Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 5, 2013, стр. 49-62.

АЛГЕБРЫ СО СВЕРХТОЖДЕСТВАМИ МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ДЕ МОРГАНА

Ю. М. МОВСИСЯН, В. А. АСЛАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *yurimovsisyan@yahoo.com; vahagn.aslanyan@gmail.com*

Аннотация. В статье характеризуется класс алгебр, в которых выполняются сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. Для таких алгебр с двумя бинарными операциями доказывается структурная теорема. В качестве следствия получаем конечный базис сверхтождеств для многообразия алгебр Де Моргана, состоящий из сверхтождеств, функциональные и предметные ранги которых не больше 3.

MSC2010 number: 06D30, 08A05, 03C05, 03C85.

Ключевые слова: сверхтождество; алгебра Де Моргана; Де Морганова сумма алгебр; базис сверхтождеств; квазирешетка Де Моргана.

1. Введение

В работе [1] характеризуются алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр. В настоящей работе методом [1] решается более общая задача. А именно, характеризуются алгебры со сверхтождествами многообразия алгебр Де Моргана. Алгебра $Q(+,\cdot,')$ с двумя бинарными и одной унарной операциями называется алгеброй Де Моргана, если $Q(+,\cdot)$ - дистрибутивная решетка, а $Q(+,\cdot,')$ удовлетворяет следующим тождествам:

$$(x+y)' = x'\cdot y',$$

$$x'' = x,$$

где $x'' = (x')'$ [2, 3]. Сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана характеризуются в работе [4].

Напомним, что сверхтождество [5, 6] – формула второго порядка вида:

$$\forall X_1,\ldots,X_m \forall x_1,\ldots,x_n \quad (\omega_1 = \omega_2), \tag{*}$$

где ω_1, ω_2 – слова (термы) в алфавите функциональных переменных $X_1,\ldots,X_m$ и предметных переменных $x_1,\ldots,x_n$. Однако сверхтождество обычно пишется без кванторной приставки: $\omega_1 = \omega_2$. Будем говорить, что сверхтождество $\omega_1 = \omega_2$ выполняется в алгебре $(Q;\Sigma)$, если это равенство справедливо когда каждая функциональная переменная X_i заменяется любой операцией той же арности из Σ (предполагается возможность такой замены), а каждая предметная переменная x_j заменяется любым элементом из Q.

Многообразие V удовлетворяет данному сверхтождеству, если каждая алгебра многообразия V удовлетворяет этому сверхтождеству. В этом случае данное сверхтождество называется сверхтождеством многообразия V.

В дальнейшем мы будем использовать следующую характеризацию сверхтождеств многообразия дистрибутивных решеток ([1, 7]).

Теорема 1.1. *Многообразие дистрибутивных решеток удовлетворяет следующим сверхтождествам:*

$$X(x,x) = x, \tag{1.1}$$

$$X(x,y) = X(y,x), \tag{1.2}$$

$$X(x, X(y,z)) = X(X(x,y),z), \tag{1.3}$$

$$X(x, Y(y,z)) = Y(X(x,y), X(x,z)). \tag{1.4}$$

И наоборот, любое сверхтождество многообразия дистрибутивных решеток является следствием сверхтождеств (1.1), (1.2), (1.3), (1.4).

Если $\mathfrak{A} = (Q;\Sigma)$ – алгебра и $|A|$ – арность операции $A \in \Sigma$, то множество

$$T_{\mathfrak{A}} = \{|A| \mid A \in \Sigma\}$$

называется арифметическим типом алгебры $\mathfrak{A}$. T-алгеброй называется алгебра с арифметическим типом T. О категории T-алгебр см. [1, 5, 6, 7], в которой морфизмы между двумя T-алгебрами определяются как пары $(\varphi, \tilde{\psi}) : (Q;\Sigma) \Rightarrow (Q';\Sigma')$ отображений $\varphi : Q \to Q'$ и $\tilde{\psi} : \Sigma \to \Sigma'$, где отображение $\tilde{\psi}$ сохраняет арность операций и для всех $A \in \Sigma$, $|A| = n$, $a_1, \ldots, a_n \in Q$ справедливо равенство:

$$\varphi A(a_1, \ldots, a_n) = (\tilde{\psi} A)(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n).$$

Эта категория обычно обозначается через $\widetilde{Alg_T}$. Тождественные соотношения этой категории являются сверхтождествами. Произведение в этой категории называется суперпроизведением алгебр и обозначается через $\mathfrak{A}_1 \bowtie \mathfrak{A}_2$ для двух алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$.

