.20) *имеет ненулевое, неотрицательное, монотонно возрастающее и ограниченное решение* $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots)^T$, $h_n \geq \widetilde{h}$.

Если же $\varepsilon \in [0,1)$, *то система* (2.20) *имеет положительное, монотонно возрастающее и ограниченное решение* $h^* = (h_0^*, h_1^*, \ldots, h_n^*, \ldots)^T$, *причем:*

$$h_n^* \leq \sup_n \widetilde{h}_n, \qquad \inf_n h_n^* \equiv \beta_0 > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} h_n^* = \sup_n \widetilde{h}_n.$$

Теперь рассмотрим следующую бесконечную алгебраическую систему:

$$\eta_n = 2\overset{\circ}{\omega}(n+\delta) + \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})\eta_k, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.21}$$

относительно искомого бесконечного вектора $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)^T$.

Здесь $\overset{\circ}{\omega}$ удовлетворяет условиям (1.4)-(1.6). Будем также предполагать, что последовательность $\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty}$ и матрица $A = (a_{n-k})_{n,k=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (1.7) и (1.2)-(1.3), а $l_0 < +\infty$. Тогда система (2.21) имеет неотрицательное и ограниченное решение: $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)^T \in m$, причем $2\omega(n+\delta) \leq \eta_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, (см. [6]).

Введем следующее множество

$$\Pi \equiv \left[\max\left(\frac{\max(\eta^\circ, \delta_0)}{\beta_0}, \delta\right), +\infty\right), \tag{2.22}$$

где $\eta^\circ = \sup_n \eta_n$, $\beta_0 \equiv \inf_n h_n^*$, а $\delta_0 \geq \delta$–некоторое фиксированное число, для которого $\overset{\circ}{\omega}(\delta_0) < \delta_0$. Справедлива

Лемма 2.2. *Пусть* $t \in \Pi$*–некоторое число. Тогда*

$$h_n^t \equiv t h_n^* \geq \eta_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Доказательство. Поскольку $t \in \Pi$, то из (2.22) следует, что

$$t \geq \frac{\max(\eta^\circ, \delta_0)}{\beta_0},$$

следовательно, получаем

$$h_n^t = t h_n^* \geq t\beta_0 \geq \max(\eta^\circ, \delta_0) \geq \eta^\circ \geq \eta_n.$$

□

Введем последовательность следующих функций:

$$\lambda_n^t = 1 - \frac{\overset{\circ}{\omega}(n + h_n^t)}{h_n^t}, n = 0, 1, 2, \ldots, t \in \Pi. \tag{2.23}$$

Лемма 2.3. *Справедливы следующие факты:*

$$a)\quad 0 < \lambda_n^t \le 1,$$
$$b)\quad \sum_{n=0}^{\infty}(1-\lambda_n^t)n^j < +\infty, \quad j = 0,1,$$
$$c)\quad \lambda_n^t \quad \text{возрастает по} \quad n,$$
$$d)\quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n^t = 1.$$

Доказательство. Сперва докажем а).

Пусть $t \in \Pi$, тогда $t \ge \dfrac{\max(\eta^\circ, \delta_0)}{\beta_0}$ и следовательно $h_n^t \ge \delta_0 \ge \delta$. Так как $\mathring{\omega}$ убывает на $[\delta, +\infty)$, то

$$\mathring{\omega}(n + h_n^t) \le \mathring{\omega}(n + \delta_0).$$

Итак

$$\lambda_n^t \ge 1 - \frac{\mathring{\omega}(n+\delta_0)}{h_n^t} \ge 1 - \frac{\mathring{\omega}(n+\delta_0)}{\delta_0} \ge 1 - \frac{\omega(\delta_0)}{\delta_0} > 0, \quad \lambda_n^t \le 1.$$

Итак $0 < \lambda_n^t \le 1$.

