Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 5, 2013, стр. 31-48.[1]

ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА И ГАНКЕЛЯ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА БЕРГМАНА-ДЖРБАШЯНА ГАРМОНИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

М. А. ЗАКАРЯН

Иджеванский филиал Ереванского государственного университета
E-mail: *mzakar@mail.ru*

Аннотация. В статье рассматриваются весовые пространства гармонических функций. Имея нижние и верхние оценки эквивалентного ядра этого пространства мы рассматриваем операторы Теплица и Ганкеля с различными символами, а также мы изучаем некоторый компакт и критерий Фредгольма для них.

MSC2010 number: 42B35

Ключевые слова: Матрица Теплица, матрица Ганкеля, весовое пространство, гармоническая функция, весовая функция.

1. Введение

Пусть $\omega : (0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ – измеримая по Лебегу функция такая, что $\omega(t) \neq 0$ п.в. и пусть $L^p(\omega) := L^p(\mathbf{B}_n, \omega(1-|\mathbf{x}|)dm_n)$ – L^p весовые пространства на единичном шаре $\mathbf{B}_n$ из $\mathbb{R}^n$, где $1 \leq p < \infty$, а dm_n нормированная мера Лебега на $\mathbf{B}_n$. Для $n \geq 2$, пусть $h(\mathbf{B}_n)$ пространство всех гармонических функций на $\mathbf{B}_n$. Рассмотрим операторы Теплица и Ганкеля на пространствах $h^p(\omega) := h(\mathbf{B}_n) \cap L^p(\omega)$, $1 \leq p < \infty$ индуцированных нормой $\|\cdot\|_{\omega,p}$ в пространстве Банаха $L^p(\omega)$. Напомним, что (см. [17]) измеримая по Лебегу функция $\omega : (0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ называется *правильно меняющейся в нуле*, если существуют постоянные $\delta, \theta \in (0,1)$, и $m, M > 0$ такие, что для всех $t \in (0,\delta)$ и любого $\lambda \in [\theta, 1]$ имеем $\omega(t) > 0$ и

$$m \leq \frac{\omega(\lambda t)}{\omega(t)} \leq M. \tag{1.1}$$

Пусть S есть множество всех таких функций ω, с условием, что ω и $1/\omega$ ограничены п.в на каждом компактном множестве из $(0,1]$. Очевидно, что S замкнуто относительно конечных произведений и для $\omega \in S$ имеем $\omega^\gamma \in S$ для всех $\gamma \in \mathbb{R}$.

[1]Работа выполнена при поддержке фонда Александера фон Гумбольдта.

Из теоремы А1 работы [17] следует, что действительнозначная функция $\omega(t)$ определенная на $(0,1]$ принадлежит S тогда и только тогда, когда существуют измеримые ограниченные функции $\varepsilon, \eta : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ и $0 < \delta \leq 1$ такие, что

$$\omega(t) = \exp\left(\eta(t) + \int_1^t \frac{\varepsilon(s)}{s} ds\right), \quad t \in (0, \delta]. \tag{1.2}$$

Для функции $\omega \in S$, которая имеет вид (1.2), определим

$$\sigma_0(\omega) := \bigcap_{0<\delta<1} essran(\varepsilon\,|_{(0,\delta]}),$$

где $\{essran\}(\varepsilon\,|_{(0,\delta]})$ есть существенный образ функции ε в интервале $(0,\delta]$. Так как $\sigma_0(\omega)$ является компактным множеством из $\mathbb{R}$, то числа $\alpha_\omega := \max \sigma_0(\omega)$ и $\beta_\omega := \min \sigma_0(\omega)$ существуют. Из (1.2) вытекает, что для $\beta < \beta_\omega \leq \alpha_\omega < \alpha$ существуют постоянные $c, C > 0$ такие, что $ct^\alpha \leq \omega(t) \leq Ct^\beta$ для всех $t \in (0,1]$.

Для весовой функции $\omega \in L^1(0,1] \cap S$ имеем $\alpha_\omega \geq -1$. Пример $\omega(t) := t^{-1}(\log(e/t))^{-2}$ с $\beta_\omega = -2$, $\alpha_\omega = -1$ показывает, что $\alpha_\omega = -1$ достижимо. Для каждого $s \in \mathbb{R}$ нетрудно построить вес из $L^1(0,1] \cap S$ такой, что $\beta_\omega < s$. Однако мы ограничиваемся весами $\omega \in S$ такими, что $\beta_\omega > -1$ и которые принадлежат пространству $L^1(0,1]$. Весовые пространства аналитических и гармонических функций с различными весами из $L^1(0,1] \cap S$ были интенсивно исследованы в литературе. Известные результаты были получены для степенного веса $\omega_\alpha(t) = t^\alpha, \alpha > -1$. В частности, в случае гармонических функций воспроизводящее ядро для пространства $h^p(\omega_\alpha)$ было получено в [7] для $\alpha \in \mathbb{N}_0$, а в [8] для всех $\alpha > -1$. Отметим, что для $\alpha \in \mathbb{N}$ найденные ядра различны, причем в обоих случаях эти ядра являются эквивалентными.

2. Рост оценки для воспроизводящего ядра и проекция типа Бергмана-Джрбашяна

Ниже нам понадобится следующий результат.

Лемма 2.1. *Пусть $\omega \in S$, $0 < \alpha < \alpha_\omega$и, $\beta_\omega > -1$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $r \in [0,1)$*

$$I(r) := \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)}{(1-r\rho)^{a+1}} d\rho \leq C \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Зафиксируем $a \in (\alpha_\omega, a)$ и $\beta \in (-1, \beta_\omega)$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $essrun(\varepsilon\,|_{(0,\delta]}) \subset (\beta, \alpha)$, где ω представлена в виде (1.2). Для $\delta \leq 1 - r \leq 1$ имеем $I(r) \leq \delta^{-a-1} ||\omega||_{L^1(0,1]} < \infty$. Так как правая часть в (2.1) существенно ограниченна снизу, то желанная оценка имеет место почти для всех $r \in [0, 1-\delta]$. Для $0 < 1 - r < \delta$ имеем

$$I(r) = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt = \int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\delta} + \int_{\delta}^{1} := I_1(r) + I_2(r) + I_3(r).$$