Определение 1.1. *T-алгебра $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma)$, где $T = \{1, 2\}$, называется квазирешеткой Де Моргана (или Де Моргановой квазирешеткой), если она удовлетворяет всем сверхтождествам многообразия алгебр Де Моргана.*

Заметим, что существует квазирешетка Де Моргана, не являющаяся алгеброй Де Моргана. Действительно, для алгебры Де Моргана $\mathfrak{A} = (Q; \{+, \cdot, '\})$ рассмотрим суперпроизведение $\mathfrak{L} = \mathfrak{A} \rtimes \mathfrak{A} = (Q \times Q; \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\})$, где $A_1 = (+, +)$, $A_2 = (+, \cdot)$, $A_3 = (\cdot, \cdot)$, $A_4 = (\cdot, +)$, $A_5 = (', ')$. Тогда в этой алгебре выполняются все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. Это верно и для подалгебры $(Q \times Q; \{A_1, A_4, A_5\})$. Но в этой алгебре не верны тождества поглощения, следовательно, она не является алгеброй Де Моргана.

2. О подпрямо неразложимых квазирешетках Де Моргана

Сначала заметим, что из сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана

$$X(x) = Y(x) (= \overline{x}) \tag{2.1}$$

следует, что унарная операция в квазирешетке Де Моргана единственна. Обозначим ее через $^-$, а слово $\overline{F(x, y)}$ обозначим через $\overline{F}(x, y)$.

Предложение 2.1. *Если квазирешетка Де Моргана $\mathfrak{A} = (Q; \Sigma)$ подпрямо неразложима, то количество бинарных операций в множестве Σ не больше 2.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству лемм 3.1, 4.1 из работы [1], с использованием следующих сверхтождеств из работы [1]: (3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12) и (3.10). □

Теперь из теоремы Биркгофа о подпрямых произведениях для категории T-алгебр вытекает следующее следствие.

Следствие 2.1. *В категории T-алгебр, где $T = \{1, 2\}$, любая квазирешетка Де Моргана изоморфна подпрямому произведению квазирешеток Де Моргана с не более чем двумя бинарными операциями.*

Итак, требуется описать квазирешетки Де Моргана с одной или двумя бинарными операциями.

3. Квазирешетки Де Моргана с одной бинарной операцией

В настоящем параграфе мы характеризуем квазирешетки Де Моргана с одной бинарной операцией. Пусть $\mathfrak{A} = Q(+,^{-})$ является такой алгеброй. Тогда в ней справедливы следующие сверхтождества: (1.1)–(1.3), (2.1)

$$F(x,y) = G(x,y), \tag{3.1}$$

$$X(X(x)) = x, \tag{3.2}$$

$$\overline{F}(\overline{F}(x,y),\overline{x}) = x, \tag{3.3}$$

$$\overline{F}(\overline{F}(x,y),z) = F(\overline{F}(\overline{x},z),\overline{F}(\overline{x},z)). \tag{3.4}$$

Следовательно, в ней справедливы и следующие тождества:

$$\left\{\begin{array}{l} x+x=x,\ x+y=y+x,\ x+(y+z)=(x+y)+z,\ \overline{\overline{x}}=x, \\ \overline{\overline{x+y}+\overline{x}}=x,\ \overline{\overline{x+y}+z}=\overline{\overline{x}+z}+\overline{\overline{y}+z}. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Обратно, пусть алгебра $\mathfrak{A} = Q(+,^{-})$ с одной унарной и одной бинарной операциями удовлетворяет этим тождествам. Определим бинарную операцию $\cdot$ в этой алгебре: $x \cdot y = \overline{\overline{x}+\overline{y}}$. Легко доказать, что алгебра $\mathfrak{A}' = Q(+,\cdot,^{-})$ является алгеброй Де Моргана, и следовательно удовлетворяет всем сверхтождествам алгебр Де Моргана. Но тогда ее редукт $\mathfrak{A} = Q(+,^{-})$ также удовлетворяет этим сверхтождествам. Итак, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Алгебра $\mathfrak{A} = Q(+,^{-})$ с одной унарной и одной бинарной операциями, является квазирешеткой Де Моргана тогда и только тогда, когда она удовлетворяет тождествам* (3.5).

4. Квазирешетки Де Моргана с двумя бинарными операциями

В этом параграфе мы характеризуем произвольные квазирешетки Де Моргана с двумя бинарными операциями. Для этого введем следующее понятие Де Моргановой суммы.