$$b)\quad n^j(1-\lambda_n^t) \le \frac{\mathring{\omega}(n+\delta_0)}{\delta} n^j \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^j\,(1-\lambda_n^t) < +\infty, \quad j = 0,1.$$

c) и d) непосредственно следуют из вида (2.23). Лемма доказана. □

Пусть $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots)^T$ удовлетворяет следующей системе:

$$\tau_n = 2\mathring{\omega}(n + h_n^t) + \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})\tau_k. \tag{2.24}$$

Введем следующие итерации:

$$\tau_n^{(p+1)} = 2\mathring{\omega}(n + h_n^t) + \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})\tau_k^{(p)},$$
$$\tau_n^{(0)} = 2\mathring{\omega}(n + h_n^t), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad p = 0,1,2,\ldots.$$

Индукцией по p можно доказать, что

$$\begin{gathered} \tau_n^{(p)} \text{ возрастает по} \\ \tau_n^{(p)} \le \eta_n, \quad p = 0,1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Следовательно последовательность $\{\tau_n^{(p)}\}_0^\infty$ имеет предел:

$$\lim_{p\to\infty} \tau_n^{(p)} = \tau_n$$

и предельный вектор $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots)^T$ удовлетворяет системе (2.24), а из (2.25) следует, что

$$2\mathring{\omega}(n + h_n^t) \le \tau_n \le \eta_n \le h_n^t, \quad n = 0,1,2,\ldots, \; t \in \Pi. \tag{2.26}$$

Рассмотрим теперь соответствующую однородную систему уравнений:

$$q_n = \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) q_k. \tag{2.27}$$

Прямой проверкой можно убедиться, что $\widetilde{q}_n^t = 2h_n^t - \tau_n, \quad n = 0,1,2,\ldots$ удовлетворяет системе (2.27). Введем следующие итерации:

$$\begin{gathered} q_n^{(p+1)} = \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) q_k^{(p)}, \\ q_n^{(0)} = 2h_n^t, \quad p = 0,1,2,\ldots, \quad n = 0,1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Индукцией по p докажем, что

$$q_n^{(p)} \downarrow \text{ по } p. \tag{2.29}$$

В случае $p = 1$ имеем:

$$q_n^{(1)} = \lambda_n^t \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) 2h_n^t = 2\lambda_n^t h_n^t \le 2h_n^t = q_n^{(0)}.$$

Предполагая, что $q_n^{(p)} \le q_n^{(p-1)}$ из (2.28) получаем $q_n^{(p+1)} \le q_n^{(p)}$. Заметим также, что $q_n^{(p)} \le 2\lambda_n^t \cdot h_n^t, \quad p = 1,2,3,\ldots$

Теперь докажем, что

$$q_n^{(p)} \ge \widetilde{q}_n^t, \quad p = 0,1,2,\ldots \tag{2.30}$$

В случае $p = 0$, $q_n^{(0)} = 2h_n^t = \widetilde{q}_n^t + \tau_n \ge \widetilde{q}_n^t$. Предполагая, что $q_n^{(p)} \ge \widetilde{q}_n^t$ при некотором p, из (2.28) получим: $q_n^{(p+1)} \ge \lambda_n^t \gamma_n \sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \widetilde{q}_k^t = \widetilde{q}_n^t$.

Таким образом, из (2.29), (2.30) следует существование предела последовательности $\{q_n^{(p)}\}_0^\infty$:

$$\lim_{p \to \infty} q_n^{(p)} = q_n \le 2\lambda_n^t h_n^t, \tag{2.31}$$

причем $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)^T$ удовлетворяет системе (2.27) и цепочке неравенств

$$h_n^t \le \widetilde{q}_n^t \le q_n \le 2\lambda_n^t h_n^t \le 2h_n^t. \tag{2.32}$$

Неравенство $h_n^t \le \widetilde{q}_n^t$ сразу следует из леммы 2 и (2.26). Прямой проверкой можно убедиться, что если $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)^T$ является решением системы (2.27) и удовлетворяет неравенствам (2.32), то $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots)^T, \quad \psi_n = \dfrac{q_n}{\lambda_n^t}$ будет удовлетворять системе

$$\psi_n = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k}) \lambda_k^t \psi_k,$$

и неравенствам

$$h_n^t \le \widetilde{q}_n^t \le q_n \le \psi_n \le 2h_n^t, \quad t \in \Pi. \tag{2.33}$$

3. Решение основной системы (1.1).