Следовательно, обозначая $u(1-r) = t$ из (1.2) для всех $r \in [0, 1-\delta]$ получаем

$$I_1(r) = \int_0^{1-r} \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt \le \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a} \int_0^1 \frac{\omega\left(u\left(1-r\right)\right)}{\omega\left(1-r\right)} du$$

$$= \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a} \int_0^1 \exp\left(\eta\left(\left(1-r\right)u\right) - \eta\left(1-r\right) + \int_{1-r}^{u(1-r)} \frac{\varepsilon\left(s\right)}{s} ds\right) du$$

$$\le \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a} \exp\left(2 \parallel \eta \parallel_{L^\infty(0,1])}\right) \int_0^1 \exp\left(\beta \log\left(\frac{(1-r)\,u}{1-r}\right)\right) du$$

$$\le C_1 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a},$$

так как интеграл $\int_0^1 u^\beta du$ конечен. Аналогично получаем оценку для второго интеграла

$$I_2(r) = \int_{1-r}^{\delta} \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt \le \frac{1}{r^{a+1}} \int_{1-r}^{\delta} \frac{\omega(t)}{t^{a+1}} dt$$

$$\le \frac{\omega(1-r)}{(1-\delta)^{a+1}} \int_{1-r}^{\delta} t^{-a-1} \exp\left(\eta\left(t\right) - \eta\left(1-r\right) + \int_{1-r}^{t} \frac{\varepsilon\left(s\right)}{s} ds\right) dt$$

$$\le C' \omega\left(1-r\right) \int_{1-r}^{\delta} t^{-a-1} \exp\left(\alpha \log\left(\frac{t}{1-r}\right)\right) dt$$

$$\le \frac{C' \omega\left(1-r\right)}{\left(1-r\right)^{\alpha}\left(a-\alpha\right)} \left(\left(1-r\right)^{\alpha-a} - \delta^{\alpha-a}\right) \le C_2 \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^a}$$

для почти всех $r \in [1-\delta, 1)$. Так как

$$I_3\left(r\right) \le \int_{\delta}^{1} \frac{\omega(t)}{(1-r+tr)^{a+1}} dt \le \delta^{-a-1} \parallel \omega \parallel_{L^1((0,1])} < \infty,$$

для почти всех $r \in [1-\delta, 1]$, то лемма 2.1 доказана. □

Аналогичный результат для полудиска был получен в [16].

Для $x, y \in \mathbf{B}_n$ имеем $x = |x|x'$, $y = |y|y'$ где $x', y' \in \mathbb{S}_{n-1}$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Если $\omega \in L^1(0,1] \cap S$ и $\alpha > \alpha_\omega$, то $h^p(\omega) \subset h^p(\omega_\alpha)$. Используя ядро типа Джрбашяна [8] и теорему 7.1 из [8], для всех $f \in h^p(\omega_\alpha)$ получаем следующую интегральную формулу

$$f(x) = \int\limits_{\mathbf{B}_n} f(x) Q_\alpha(x,y) \left(1 - |y|^2\right)^\alpha dm_n(y), x \in \mathbf{B}_n, \tag{2.2}$$

где

$$Q_\alpha(x,y) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+1+n/2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+n/2)} (|x|\,|y|)^k Z_{x'}^k(y')$$

где $Z_{x'}^k(y')$ – зональные гармоники (см. [19], [20] или [3]).

Учитывая, что верхнюю оценку для воспроизводящего ядра можно найти в [7] и [8], а нижнюю оценку в [15], то приходим к следующему результату:

Лемма 2.2. *(см. [15] Свойство 4 и [8] теорема 7.1) Для фиксированного $\alpha > -1$ и $\alpha = [\alpha] + \{\alpha\}$, имеем:*

a) *Существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $x, y \in \mathbf{B}_n$ имеет место верхняя оценка*

$$|Q_\alpha(x,y)| \le \frac{C(1 - |x|\,|y|)^{\{\alpha\}-1}}{\left((|x|\,|y|)^2 - 2|x|\,|y|\,\langle x', y'\rangle + 1\right)^{(n+[\alpha]-1)/2}}.$$

b) *Существуют постоянные $R_0 \in (0, 1/4)$, $\theta \in [1/2, 1)$, и $c, \hat{C} \in (0,\infty)$ такие, что для всех $R \in (0, R_0)$ и всех $x, y \in \mathbf{B}_n$, $|x| \ge \theta$ и $y \in B_{R(1-|x|)}(x)$, имеет место следующая оценка*

$$Q_\alpha(x,y) \ge \frac{c}{(1 - |x|\,|y|)^{n+\alpha}} \ge \frac{\hat{C}}{\left((|x|\,|y|)^2 - 2|x|\,|y|\,\langle x', y'\rangle + 1\right)^{(n+\alpha)/2}},$$

где $B_{R(1-|x|)}(x)$ шар с центром в x и радиусом $R(1 - |x|)$.

Лемма 2.3. *Для $2 \le n \in \mathbf{N}, p \ge 1$ и $\alpha > -1$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbf{B}_n$ и любого $\rho \in [0,1]$, имеем*

$$J_\alpha(x,\rho) := \int\limits_{\mathbb{S}_{n-1}} |Q_\alpha(x, \rho y')|^p \, d\sigma_{n-1}(y') \le \frac{C}{(1 - \rho|x|)^{p(n+\alpha)-n+1}}, \tag{2.3}$$

где σ_{n-1} – нормированная поверхностная мера на $\mathbb{S}_{n-1}$.

Доказательство. Используя лемму 2.2, получаем

$$J_\alpha(x,\rho) \le C_0 \int\limits_{\mathbf{S}_{n-1}} \frac{(1-\rho|x|)^{(-\{\alpha\}+1)p}}{((\rho|x|)^2 - 2\rho|x|\langle x',y'\rangle + 1)^{p(n+[\alpha]-1)/2}} d\sigma(y').$$