Определение 4.1. *Пусть $\mathfrak{A} = (Q;\Omega \cup \{F\})$ – произвольная алгебра с одной унарной операцией F. Пусть $(Q_i;\Omega)$, $i \in I$ – подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$, и $\mathfrak{A}_i = (Q_i;\Omega \cup \{F_i\})$ – алгебры с одной унарной операцией F_i. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется Де Моргановой суммой алгебр $\mathfrak{A}_i$, если выполняются следующие условия:*

1) $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, *для всех* $i,j \in I, i \neq j$;

2) $Q = \bigcup_{i\in I} Q_i$;

3) *На множестве I можно определить бинарные операции $+, \cdot$ и унарную операцию $^-$ так, что $I(+, \cdot, ^-)$ есть алгебра Де Моргана;*

4) *Если $i, j \in I$ и $i \leq j$ (здесь через " $\leq$ " обозначен частичный порядок решетки $I(+, \cdot)$), то существует изоморфизм $(\varphi_{i,j}, \bar{\varepsilon}) : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_j$, где $\bar{\varepsilon}(F_i) = F_j$, $\bar{\varepsilon}(A) = A$ для любого $A \in \Omega$, причем $\varphi_{i,i}$ есть тождественное отображение множества Q_i, и для любых $i \leq j \leq k$ имеем $\varphi_{i,j} \cdot \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$;*

5) *Для любого $i \in I$ существует изоморфизм*

$$(h_{i,\bar{i}}, \bar{\varepsilon}) : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{A}_{\bar{i}},$$

причем $h_{i,\bar{i}}^{-1} = h_{\bar{i},i}$ и $h_{i,\bar{i}} \cdot \varphi_{\bar{i},k} = \varphi_{i,k}$ для любого $k \geq i + \bar{i}$, $k \in I$;

6) *Для любой n-арной операции $A \in \Omega$ $(n \geq 2)$ и для любых $x_1, \ldots, x_n \in Q$ имеем:*

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(\varphi_{i_1,i_0}(x_1), \ldots, \varphi_{i_n,i_0}(x_n)),$$

где $x_j \in Q_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = \overline{1,n}$, $i_0 = i_1 + \ldots + i_n$;

7) *Для любого $x \in Q$ имеем:*

$$F(x) = h_{i,\bar{i}}(F_i(x)),$$

где $x \in Q_i$.

Замечание 4.1. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ является Де Моргановой суммой алгебр $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$. Тогда для любых $i, j \in I$ имеем $i + j \in I$, $i \leq i + j$, $j \leq i + j$ и следовательно алгебры $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ изоморфны алгебре $\mathfrak{A}_{i+j}$. Поэтому алгебры $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{A}_j$ изоморфны для всех $i, j \in I$.*

Заметим, что в определении Де Моргановой суммы замена Де Моргановых алгебр на булевы алгебры приводит к определению булевой суммы [1].

Докажем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Пусть $\omega = \omega(x_1, \ldots, x_n)$ - Де Морганово слово, т.е. слово с бинарными и одной унарной функциональными переменными. Если алгебра $\mathfrak{A} = Q(+, \cdot, ^-)$ является Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана $Q_i(+, \cdot, ')$, $i \in I$, то при значениях $x_j = a_j \in Q_{i_j}$, $j = \overline{1,n}$ имеем $\omega(a_1, \ldots, a_n) \in Q_k$, где $k = \omega(i_1, \ldots, i_n)$ - значение слова ω в алгебре Де Моргана $I(+, \cdot, ^-)$ при $x_j = i_j \in I$. Причем существует такое $t_0 \in I$, $t_0 \geq i_1 + \ldots + i_n + k$, что для любого $t \in I$, $t \geq t_0$ верно следующее равенство:*

$$\omega(\varphi_{i_1,t}(a_1), \ldots, \varphi_{i_n,t}(a_n)) = \varphi_{k,t}(\omega(a_1, \ldots, a_n)).$$

Доказательство. Эта лемма есть уточнение леммы 4.2 из [1] о булевых словах на случай Де Моргановых алгебр. Ее доказательство как и в [1], проводится индукцией. Например, пусть $\omega = \omega_1 + \omega_2$ и лемма верна для слов ω_1 и ω_2 при всех $t \geq t_1$ и $t \geq t_2$ соответственно. Чтобы доказать утверждение для ω, достаточно в доказательстве леммы 4.2[1] для этого случая везде единицу булевой алгебры заменить на $t \geq t_0 = t_1 + t_2$. Пусть теперь $\omega = \overline{\pi}$ и утверждение леммы для слова π верно при всех $t \geq t_1$. Чтобы доказать утверждение для рассматриваемого случая, достаточно в доказательстве леммы 4.2[1] для этого случая везде единицу булевой алгебры заменить на $t \geq t_0 = t_1 + k$. □

Следующей теоремой характеризуются квазирешетки Де Моргана с двумя бинарными операциями.

Теорема 4.1. *Алгебра $\mathfrak{A} = (Q; \{+, \cdot, ^-\})$ с двумя бинарными операциями $+, \cdot$ и одной унарной операцией $^-$ является квазирешеткой Де Моргана тогда и только тогда, когда она является алгеброй Де Моргана или Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана.*

Доказательство. Доказательство достаточности аналогично доказательству достаточности теоремы 4.2 из [1]. Только здесь надо ссылаться на лемму 4.1 и заменить 1 (единица булевой алгебры) на $t \geq t_0$.