В этом параграфе мы строем однопараметрическое семейство положительных решений для уравнения (1.1).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия (1.2)-(1.6), причем $l_0 < +\infty$, а $\varepsilon \in [0,1)$. Тогда система (1.1)обладает однопараметрическим семейством положительных решений $\{x_n^t\}_{t\in\Pi}$, $x^t = (x_0^t, x_1^t, \ldots, x_n^t, \ldots)^T$ со следующими свойствами:*

$$\text{если } t_1, t_2 \in \Pi \text{ и } t_1 > t_2, \text{ то } x_n^{t_1} - x_n^{t_2} \ge 2(t_1 - t_2)\beta_0,$$

$$\psi_n \le x_n^t \le 2h_n^t, \quad t \in \Pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

причем
a) если $\lambda = -1$ является собственным значением оператора B, то $x^t \in m$, для любого $t \in \Pi$,
b) если же $\lambda = -1$ не является собственным значением B, то $x_n^t \sim \dfrac{2t}{m_1} n$, когда $n \to +\infty$.

Далее, если дополнительно $\omega_k(\tau)$ убывает также по k и $\varepsilon = 0$, то x_n^t возрастает по n для любого $t \in \Pi$.

Доказательство. Введем следующие специальные итерации:

$$x_n^{(p+1)} = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty} (a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p)} - \omega_k(x_k^{(p)})), \quad x_n^{(0)} = 2h_n^t, \tag{3.2}$$

для любых $n, p = 0, 1, 2, \ldots$.

Индукцией по p нетрудно убедиться, что

$$x_n^{(p)} \ge \psi_n, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

$$x_n^{(p)} \ \text{убывает по} \ p, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.4}$$

$$\text{если } t_1, t_2 \in \Pi \text{ то } \quad x_n^{t_1(p)} - x_n^{t_2(p)} \ge 2(h_n^{t_1} - h_n^{t_2}), \tag{3.5}$$

$$x_n^{(p)} \ \text{возрастает по} \ n \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.6}$$

Сначала докажем (3.3). Пусть $p = 0$, тогда неравенство (3.3) сразу следует из (2.33): $x_n^{(0)} = 2h_n^t \ge \psi_n$. Предположим (3.3) справедливо при некотором $p \in \mathbb{N}$.

Тогда с учетом монотонности ω_k на $[\delta, +\infty)$,(2.23) и неравенства $x_n^{(p)} \geq \psi_n$ будем иметь:

$$x_n^{(p+1)} = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p)} - \omega_k(x_k^{(p)})) \geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - \omega_k(\psi_k))$$

$$\geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - \omega_k(h_k^t)) \geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - \mathring{\omega}(k + h_k^t))$$

$$= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - (1 - \lambda_k^t)h_k^t) \geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\psi_k - (1 - \lambda_k^t)\psi_k)$$

$$= \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})\lambda_k^t \psi_k = \psi_n.$$

Докажем свойство (3.4).Так как $x_n^{(p)} \geq \psi_n \geq h_n^t \geq \delta, \quad t \in \Pi$, то

$$x_n^{(1)} = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(0)} - \omega_k(x_k^{(0)})) \leq 2\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})h_k^t = 2h_n^t = x_n^{(0)}.$$

Теперь, предполагая, что $x_n^{(p)} \leq x_n^{(p-1)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, убедимся, что тогда $x_n^{(p+1)} \leq x_n^{(p)}$. Из монотонности ω_k на $[\delta, +\infty)$ и с учетом неравенства $x_n^{(p)} \geq \delta$, в (3.2) будем иметь:

$$x_n^{(p+1)} = \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p)} - \omega_k(x_k^{(p)}))$$

$$\geq \gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(x_k^{(p-1)} - \omega_k(x_k^{(p-1)})) = x_n^{(p)}.$$