Очевидно, что $\sup\limits_{\rho|x|\le\frac{1}{2}} J_\alpha(x,\rho)<\infty$. Предположим, что $\rho|x|>1/2$ и выберем координатную систему так, что $x=|x|(1,0,...,0)$. Учитывая, что $\sigma_{n-2}(\mathbf{S}_{n-2})=1$, и используя свойства A.4 и A.6 из [3], получаем:

$$J_\alpha(x,\rho) \le C\frac{(n-1)V_{n-1}}{nV_n}(1-\rho|x|)^{(-\{\alpha\}+1)p}$$
$$\cdot\int\limits_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{((\rho|x|)^2-2\rho|x|t+1)^{p(n+[\alpha]-1)/2}}dt$$
$$\le C_1(1-\rho|x|)^{(-\{\alpha\}+1)p}\left(1+\int\limits_{0}^{1}\frac{(\rho|x|)^{-\frac{n-3}{2}}}{((\rho|x|)^2-2\rho|x|t+1)^{p(n+[\alpha]-1-n+3)/2}}dt\right)$$
$$\le C_2\frac{(1-\rho|x|)^{(-\{\alpha\}+1)p}}{(1-\rho|x|)^{p(n+[\alpha]-1)-n+1}} = \frac{C_2}{(1-\rho|x|)^{p(n+\alpha)-n+1}},$$

где $V_{n-1}=V_{n-1}(B_{n-1})$ и $V_n=V_n(B_n)$ суть объемы шаров B_{n-1} и B_n соответственно. Лемма 2.3 доказана. □

Для $1<p<\infty$ обозначим $p':=\frac{p}{p-1}$ так, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Лемма 2.4. *Пусть* $1<p<\infty$ *и* $\omega\in S$ *вида (1.2) и* $\beta_\omega>-1$. *Тогда для любого* $\alpha>\max\left\{-1,\frac{1}{p}(\alpha_\omega+n)-n\right\}$ *существуют постоянные* $c,C>0$ *такие, что*

$$c\frac{\omega(1-|x|)^{1/p}}{(1-|x|)^{\alpha+n/p'}} \le \|Q_\alpha(x,\cdot)\|_{\omega,p} \le C\frac{\omega(1-|x|)^{1/p}}{(1-|x|)^{\alpha+n/p'}} \quad \text{п.в. на } \mathbf{B}_n. \tag{2.4}$$

Доказательство. Переходя к полярным координатам, получаем

$$\|Q_\alpha(x,\cdot)\|^p_{\omega,p} = \int\limits_0^1 \omega(1-\rho)\frac{\rho^{n-1}}{n}\int\limits_{\mathbf{S}_{n-1}}\|Q_\alpha(x,\rho y')\|^p d\sigma_{n-1}(y')d\rho.$$

Из леммы 2.3 вытекает, что

$$\|Q_\alpha(x,\cdot)\|^p_{\omega,p} \le C\int\limits_0^1\frac{\omega(1-\rho)}{(1-\rho|x|)^{p(n+\alpha)-n+1}}d\rho.$$

Верхняя оценка в (2.4) есть следствие леммы 2.1. Для нижней оценки мы применим оценку для $Q_\alpha(x,y)$ в $B_{R(1-|x|)}(x)$ из леммы 2.2.

Пусть $R_0 \in (0, 1/4)$, $\theta \in [\frac{1}{2}, 1)$ будут как и в лемме 2.2. Тогда для $\theta \le |x| < 1$, $0 < R < R_0$, и $y \in B_{R(1-|x|)}(x)$ имеем

$$Q_\alpha(x, y) \ge c_1(1 - |x||y|)^{-n-\alpha} \ge c_2(1 - |x|)^{-n-\alpha},$$

где $c_2 = c_1 3^{-n-\alpha}$. Отсюда, для $\theta \le |x| < 1$ и $0 < R < R_0$ получаем

$$||Q_\alpha(x, \cdot)||^p_{\omega,p} \ge \int\limits_{B_{R(1-|x|)}(x)} ||Q_\alpha(x, y)||^p \omega(1 - |y|) dm_n(y)$$

$$\ge c_2(1 - |x|)^{-p(n+\alpha)} \int\limits_{B_{R(1-|x|)}(x)} \omega(1 - |y|) dm_n(y).$$

Так как $\omega \in S$, то существуют $\theta_1 \in (0, 1)$, $\delta \in (0, 1]$ и постоянные $m, M > 0$ такие, что $m \le \frac{\omega(\lambda t)}{\omega(t)} \le M$ для любого $t \in (0, \delta]$, $\lambda \in [\theta_1, 1)$. Для $0 < R < R_1 := \min\{R_0, 1-\theta_2, \theta_2^{-1} - 1\}$, $r_0 := \max\{1 - \delta/2, \theta\} < |x| < 1$ и для всех $y \in B_{R(1-|x|)}(x)$ имеем $1 - |y|, 1 - |x| \in (0, \delta)$ и $\theta_2 \le 1 - R \le \frac{1-|y|}{1-|x|} \le 1 + R \le \frac{1}{\theta_2}$. Следовательно, получаем

$$m_0 := \min\left\{m, \frac{1}{M}\right\} \le \frac{\omega(1 - |y|)}{\omega(1 - |x|)} \le M_0 := \max\left\{m, \frac{1}{M}\right\}.$$

Отсюда для $r_0 \le |x| < 1$ и $0 < R < R_1$ получим

$$||Q_\alpha(x, \cdot)||^p_{\omega,p} \ge c_2 \frac{\omega(1 - |x|)}{(1 - |x|)^{p(\alpha+n)}} \int\limits_{B_{R(1-|x|)}(x)} \frac{\omega(1 - |y|)}{\omega(1 - |x|)} dm_n(y)$$

$$\ge c_2 m_0 \frac{\omega(1 - |x|)}{(1 - |x|)^{p(\alpha+n)}} m_n(B_{R(1-|x|)}(x)) = c_3 R^n \frac{\omega(1 - |x|)}{(1 - |x|)^{p(\alpha+n)-n}},$$

где постоянная $c_3 > 0$ не зависит от R и x. Нетрудно видеть, что функция $x \mapsto \| Q_\alpha(x, \cdot) \|_{\omega,p}$ со значениями $(0, \infty)$ непрерывна на $r\overline{\mathbf{B}_n}$ и следовательно, ограничена снизу на $r\overline{\mathbf{B}_n}$. Отсюда следует, что для фиксированного $R \in (0, R_1)$ существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $|x| \in \mathbf{B}_n$ нижняя оценка в (2.4) имеет место. $\square$

Далее, мы рассматриваем интегральные операторы P_γ, $\gamma > -1$, заданные формулами

$$(P_\gamma f)(x) := \int\limits_{\mathbf{B}_n} (1 - |y|^2)^\gamma Q_\gamma(x, y) f(y) dm_n(y).$$