Необходимость. Требуется доказать, что любая квазирешетка Де Моргана $\mathfrak{A} = (Q; \{+, \cdot, ^-\})$ является Де Моргановой суммой алгебр Де Моргана. В доказательстве мы используем некоторые сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана, которые, по определению, справедливы и в алгебре $\mathfrak{A}$.

Сначала заметим, что операции $+$ и $\cdot$ удовлетворяют тождествам идемпотентности, ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности.

Теперь определим следующее отношение $\sim$ на множестве Q:

$$x \sim y \Leftrightarrow x + (xy) = x, \ y + (yx) = y.$$

Из доказательства леммы 3.1 [1] следует, что $\sim$ является отношением эквивалентности. Следовательно множество Q разбивается на непересекающиеся множества Q_i, $i \in I$, т.е. имеем фактор-множество $Q/\sim = \{Q_i : i \in I\}$. Тогда $Q = \bigcup_{i \in I} Q_i$.

Теперь докажем следующие свойства отношения $\sim$:

$$\underline{1}.\ x \sim y,\ z \sim t \Rightarrow x+z \sim y+t;$$

$$\underline{2}.\ xy \sim x+y;$$

$$\underline{3}.\ x \sim y \Rightarrow \overline{x} \sim \overline{y},$$

где $x, y, z, t \in Q$.

Из $x \sim y,\ z \sim t$ вытекает, что $x+(xy)=x,\ y+(yx)=y,\ z+(zt)=z,\ t+(tz)=t$.

Далее, воспользуемся следующим сверхтождеством:

$$(4.1) \qquad F(F(x,z), G(F(x,z), F(y,t))) = F(F(x, G(x,y)), F(z, G(z,t))).$$

Имеем $(x+z)+(x+z)(y+t) = (x+(xy))+(z+(zt)) = x+z$ и

$$(y+t)+(y+t)(x+z) = (y+(yx))+(t+(tz)) = y+t,$$

откуда получаем $x+z \sim y+t$. Теперь из сверхтождеств

$$(4.2) \qquad F(F(x,y), G(F(x,y), G(x,y))) = F(x,y)$$

и

$$(4.3) \qquad G(F(x,y), F(F(x,y), G(x,y))) = F(x,y)$$

получаем тождества:

$$(x+y)+(x+y)(xy) = x+y$$

и $(xy)+(xy)(x+y) = xy$. А это значит, что $x+y \sim xy$.

Докажем третий пункт. Воспользуясь сверхтождеством

$$(4.4) \qquad F(\overline{F}(x, G(x,y)), G(\overline{F}(x, G(x,y)), \overline{F}(y, G(y,x)))) = \overline{F}(x, G(x,y)),$$

получаем $\overline{x+(xy)} + \overline{x+(xy)} \cdot \overline{y+(yx)} = \overline{x+(xy)}$. Теперь если $x \sim y$, то $\overline{x}+(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \overline{x}$. Аналогично получим, что $\overline{y}+(\overline{y} \cdot \overline{x}) = \overline{y}$, т.е. $\overline{x} \sim \overline{y}$.

Легко проверить, что множества $Q_i,\ i \in I$ замкнуты относительно операций $+$ и $\cdot$. Действительно

$$u, v \in Q_i \Rightarrow u \sim v \overset{1}{\Rightarrow} u = u+u \sim u+v \overset{2}{\Rightarrow} uv \sim u+v \sim u \Rightarrow uv, u+v \in Q_i.$$

Определим новую унарную операцию $'$ на множестве Q следующим образом:

$$x' = x \cdot \overline{x+\overline{x}} + \overline{x \cdot (x+\overline{x})}.$$

Сначала заметим, что $(x+y)' = x' \cdot y'$ для любых $x, y \in Q$. Воспользуемся сверхтождеством:

$$F(G(F(x,y),\overline{F}(F(x,y),\overline{F}(x,y))),\overline{G}(F(x,y),F(F(x,y),\overline{F}(x,y))))) = \tag{4.5}$$

$$G(F(G(x,\overline{F}(x,\overline{x})),\overline{G}(x,F(x,\overline{x}))),F(G(y,\overline{F}(y,\overline{y})),\overline{G}(y,F(y,\overline{y})))).$$

Полагая здесь $F = +$, $G = \cdot$ получаем требуемое тождество.

Из сверхтождества

$$F(G(u,\overline{F}(u,\overline{u})),\overline{G}(u,F(u,\overline{u}))) = x, \tag{4.6}$$

где обозначено $u = F(G(x,\overline{F}(x,\overline{x})),\overline{G}(x,F(x,\overline{x})))$, легко получаем, что $(x')' = x$.