Займемся теперь доказательством неравенства (3.5). В случае $p = 0$ неравенство (3.5) превращается в равенство. Предположим, что оно выполняется при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда из (3.2) будем иметь:

$$x_n^{t_1(p+1)} - x_n^{t_2(p+1)} \geq 2\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(h_k^{t_1} - h_k^{t_2})$$

$$+\gamma_n \sum_{k=0}^{\infty}(a_{n-k} - \varepsilon a_{n+k})(\omega_k(x_k^{t_2(p)}) - \omega_k(x_k^{t_1(p)})) \geq 2(h_n^{t_1} - h_n^{t_2}).$$

Таким образом, последовательность $\{x_n^{(p)}\}_0^{\infty}$ имеет предел $\lim\limits_{p\to\infty} x_n^{(p)} = x_n^t \geq \psi_n, \quad x^t = (x_0^t, x_1^t, \ldots, x_n^t, \ldots)^T$ этот предел удовлетворяет системе (1.1). Из (3.5), (3.6) получаем

$$x_n^{t_1} - x_n^{t_2} \geq 2(h_n^{t_1} - h_n^{t_2}) \geq 2(t_1 - t_2)\beta_0.$$

В случае a) из неравенства $x_n^t \leq 2h_n^t$ следует, что $x^t \in m$.

В случае b) из (3.1), с учетом (2.33), приходим к асимптотическому равенству:

$$x_n^t \sim \frac{2t}{m_1} n, \quad n \to \infty.$$

Для завершения доказательства теоремы нам остается убедиться, что если $\omega_k(\tau)$ убывает также по k, то x_n^t возрастает по n для $t \in \Pi$. Пусть $x_{n+1}^{(p)} \geq x_n^{(p)}$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. Рассмотрим следующую разность:

$$x_{n+1}^{(p+1)} - x_n^{(p+1)} = \gamma_n \left(\sum_{\tau=-\infty}^{n} a_\tau (x_{n+1-\tau}^{(p)} - x_{n-\tau}^{(p)}) \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau=-\infty}^{n+1} a_\tau (\omega_{n-\tau}(x_{n-\tau}^{(p)}) - \omega_{n+1-\tau}(x_{n+1-\tau}^{(p)})) \right) \geq 0.$$

Следовательно, $x_{n+1}^{(p+1)} \geq x_n^{(p+1)}, n = 0, 1, 2, \ldots$. Теорема доказана. □

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract. The paper studies a class of non-linear infinite algebraic systems with matrix of Toeplitz-Hankel type. An one-parameter family of positive solutions for such systems is constructed, and the asymptotic behavior at infinity of the solution is investigated.

Список литературы

[1] Н. Б. Енгибарян, "Об одной задаче нелинейного переноса излучения", Астрофизика, **2**, no. 4, 31 – 36 (1966).

[2] J. D. Sargan, "The distribution of wealth", Econometrics, **25**, no. 4, 568 – 590 (1957).

[3] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнвния в задаче распределения дохода", ЖВМ и МФ, **50**, no. 10, 1793 – 1802 (2010).

[4] Л. Г. Арабаджян, "Об одной бесконечной алгебраической системе в нерегулярном случае", Матем. заметки, **89**, no. 1, 3 – 11 (2011).

[5] З. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений, Москва, Изд. Мир (1979).

[6] Л. Г. Арабаджян, "О дискретных уравнениях Винера-Хопфа в консервативном случае", Матем. Анализ и его приложения, Тематический сб. научных трудов, 26 – 36 (1980).

[7] E. Basor and T. Ehrhard, "On a class of Toeplitz and Hankel Operators", New York Journal of Mathematics, **5**, 1 – 16 (1999).

[8] Х. А. Хачатрян, "Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью", Известия РАН, Сер. Матем, **76**, no. 1, 173 – 200 (2012).

[9] Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "Линейные алгебраические системы с теплицевыми матрицами", ЖВМ и МФ, **17**, no. 5, 1102 – 1116 (1977).

[10] Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", Дифф. урав., **26**, no. 1, 1442 – 1452 (1990).

Поступила 24 октября 2012