Известно, что для $\gamma > (1 + \alpha)/p - 1$ оператор P_γ определяет ограниченный проектор из $L^p(\omega_\alpha), 1 < p < \infty$ на $h^p(\omega_\alpha)$, где $\omega_\alpha(t) = t^\alpha, 0 < t \le 1$ (см. [8], теорема 7.3). Точнее, имеем следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть $\omega \in S$, $\beta_\omega > -1$ и $p \in (1,\infty)$. Тогда для всех $\gamma > \frac{(1+\alpha_\omega)}{p} - 1$ оператор P_γ есть ограниченный проектор из $L^p(\omega)$ на $h^p(\omega)$.*

Доказательство. Как и в классическом случае, мы применим критерий Шура (см. [8] Лемма 2.2, или [11] теорема 1.8). Так как p' сопряженный к p, то будем иметь $-(\gamma+1)/p' < (\gamma-\alpha_\omega)/p$ и $-(\beta_\omega+1)/p < 0$. Отсюда вытекает, что интервалы $((\gamma-\alpha_\omega)/p, 0)$ и $(-(\gamma+1)/p', 0)$ имеют непустое пересечение. Фиксируем некоторое s из этого пересечения и обозначим $h(x) := (1-|x|)^s, x \in \mathbf{B}_n$. Тогда используя лемму 2.3 получаем

$$\int\limits_{\mathbf{B}_n} (1-|y|^2)^\gamma |Q_\gamma(x,y)| h(y)^{p'} dm_n(y)$$

$$= \frac{1}{n} \int\limits_0^1 \rho^{n-1}(1-\rho^2)^{\gamma+sp'} \int\limits_{\mathbf{S}_{n-1}} |Q_\gamma(x,\rho y')| d\sigma_{n-1}(y') d\rho$$

$$\le C \int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{\gamma+sp'}}{(1-\rho|x|)^{\gamma+1}} d\rho \le C_1(1-|x|)^{p's} = C_1 h(x)^{p'},$$

где в последнем неравенстве мы применили лемму 2.1 для степенного веса $t \mapsto t^{\gamma+sp'}$, что имеет место, так как $\gamma+sp' > -1$ и $\gamma+sp' < \gamma$. Замечая, что $Q_\gamma(x,y) = Q_\gamma(y,x)$ и используя лемму 2.3, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{B}_n} \frac{(1-|y|^2)^\gamma}{\omega(1-|y|)} |Q_\gamma(x,y)| h(x)^p \omega(1-|x|) dm_n(x)$$

$$= \frac{(1-|y|^2)^\gamma}{n\omega(1-|y|)} \int\limits_0^1 \rho^{n-1}(1-\rho)^{sp}\omega(1-\rho) \int\limits_{\mathbf{S}_{n-1}} |Q_\gamma(\rho x', y)| d\sigma_{n-1}(x') d\rho$$

$$\le C_2 \frac{(1-|y|)^\gamma}{\omega(1-|y|)} \int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{sp}\omega(1-\rho)}{(1-\rho|x|)^{\gamma+1}} d\rho \le C_3(1-|y|)^{sp} = C_3 h(y)^p,$$

где мы применили лемму 2.1 для функции $\widetilde{\omega} : t \mapsto \omega(t)t^{sp}$, так как $\beta_{\widetilde{\omega}} = \beta_\omega + sp > -1$ и $\alpha_{\widetilde{\omega}} = \alpha_\omega + sp < \gamma$. По критерию Шура P_γ есть ограниченный линейный оператор в $L^p(\omega)$, который удовлетворяет условию $\operatorname{ran} P_\gamma = h^p(\omega)$ и $P_\gamma^2 = P_\gamma$. $\square$

Из последнего свойства получаем, что $h^p(\omega)$ есть банахово пространство, так как оно является замкнутым линейным подпространством банахова пространства $L^p(\omega)$. Отсюда следует также, что $Q_\alpha(x,y)$ есть эквивалентное ядро для пространства $h^p(\omega)$:

$$| Q_\alpha(x,y)| \approx |Q_\omega(x,y)|, \tag{2.5}$$

где $A \approx B$ означает $C_1 A \le B \le C_2 A$ с положительными постоянными C_1 и C_2.

Лемма 2.5. *Пусть $\omega \in S$, $\beta_\omega > -1$ и $p \in (1,\infty)$. Тогда для любого*

$$\alpha > \max\{-1, \frac{1}{p}(\alpha_\omega + n) - n\}$$

имеем $\| Q_\alpha(x,\cdot)\|^{-1}_{\omega,p} Q_\alpha(x,\cdot) \to 0$ слабо в $h^p(\omega)$ при $|x| \to 1$.

Доказательство. Для любого непрерывного линейного функционала Φ на $h^p(\omega)$ существует $f \in L^{p'}(\omega)$ такая, что

$$\Phi(u) = \int_{\mathbf{B}_n} u(y) f(y) \omega(1-|y|) dm_n(y).$$

Для всех непрерывных функций на $\mathbf{B}_n$ с компактным носителем и $r := \max_{y\in supp(f)} |y| < 1$ из леммы 2.2 получаем

$$C_f := \sup_{x,y\in\mathbf{B}_n} | Q_\alpha(x,y) f(y)| \omega(1-|y|) < \infty.$$

Используя лемму 2.4 и выбирая $\alpha_1 \in (\alpha_\omega, p(n+\alpha) - n)$, получим

$$\left| \int_{\mathbf{B}_n} \frac{Q_\alpha(x,y) f(y)}{\| Q_\alpha(x,\cdot)\|_{\omega,p}} \omega(1-|y|) dm_n(y) \right|$$
$$\le C \frac{(1-|x|)^{\alpha+n/p'}}{\omega(1-|x|)} \le (1-|x|)^{p(n+\alpha)-n-\alpha_1} \to 0,$$

при $|x| \to 1$, где постоянная $C > 0$ зависит только от ω и α_1. Так как функции с компактным носителем в $\mathbf{B}_n$ плотны в $L^{p'}(\omega)$ и $|||| Q_\alpha(x,\cdot)||^{-1}_{\omega,p} Q_\alpha(x,\cdot)||_{\omega,p} \equiv 1$, то для любой $f \in L^{p'}(\omega)$ имеем

$$\int_{\mathbf{B}_n} \frac{Q_\alpha(x,y) f(y)}{\| Q_\alpha(x,\cdot)\|_{\omega,p}} \omega(1-|y|) dm_n(y) \to 0 \text{ as } |x| \to 1.$$