В следующем шаге воспользуемся следующими сверхтождествами:

$$F(x,G(x,F(G(x,\overline{F}(x,\overline{x})),\overline{G}(x,F(x,\overline{x}))))) = x, \tag{4.7}$$

$$F(u,G(u,x)) = u, \tag{4.8}$$

где обозначено $u = F(G(x,\overline{F}(x,\overline{x})),\overline{G}(x,F(x,\overline{x})))$. Полагая $F = +$, $G = \cdot$ в этих сверхтождествах, получаем $x + (xx') = x$ и $x' + (x'x) = x'$. А это значит, что $x \sim x'$, т.е. множества Q_i замкнуты относительно этой унарной операции. Из свойств операции $'$, доказанных выше, следует, что алгберы $Q_i(+,\cdot,')$, $i \in I$ – суть алгебры Де Моргана. Докажем, что $\mathfrak{A}$ является Де Моргановой суммой этих алгебр.

Из свойств $1-3$ отношения $\sim$ вытекает, что на фактор-множестве $Q/\sim$ можем определить операции $+$ и $^-$ следующим образом: если $x \in Q_i$, $y \in Q_j$, $i,j \in I$, то определим $Q_i + Q_j = Q_k \Leftrightarrow x + y \in Q_k$ и $\overline{Q_i} = Q_j \Leftrightarrow \overline{x} \in Q_j$.

Еще определим операцию $\cdot$ с помощью этих двух операций: $Q_i \cdot Q_j = \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_j}}$.

Докажем, что полученная таким образом алгебра $(Q/\sim; \{+,\cdot,^-\})$ является Де Моргановой алгеброй, т.е. проверим аксиомы алгебр Де Моргана.

Идемпотентность, ассоциативность и коммутативность очевидны. Докажем тождество дистрибутивности. Пусть $Q_i, Q_j, Q_k \in Q/\sim$ и пусть $Q_i(Q_j + Q_k) = Q_t$ и $(Q_iQ_j) + (Q_iQ_k) = Q_l$. Тогда $Q_t = \overline{\overline{Q_i} + \overline{\overline{Q_j} + \overline{Q_k}}}$ и $Q_l = \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_j}} + \overline{\overline{Q_i} + \overline{Q_k}}$.

Если $a \in Q_i$, $b \in Q_j$, $c \in Q_k$, то $\overline{\overline{a} + \overline{\overline{b} + \overline{c}}} \in Q_t$ и $\overline{\overline{a} + \overline{b}} + \overline{\overline{a} + \overline{c}} \in Q_l$.

Из сверхтождества

$$\overline{F}(\overline{x},\overline{F}(y,z)) = F(\overline{F}(\overline{x},\overline{y}),\overline{F}(\overline{x},\overline{z})) \tag{4.9}$$

следует, что $\overline{\overline{a}+\overline{b+c}}=\overline{\overline{a}+\overline{b}}+\overline{\overline{a}+\overline{c}}$. А это значит, что $Q_t \cap Q_l \neq \varnothing$, т.е. $Q_t = Q_l$. Аналогично из сверхтождества

$$\overline{F}(\overline{x},\overline{F}(x,y)) = x \tag{4.10}$$

следуют тождества поглощения.

Тождество $\overline{\overline{Q_i}} = Q_i$ вытекает из тождества $\overline{\overline{x}} = x,\ x \in Q$.

Далее, $\overline{Q_i \cdot Q_j} = \overline{\overline{\overline{Q_i}+\overline{Q_j}}} = \overline{Q_i}+\overline{Q_j}$.

Теперь определим операции $+,\cdot,^-$ на множестве I следующим образом:

$$\begin{aligned}
&i+j=k \Leftrightarrow Q_i+Q_j=Q_k,\\
&i\cdot j=k \Leftrightarrow Q_i\cdot Q_j=Q_k,\\
&\overline{i}=k \Leftrightarrow \overline{Q_i}=Q_k.
\end{aligned}$$

Относительно этих операций алгебра $I(+,\cdot,^-)$ превращается в алгебру Де Моргана, причем $Q_i+Q_j=Q_{i+j},\ Q_i\cdot Q_j=Q_{ij},\ \overline{Q_i}=Q_{\overline{i}}$.

Ясно, что если $a \in Q_i,\ b \in Q_j$, то $a+b \in Q_i+Q_j=Q_{i+j}$. Кроме того, $ab \sim a+b$, т.е. ab также принадлежит множеству Q_{i+j}.

Теперь определим отображение $\varphi_{i,j}: Q_i \to Q_j$ для $i,j \in I,\ i \leq j$ (здесь " $\leq$ " – частичный порядок решетки $I(+,\cdot)$). Для всякого $x \in Q_i$ определим $\varphi_{i,j}(x) = x+(xu)$, где u произвольный элемент множества Q_j. Убедимся в корректности этого определения, т.е. докажем, что $x+(xu)$ не зависит от выбора u и всегда принадлежит множеству Q_j. Пусть $u,v \in Q_j$. Тогда $u \sim v$, следовательно, $u+(uv)=u,\ v+(vu)=v$. Из сверхтождества

$$F(x,G(x,F(y,G(y,z)))) = F(x,G(x,F(x,G(z,y)))) \tag{4.11}$$

для всех $x \in Q_i$ получаем $x+(xu)=x+x(u+(uv))=x+x(v+(vu))=x+(xv)$. Имеем $i \leq j$, поэтому $i+j=j$ и если $x \in Q_i,\ u \in Q_j$, то $xu \in Q_{i+j}=Q_j$ и $x+(xu) \in Q_{i+j}=Q_j$.

Если $i=j$, то $x \sim u$ и поэтому $x+(xu)=x$, т.е. $\varphi_{i,i}=\varepsilon$ для любого $i \in I$.

Заметим, что $\varphi_{i,j}$ – гомоморфизм. Действительно, пусть $u \in Q_j$, $x, y \in Q_i$. Тогда

$$\varphi_{i,j}(x+y) = (x+y)+(x+y)u = (x+xu)+(y+yu) = \varphi_{i,j}(x)+\varphi_{i,j}(y),$$
$$\varphi_{i,j}(xy) = xy + xyu = (x+xu)(y+yu) = \varphi_{i,j}(x)\cdot\varphi_{i,j}(y),$$
$$(\varphi_{i,j}(x))' = (x+xu)' = x'\cdot(xu)' = x'(x'+y') = x'+x'u' = \varphi_{i,j}(x'),$$

поскольку $u' \in Q_j$.

Теперь, если $i, j, k \in I$, $i \le j \le k$ и $u \in Q_j$, $v \in Q_k$, то $u+v+uv \in Q_{j+k+(j+k)} = Q_k$. Следовательно,

$$(\varphi_{i,j}\cdot\varphi_{j,k})(x) = \varphi_{j,k}(\varphi_{i,j}(x)) = \varphi_{j,k}(x+xu) = (x+xu)+(x+xu)v =$$

$$x+xu+xv+xuv = x+x(u+v+uv) = \varphi_{i,k}(x).$$

Из сверхтождества

$$\overline{F}(\overline{F}(x, G(x,z)), \overline{F}(x,y)) = F(x, G(x, \overline{F}(\overline{y}, \overline{z}))) \tag{4.12}$$

следует инъективность $\varphi_{i,j}$, $(i \le j)$. Если $\varphi_{i,j}(a) = \varphi_{i,j}(b)$, $a, b \in Q_i$, то $a + au = b + bu$, $u \in Q_j$. Тогда

$$\overline{\overline{a+au}+\overline{a+b}} \overset{(4.12)}{=} a + a\cdot\overline{\overline{b}+\overline{u}}.$$

Имеем $\overline{b} \in Q_{\overline{i}}$, $\overline{u} \in Q_{\overline{j}}$, следовательно $\overline{\overline{b}+\overline{u}} \in Q_{\overline{\overline{i}+\overline{j}}} = Q_{ij} = Q_i$. А это значит, что $\overline{\overline{b}+\overline{u}} \sim a$, т.е. $a + a\cdot\overline{\overline{b}+\overline{u}} = a$. Поэтому $\overline{\overline{a+au}+\overline{a+b}} = a$. Аналогично $\overline{\overline{b+bu}+\overline{b+a}} = b$. И окончательно

$$a = \overline{\overline{a+au}+\overline{a+b}} = \overline{\overline{b+bu}+\overline{b+a}} = b,$$

поскольку $a + au = b + bu$, как было сказано выше.

Сюръективность отображения $\varphi_{i,j}$ следует из сверхтождества

$$F(\overline{G}(\overline{x}, F(\overline{x},\overline{y})), G(\overline{G}(\overline{x}, F(\overline{x},\overline{y})), x)) = x. \tag{4.13}$$

Если $b \in Q_j$, то для произвольного $a \in Q_i$ имеем:

$$\overline{\overline{b}(\overline{b}+\overline{a})} \in Q_{\overline{\overline{j}+\overline{j}+\overline{i}}} = Q_{ij} = Q_i,$$

так как $i \le j$. Отсюда

$$\varphi_{i,j}(\overline{\overline{b}(\overline{b}+\overline{a})}) = \overline{\overline{b}(\overline{b}+\overline{a})} + \overline{\overline{b}(\overline{b}+\overline{a})}\cdot b \overset{(4.13)}{=} b.$$

Теперь определим отображение $h_{i,\bar{i}}: Q_i \to Q_{\bar{i}}$ следующим образом:

$$h_{i,\bar{i}}(x) = (\overline{x})', \ x \in Q_i.$$

Из сверхтождества

$$F(G(\overline{x}, \overline{F}(\overline{x}, x)), \overline{G}(\overline{x}, F(\overline{x}, x))) = \overline{F}(G(x, \overline{F}(x, \overline{x})), \overline{G}(x, F(x, \overline{x}))) \tag{4.14}$$

получаем тождество $(\overline{x})' = \overline{x'}$.