□

3. Компактные операторы Теплица и Ганкеля с различними символами

Для $\varphi \in L^\infty(\mathbf{B}_n)$ оператор Теплица на $h^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ определяется следующим образом $T_\varphi(f) = P(\varphi f)$, где $P : L^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to h^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ непрерывная проекция ($1 < p < \infty$). T_φ есть ограниченный оператор и ясно, что $|T_\varphi| \le |P|||\varphi||_\infty$. Сопряженный к

T_φ оператор T_φ^* определяется как $T_\varphi^* : h_\omega^{p'}(\mathbf{B}_n) \to h_\omega^{p'}(\mathbf{B}_n), T_\varphi^*(\Phi)f = \Phi(T_\varphi f)$, где $\Phi \in (h_\omega^{p'}(\mathbf{B}_n))^*$ или с скалярным произведением: $\langle T_\varphi f, g\rangle = \langle f, T_\varphi^* g\rangle$ где $f \in h_\omega^p(\mathbf{B}_n)$, $g \in h_\omega^{p'}(\mathbf{B}_n)$. Пусть $\mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))$ обозначает замкнутый компактный идеал в $\mathfrak{L}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))$. Норма $S + \mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))$ в $\mathfrak{L}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))/\mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))$ определяется так:

$$|S + \mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))| = \inf_{K \in \mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))} |S + K|.$$

Нетрудно доказать следующие свойства:

Предложение 3.1. *Пусть* $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L^\infty(\mathbf{B}_n)$ *и* $a, b \in \mathbb{C}$. *Тогда*

i) $T_{a\varphi_1 + b\varphi_2} = aT_{\varphi_1} + bT_{\varphi_2}$,

ii) T_1 *есть тождественный оператор,*

iii) $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$, *где* $T_{\overline{\varphi}}$ *есть оператор Теплица с символом* $\overline{\varphi}$ *определенный на* $h_\omega^{p'}(\mathbf{B}_n)$.

Предложение 3.2. *Пусть* G *компактное подмножество в* $\mathbf{B}_n$ *и* $\varphi \in L^\infty(\mathbf{B}_n)$, $\varphi \equiv 0$ *на* $\mathbf{B}_n \setminus G$. *Тогда* T_φ *есть компактный оператор на* $h_\omega^p(\mathbf{B}_n)$.

Доказательство. Пусть $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – ограниченная последовательность в $h_\omega^p(\mathbf{B}_n)$. Так как $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть равномерно ограниченная последовательность на каждом компактном подмножестве в $\mathbf{B}_n$, то существует функция f на $\mathbf{B}_n$такая, что некоторая подпоследовательность $\{f_{n_j}\}$ последовательности $\{f_n\}$ сходится к f равномерно на G. Следовательно, f – гармоническая функция. Значит $\{\varphi f_{n_j}\}$ сходится по норме $L_\omega^p(\mathbf{B}_n)$ к $\{\varphi f\}$ и тогда оператор произведения $M_\varphi : h_\omega^p(\mathbf{B}_n) \to L_\omega^p(\mathbf{B}_n)$ есть компактный оператор. Поэтому, $T_\varphi = PM_\varphi|_{h_\omega^p(\mathbf{B}_n)}$ есть компактный оператор. □

Следствие 3.1. $|T_\varphi + \mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))| \le \lim\limits_{r\to 1} \sup_{r<|x|<1} |\varphi(x)|$.

Доказательство. Так как при $r < 1$ $T_{\varphi\chi(\mathbf{B}_n)_r}$ есть компактный оператор, имеем

$$\begin{aligned} |T_\varphi + \mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))| &= \inf_{K \in \mathfrak{K}(h_\omega^p(\mathbf{B}_n))} |T_\varphi + K| \le |T_\varphi - T_{\varphi\chi(\mathbf{B}_n)_r}| \\ &= |T_\varphi -_{\varphi\chi(\mathbf{B}_n)_r}| \le |\varphi - \varphi\chi(\mathbf{B}_n)_r| = \sup_{r<|x|<1} |\varphi(x)|. \end{aligned}$$

□

Оператор Ганкеля $H_\varphi, H_\varphi : h_\omega^p(\mathbf{B}_n) \to L_\omega^p(\mathbf{B}_n)$ определяется так: $H_\varphi f = (I - P)(\varphi f)$ где $\varphi \in L^\infty(\mathbf{B}_n)$. Между операторами Ганкеля и Теплица имеется связь:

$T_{\varphi\psi} - T_\varphi T_\psi = H^*_{\overline{\varphi}} H_\psi$, где

$$T_\varphi, T_\psi, T_{\varphi\psi} : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to h^p_\omega(\mathbf{B}_n),$$

$$H_\psi : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n), H^*_{\overline{\varphi}} : L^p_\omega \mathbf{B}_n \to h^p_\omega(\mathbf{B}_n).$$

Нетрудно доказать, что

$$H_{\varphi\psi} = S_\varphi H_\psi + H_\varphi T_\psi, \tag{3.1}$$

где $H_\varphi, H_\psi, H_{\varphi\psi} : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n), T_\psi : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to h^p_\omega(\mathbf{B}_n), S_\varphi : L^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n)$, $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbf{B}_n), 1 < p < \infty$. Из (3.1) вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.3. *Пусть $1 < p < \infty$ фиксировано. Множество функций $\varphi \in C(\overline{\mathbf{B}_n})$ таких, что оператор Ганкеля $H_\varphi : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ компактен, составляют замкнутую подалгебру в $C(\overline{\mathbf{B}_n})$.*

Заметим, что если $\varphi \in L^\infty(\mathbf{B}_n), p \in (1, \infty)$, то $H_\varphi : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ представляется в виде:

$$\begin{aligned}
(H_\varphi f)(x) &= (I - P)(\varphi f) = \varphi(x) f(x) - P(\varphi f)(x) \\
&= \varphi(x) \int_{\mathbf{B}_n} (1 - |y|^2)^\alpha Q_\alpha(x, y) f(y) dm_n(y) \\
&\quad - \int_{\mathbf{B}_n} (1 - |y|^2)^\alpha Q_\alpha(x, y) \varphi(y) f(y) dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbf{B}_n} (1 - |y|^2)^\alpha Q_\alpha(x, y) (\varphi(x) - \varphi(y)) f(y) dm_n(y) \\
&= \int_{\mathbf{B}_n} (1 - |y|^2)^\alpha Q^\varphi_\alpha(x, y) f(y) dm_n(y),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где $Q^\varphi_\alpha(x, y) = (\varphi(x) - \varphi(y)) Q_\alpha(x, y)$ есть так называемое ядро интегрального оператора (3.2).