На следующем шаге воспользуемся сверхтождеством

$$\overline{F}(G(t, \overline{F}(t, \overline{t})), \overline{G}(t, F(t, \overline{t}))) = \tag{4.15}$$

$$F(\overline{F}(G(u, \overline{F}(u, \overline{u})), \overline{G}(u, F(u, \overline{u}))), \overline{F}(G(v, \overline{F}(v, \overline{v})), \overline{G}(v, F(v, \overline{v})))),$$

где обозначено $t = F(x, y), \ u = F(x, G(x, y)), \ v = F(y, G(y, x))$. Если заменить $F = +, \ G = \cdot$ в (4.15), то получим:

$$\overline{(x+y)'} = \overline{(x+xy)'} + \overline{(y+yx)'}.$$

Следовательно,

$$h_{i,\bar{i}}(x+y) = \overline{(x+y)'} = \overline{(x+xy)'} + \overline{(y+yx)'} = \overline{x'} + \overline{y'} = h_{i,\bar{i}}(x) + h_{i,\bar{i}}(y),$$

для $x, y \in Q_i$. Аналогично, при замене $F = \cdot, \ G = +$ в (4.15), получаем дуальное тождество $h_{i,\bar{i}}(x \cdot y) = h_{i,\bar{i}}(x) \cdot h_{i,\bar{i}}(y)$. Далее,

$$h_{i,\bar{i}}(x') = \overline{(x')'} = \overline{x} = ((\overline{x})')' = (h_{i,\bar{i}}(x))'.$$

Итак, мы показали, что $h_{i,\bar{i}}$ есть гомоморфизм. Из равенства

$$h_{\bar{i},i}(h_{i,\bar{i}}(x)) = h_{\bar{i},i}((\overline{x})') = \overline{((\overline{x})')'} = \overline{\overline{x}} = x$$

вытекает биективность $h_{i,\bar{i}}$. Кроме того $(h_{i,\bar{i}})^{-1} = h_{\bar{i},i}$.

После этого воспользуемся следующим сверхтождеством:

$$F(\overline{t}, G(\overline{t}, u)) = F(x, G(x, u)), \tag{4.16}$$

где обозначено $u = F(x, F(\overline{x}, y)), \ t = F(G(x, \overline{F}(x, \overline{x})), \overline{G}(x, F(x, \overline{x})))$.

При замене $F = +, \ G = \cdot$ получим тождество

$$\overline{x'} + \overline{x'} \cdot (x + \overline{x} + y) = x + x(x + \overline{x} + y).$$

Если возьмем $x \in Q_i, \ y \in Q_k$, где $k \in I, \ k \geq i + \bar{i}$, то $x + \overline{x} \in Q_{i+\bar{i}}, \ x + \overline{x} + y \in Q_{i+\bar{i}+k} = Q_k$, следовательно

$$\varphi_{\bar{i},k}(h_{i,\bar{i}}(x)) = \varphi_{\bar{i},k}(\overline{x'}) = \overline{x'} + \overline{x'} \cdot (x + \overline{x} + y) = x + x(x + \overline{x} + y) = \varphi_{i,k}(x),$$

потому что $x + \overline{x} + k \in Q_k$. Итак,

$$h_{i,\overline{i}} \cdot \varphi_{\overline{i},k} = \varphi_{i,k},$$

для любого $k \geq i + \overline{i}$.

Пусть теперь $x \in Q_i$, $y \in Q_j$, где $i + j = k$. Тогда $x + y \in Q_k$, и

$$\varphi_{i,k}(x) + \varphi_{j,k}(y) = (x + x(x+y)) + (y + y(x+y)) = (x+y) + (x+y)(x+y) = x + y,$$

$$\varphi_{i,k}(x) \cdot \varphi_{j,k}(y) = (x + x(x+y)) \cdot (y + y(x+y)) =$$

$$xy + xy(x+y) + x(x+y)y + xy(x+y) = xy + xy(x+y) = xy + xy + xy = x \cdot y,$$

$$\overline{x} = \overline{(x')'} = h_{i,\overline{i}}(x').$$

Этим мы доказали, что алгебра $\mathfrak{A}$ является Де Моргановой суммой Де Моргановых алгебр $Q_i(+,\cdot,')$, $i \in I$. Теорема доказана.