Докажем результат, который в безвесовом случае можно найти в [12].

Теорема 3.1. *Пусть $p \in (1, \infty)$ и φ непрерывная функция на $\mathbf{B}_n$. Оператор Ганкеля $H_\varphi : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ компактен.*

Доказательство. Так как $A = \{\varphi \in C(\overline{\mathbf{B}_n}) : H_\varphi \text{компактен}\}$ есть замкнутая подалгебра в $C(\overline{\mathbf{B}_n})$, то достаточно показать, что $A = C(\overline{\mathbf{B}_n})$. Согласно теореме Стоуна-Вайерштрасса достаточно показать, что $H_{x_j} : h^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n), f \mapsto$

$(I-P)(x_j f)$ есть компакт, где $x_j, j=1,2,...n$ есть j-ая координата точки x. Согласно (3.2) имеем

$$(H_{x_j} f)(x) = \int_{\mathbf{B}_n} (1-|y|^2)^\alpha Q_\omega^{x_j}(x,y) f(y) dm_n(y) \tag{3.3}$$

где $Q_\omega^{x_j}(x,y) = (x_j - y_j) Q_\omega(x,y)$. Покажем, что для некоторых $q>1$ и ω интеграл

$$I := \int_{\mathbf{B}_n} \omega(1-|x|) (\int_{\mathbf{B}_n} \omega(1-|y|) |Q_\omega^{x_j}(x,y)|^{q'} dm_n(y))^{q/q'} dm_n(x)$$

ограничен. Из (3.1) следует, что

$$\begin{aligned} I &\le \int_{\mathbf{B}_n} \omega(1-|x|) (\int_{\mathbf{B}_n} \omega(1-|y|) \frac{|x_j - y_j|^{q'}}{|\rho x' - y'|^{q'(n+\alpha)}} dm_n(y))^{q/q'} dm_n(x) \\ &\le \int_{\mathbf{B}_n} \omega(1-|x|) (\int_0^1 \frac{\omega(1-|y|) d\rho}{(1-\rho r)^{q'(n+\alpha)-n+1-q'}})^{q/q'} dm_n(x). \end{aligned}$$

Последний интеграл ограничен при $q > \frac{n+\alpha_\omega}{\alpha_\omega - \alpha + 1}$ и $\alpha - 1 < \alpha_\omega < n + 2\alpha + 1$. Используя интерполяцию операторов для весовых L^p пространств, мы получим, что $T : L^p_\omega(\mathbf{B}_n) \to L^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ есть компактный оператор. Так как H_{x_j} сужение T на $h^p_\omega(\mathbf{B}_n)$, то H_{x_j} есть компактный оператор. Для того чтобы для операторов типа (3.2) были выполнены эти условия достаточно выбрать ω так, чтобы $\alpha - 1 < \alpha_\omega < \alpha + 1$. □

Следствие 3.2. *Пусть $\varphi, \psi \in C(\overline{\mathbf{B}_n})$. Тогда операторы $T_{\varphi\psi} - T_\varphi T_\psi$ и $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ компактны на $h^p_\omega(\mathbf{B}_n)$.*

Теорема 3.2. *Если $\varphi \in C(\overline{\mathbf{B}_n})$ то $\sigma_e(T_\varphi) = \varphi(\partial \mathbf{B}_n)$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\sigma_e(T_\varphi) \subset \varphi(\partial\mathbf{B}_n)$. Без ограничения общности предположим, что $0 \notin \varphi(\partial\mathbf{B}_n)$. Нам нужно показать, что T_φ есть Фредгольмов оператор. Пусть $\psi \in C(\overline{\mathbf{B}_n})$ такой, что $\psi = \frac{1}{\varphi}$ на $\partial\mathbf{B}_n$. Согласно Утверждению 3.2, $T_{\varphi\psi} - I = T_{\varphi\psi - I}$ есть компакт и с (3.2) оператор $T_\psi T_\varphi - I$ и $T_\varphi T_\psi - I$ есть компактный оператор. Из теоремы Аткинсона следует, что T_φ есть компактный оператор. Сейчас покажем, что $\varphi(\partial\mathbf{B}_n) \subset \sigma_e(T_\varphi)$. Пусть $\varphi(\theta) = 0$ для некоторого $\theta \in \partial\mathbf{B}_n$. Нужно показать, что T_φ есть не фредголмов оператор. Предположим обратное: T_φ есть Фредгольмов оператор. По теореме Аткинсона существует $S \in \mathfrak{L}(h^p_\omega(\mathbf{B}_n))$ такое, что $ST_\varphi - I$ есть компактный оператор на

$h^p_\omega(\mathbf{B}_n)$. По лемме 2.5 $ST_\varphi \mid Q_\omega(x,\cdot)|^{-1}_{\omega,p} Q_\omega(x,\cdot) - \mid Q_\omega(x,\cdot)|^{-1}_{\omega,p} Q_\omega(x,\cdot) \to 0$ по норме топологии на $h^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ при $|x| \to 1$. Имеем

$$\left|\left|ST_\varphi \right|\right| Q_\omega(x,\cdot)|\,|^{-1}_{\omega,p} Q_\omega(x,\cdot)|\,|^p_{\omega,p} \le C\left| |M_\varphi \frac{Q_\omega(x,\cdot)}{|\,Q_\omega(x,\cdot)|_{\omega,p}}\right| |^p_{\omega,p}$$

$$= C \int\limits_{\mathbf{B}_n} \omega(1-|y|)\,|\varphi(y)|^p \frac{|Q_\omega(x,y)|^p}{||\,Q_\omega(x,\cdot)|\,|^p_{\omega,p}} dm_n(y)$$

$$= C\left(\int\limits_{\mathbf{A}_n} + \int\limits_{\mathbf{B}_n\setminus\mathbf{A}_n}\right),$$

где $\mathbf{A}_n = \{y \in \mathbf{B}_n : |y-\theta| < \delta, \delta > 0\}$. Так как $\varphi(\theta) \to 0$, когда $x \to \theta$, то для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем выбрать δ такое, что

$$\int\limits_{\mathbf{A}_n} \omega(1-|y|)\,|\varphi(y)|^p \frac{|Q_\omega(x,y)|^p}{||\,Q_\omega(x,\cdot)|\,|^p_{\omega,p}} dm_n(y) \le$$

$$\varepsilon \int\limits_{\mathbf{B}_n} \omega(1-|y|) \frac{|Q_\omega(x,y)|^p}{||\,Q_\omega(x,\cdot)|\,|^p_{\omega,p}} dm_n(y) = \varepsilon.$$

$$\int\limits_{\mathbf{B}_n\setminus\mathbf{A}_n} \omega(1-|y|)\,|\varphi(y)|^p \frac{|Q_\omega(x,y)|^p}{||\,Q_\omega(x,\cdot)|\,|^p_{\omega,p}} dm_n(y)$$

$$\le\ C \int\limits_{|y-\delta|\ge\delta} \frac{(1-|x|)^{(n+\alpha)p-n}}{\omega(1-|x|)} |Q_\omega(x,y)|^p\, dm_n(y) \le C_1\varepsilon,$$

если $|x-\theta|$ достаточно мало. Это противоречие и доказывает теорему. □

Следствие 3.3. *Пусть $\varphi \in C\left(\overline{\mathbf{B}_n}\right), 1 < p < \infty$, тогда T_φ есть компактный оператор на $h^p_\omega(\mathbf{B}_n)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \equiv 0$ на $\partial\mathbf{B}_n$.*

4. Операторы Теплица с PC и матриц символами на $h^p_\omega(\mathbf{B}^n)$

Пусть F – $(n-1)$-мерная гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ пересекающая $\mathbf{B}_n$. Тогда множество $B_n\setminus F$ состоит из двух частей, которые обозначаем через B_n^+ и B_n^-.

$$B_n^+ = \{x = (x_1,\cdots,x_n) \in B_n : det\,(a_1,\cdots,a_{n-1}, y-x_0) > 0\}$$

$$B_n^- = \{x = (x_1,\cdots,x_n) \in B_n : det\,(a_1,\cdots,a_{n-1}, y-x_0) < 0\},$$

где $a_1,\cdots,a_{n-1}$ есть произвольный базис в F, $x_0 \in F$ фиксировано и $y \in B_n$. Обозначая $F\bigcup\partial B_n = \partial F$ и определяя

$$HC(B_n) = \left\{\varphi \in L^{infty}(B_n) : \varphi|_{B_n^+}, \varphi|_{B_n^-} - \text{ равномерно непрерывны}\right\},$$

замечаем, что $HC(B_n)$ есть замкнутая подалгебра из $L^\infty(B_n)$ и поэтому мы можем записать

$$HC(B_n) = \{< \varphi, \psi >: \varphi \in C(B_n^+), \psi \in C(B_n^+)\}$$

. Напомним, что алгебра PC есть замкнутая подалгебра в $L^\infty(B_n)$, состоящая из кусочно непрерывных функций на T. Пусть $\varphi^\sharp$ есть кривая, соединяющая значения правого и левого пределов из φ прямыми отрезками в точке разрыва. Известно, что в гильбертовом пространстве H^2 справедлив следующий результат (см. [10]):

Предложение 4.1. *Если φ и $\psi \in PC$, то*

i) *$T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi$ есть компакт,*

ii) *T_φ есть Фредгольмов оператор тогда и только тогда, когда $\varphi^\sharp$ не проходит через начало координат.*

Мы покажем, что эти свойства остаются справедливыми для φ и ψ из $HC(B_n)$. Отметим, что результат Предложения 4.1 зависит от факта, что мы можем аппроксимировать точки разрыва функции только для двух направлений из T. Эти свойства сохраняются для функции из $HC(B_n)$. Пусть $\lambda \in F$ и $f =< \varphi, \psi >\in HC(B_n)$. Если мы аппроксимируем λ через B_n^+, то $\lim f(x) = \varphi(\lambda)$, а если аппроксимируем λ через B_n^-, то $\lim f(x) = \psi(\lambda)$. Пусть $\jmath\left(C\left(\overline{B_n}\right)\right)$ и $\jmath(HC(B_n))$ будут замкнутыми алгебрами из $\mathfrak{L}\left(h_\omega^2(\partial \mathrm{B}_n, \omega)\right)$, порожденные $\left\{T_\varphi : \varphi \in C\left(\overline{B_n}\right)\right\}$ и $\{T_\varphi : \varphi \in HC(B_n)\}$ соответственно. Для $\lambda \in \partial B_n$ определим замкнутую алгебру τ_λ в $\jmath(HC(B_n))$, порожденную $\left\{T_\varphi : \varphi \in C\left(\overline{B_n}\right); \varphi(\lambda) = 0\right\}$.

Доказательства следующих двух лемм аналогичны следствиям из [13].

Лемма 4.1. i) *Алгебра $\jmath\left(C\left(\overline{B_n}\right)\right)$ неприводима и содержит $K\left(h_\omega^2(B_n)\right)$.*

ii) *$\jmath\left(C\left(\overline{B_n}\right)\right)/K\left(h_\omega^2(B_n)\right)$ - *-изометрично изоморф к $C(\partial B_n)$ и имеет максимальный идеал пространства ∂B_n.*

i i i) *Каждый идеал τ_λ содержит $K\left(h_\omega^2(B_n)\right)$.*

Лемма 4.2. *Пусть $f =< \varphi, \psi >\in HC(B_n)$. Существенный спектр T_φ состоит из $\{\varphi(\lambda) : \lambda \in \partial B_n \backslash \partial F\}$ вместе с замкнутыми прямолинейными отрезками, соединяющими $\varphi(\lambda)$ с $\psi(\lambda)$ для каждого $\lambda \in \partial F$.*

Рассмотрим теперь критерий Фредгольма для операторов Теплица в n-мерном случае. Для этого мы будем использовать численный диапазон операторов. Мы