5. Следствия

Следствие 5.1. *Подпрямо неразложимая T-алгебра $\mathfrak{D}$, где $T = \{1, 2\}$, удовлетворяющая сверхтождествам* $(1.1) - (1.4), (2.1), (3.2) - (3.4), (4.1) - (4.16)$, *а также* $(3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12)$ *и* (3.10) *из работы* [1], *является Де Моргановой квазирешеткой, т.е. в ней выполняются все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана.*

Доказательство. Из доказательства предложения 2.1 следует, что мощность бинарных операций такой алгебры $\mathfrak{D}$ не больше 2 (поскольку в доказательстве этого предложения мы воспользовались только сверхтождествами $(1.1) - (1.4), (2.1)$, а также $(3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12)$ и (3.10) из работы [1]). Теперь если $\mathfrak{D}$ имеет одну бинарную операцию, то она удовлетворяет тождествам (3.5), и в силу предложения 3.1, является квазирешеткой Де Моргана, т.е. в ней выполняются все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана. А если $\mathfrak{D}$ имеет две бинарные операции, то из теоремы 4.1 следует, что она является Де Моргановой алгеброй или Де Моргановой суммой Де Моргановых алгебр (поскольку в доказательстве этой теоремы мы использовали лишь сверхтождества $(1.1) - (1.4), (2.1), (3.2) - (3.4), (4.1) - (4.16)$, а также $(3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12)$ и (3.10) из работы [1]). Теперь из достаточности этой же теоремы следует, что $\mathfrak{D}$ является квазирешеткой Де Моргана. $\square$

Следствие 5.2. *Сверхтождества* (1.1) – (1.4), (2.1), (3.2) – (3.4), (4.4) – (4.10), (4.12) – (4.16), *а также* (4.8) *из работы* [1] *составляют конечный базис сверхтождеств многообразия алгебр Де Моргана.*

Доказательство. Сначала заметим, что сверхтождества (1.1)–(1.4), (2.1), (3.2)–(3.4), (4.1) – (4.16), а также (3.5), (3.8), (4.8), (3.11), (3.12) и (3.10) из работы [1] составляют базис сверхтождеств многообразия алгебр Де Моргана. Пусть алгебра $\mathfrak{D}$ удовлетворяет этим сверхтождествам. Мы должны доказать, что в этой алгебре справедливы все сверхтождества многообразия алгебр Де Моргана.

Из теоремы Биркгофа о подпрямых произведениях для категории T-алгебр и следствия 5.1 следует, что в рассматриваемой категории T-алгебр, алгебра $\mathfrak{D}$ изоморфна подпрямому произведению квазирешеток Де Моргана, которые, по определению, удовлетворяют всем сверхтождествам многообразии алгебр Де Моргана. Поэтому $\mathfrak{D}$ также удовлетворяет всем этим сверхтождествам.

Далее, сверхтождества (4.1) – (4.3), (4.11), а также (3.5), (3.8), (3.11), (3.12) и (3.10) из работы [1] являются сверхтождествами многообразия дистрибутивных решеток, и в силу теоремы 1.1 являются следствиями сверхтождеств (1.1) – (1.4). □

Из этого результата непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 5.3. *Многообразие алгебр Де Моргана имеет конечный базис сверхтождеств, состоящий из сверхтождеств, функциональные и предметные ранги которых не превосходят* 3.

Abstract. The paper characterizes the algebras with hyperidentities of the variety of De Morgan algebras. For these algebras with two binary operations we prove a structure result. As a consequence, we obtain a finite base of the hyperidentities having functional and objective ranks not exceeding three.

Список литературы

[1] Ю. М. Мовсисян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр", Известия РАН, сер. Мат., 60, 6, 127 – 168 (1996).

[2] R. Balbes, P. Dwinger, Distributive Lattices, Univ. of Missouri Press (1974).

[3] Yu. M. Movsisyan, "Binary representations of algebras with at most two binary operations. A Cayley theorem for distributive lattices", International Journal of Algebra and Computation, 19, 97 – 106 (2009).

[4] Yu.M.Movsisyan, V. A. Aslanyan, "Hyperidentities of De Morgan algebras", Logic Journal of the IGPL 20, 1193 – 1174 (2012) (doi:10.1093/jigpal/jzr053).
[5] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Изд-во Ереванского госуниверситета (1986).
[6] Ю. М. Мовсисян, Сверхтождества и сверхмногообразия в алгебрах, Изд-во Ереванского госуниверситета (1990).
[7] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи Мат. Наук, 53 (1(319)), 61 – 114 (1998).

Поступила 19 января 2012