вычислим также индекс для этих операторов для специальных случаев. Пуст $L^2_N(\mathbf{B}_n,\omega)\left(L^2_N(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$ и $h^2_N(\mathbf{B}_n,\omega)\left(h^2_N(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$ будут пространства векторов столбцов длиной N с элементами, которые принадлежат $L^2(\mathbf{B}_n,\omega)\left(L^2(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$ и $h^2(\mathbf{B}_n,\omega)\left(h^2(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$. Функции из $h^2(\partial\mathbf{B}_n,\omega)$ имеют единственное аналитическое продолжение в $\mathbf{B}_n$ (см. [10]). Соответственно, пусть $L^\infty(\mathbf{B}_n)\,(L^\infty(\partial\mathbf{B}_n))$ будет пространство $N\times N$ матриц с элементами из $L^\infty(\mathbf{B}_n)\,(L^\infty(\partial\mathbf{B}_n))$. Для простоты обозначим через $P\left(\widetilde{P}\right)$ соответственно через $P_N\left(\widetilde{P_N}\right)$ проекцию из $L^2(\mathbf{B}_n,\omega)\left(L^2(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$ на $h^2(\mathbf{B}_n,\omega)\left(h^2(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$ соответственно $L^2_N(\mathbf{B}_n,\omega)$ $\left(L^2_N(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$ на $h^2_N(\mathbf{B}_n,\omega)\left(h^2_N(\partial\mathbf{B}_n,\omega)\right)$.
Много свойств критерия фредгольмовости операторов Теплица можно найти например в [4] и [9].

Определение 4.1. *Пусть A – единичная нормированная алгебра над C. Численный образ $V(A,a)$ в $a\in A$ определяется как*

$$V(A,a)=\{f(a): f\in D(A,1)\},$$

где

$$D(A,1):=\{f\in A^*: f(1_a)=\|f\|=1\}.$$

Приведем некоторые свойства численного образа (см. [5], [6]).

Предложение 4.2. 1. *Для $a,b\in A$ и $\alpha,\beta\in C$ имеем*

i) $V(A,a+b)\subset V(A,a)+V(A,b)$

ii) $V(A,a+b)=\alpha+\beta V(A,a)$

i i i) $V(A,a)$ *есть выпуклый компакт.*

2. *Если B есть подалгебра из A, содержащая единичный элемент, то для каждого $b\in B$ $V(B,b)=V(A,b)$*
3. *Для каждого $a\in A$ имеем $\sigma(a)\subset\{V(A,a)\}$, где $\sigma(a)$ есть спектр элемента a из A.*

Хорошо известно, что если T линейный ограниченный оператор над гильбертовым пространством H, то численный диапазон оператора T называется $W(T)=\{<Tx,x>: x\in H, \|x\|=1\}$. Между этими двумя определениями существует следующая связь.

Лемма 4.3. *(см. [6]) Пусть T – линейный ограниченный оператор над гильбертовым пространством H. Тогда $\overline{W(T)}=V(L(H,T))$.*

Лемма 4.4. *(см. [1]) Пусть A и B суть единичные алгебры, $a \in A$ и $\varphi : LH\{1_A, a\} \to B$ – линейное преобразование такое, что $\|\varphi\| = 1$ и $\varphi(1_A) = 1_B$. Тогда $V(B, \varphi(a)) \subset \{V(A, a)\}$.*

Nам понадобится метод локализации, который можно найти в [9].

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{A}$ есть C^*-алгебра, A есть C^*-алгебра, содержащаяся в центре $\mathfrak{A}$ и имеющая максимальный идеал пространства M_A и для фиксированного $x \in M_A$, τ_x есть замкнутый идеал в A, порожденный через максимальный идеал $\{a \in A : \widehat{a} = 0\}$ в A. Тогда $\cap_{x \in M_A} \tau_x = \{0\}$.*

При этом,

1) Если Φ_x есть канонический эпиморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{A}/\tau_x$, то $\sum\limits_{x \in M_A} \oplus \Phi_x$ есть $*$-мономорфизм из $\mathfrak{A}$ на $\sum\limits_{x \in M_A} \oplus \mathfrak{A}/\tau_x$.

2) T есть обратимый в τ_x тогда и только тогда, когда $\Phi_x(T)$ обратим в $\mathfrak{A}/\tau_x$ для $x \in M_A$.

Определение 4.2. *Для $a \in L^\infty(\partial \mathbf{B}_n)$ существенный образ $R(a)$ состоит из всех матриц $b \in C_{N \times N}$, для которых множество $\{t \in \partial \mathbf{B}_n : |a(t) - b| < \varepsilon\}$ для всех $\varepsilon > 0$ имеет положительную меру.*

Для $A \subset L^\infty_{N \times N}(\partial \mathbf{B}_n)$ пусть $\tau(A)$ будет C^*– под-алгебра, порожденная $\{T_a : a \in A\}$ в $\mathfrak{L}\left(h^2_N(\partial \mathbf{B}_n, \omega)\right)$ $\left(\mathfrak{L}\left(h^2_N(\mathbf{B}_n, \omega)\right)\right)$ и пусть $\mathfrak{K}\left(h^2_N(\partial \mathbf{B}_n, \omega)\right)$ $\left(\mathfrak{K}\left(h^2_N(\mathbf{B}_n, \omega)\right)\right)$ будет идеал компактных операторов в $\mathfrak{L}\left(h^2_N(\partial \mathbf{B}_n, \omega)\right)$ $\left(L\left(h^2_N(\mathbf{B}_n, \omega)\right)\right)$

Пусть $C(\partial \mathbf{B}_n)(C(\mathbf{B}_n))$ – пространство всех непрерывных функций на $\partial \mathbf{B}_n(\mathbf{B}_n)$, а $C_{N \times N}(\partial \mathbf{B}_n)(C_{N \times N}(\mathbf{B}_n))$ – пространство всех $N \times N$ матриц, элементы которых принадлежат $C(\partial \mathbf{B}_n)(C(\mathbf{B}_n))$. В этом случае имеем

$$\mathfrak{A} = \tau\left(L^\infty_{N \times N}(\partial \mathbf{B}_n)\right) / \mathfrak{K}\left(h^2_N(\partial \mathbf{B}_n, \omega)\right)$$

соответственно

$$\mathfrak{A} = \tau\left(L^\infty_{N \times N}(\mathbf{B}_n)\right) / \mathfrak{K}\left(h^2_N(\mathbf{B}_n, \omega)\right)$$

и

$$A = \tau\left(C(\partial \mathbf{B}_n) \cdot I_N\right) / K\left(h^2_N(\partial \mathbf{B}_n, \omega)\right)$$

соответственно

$$A = \tau\left(C(\mathbf{B}_n) \cdot I_N\right) / K\left(h^2_N(\mathbf{B}_n, \omega)\right),$$

где I_N есть $N \times N$ единичная матрица и $C(\partial\mathbf{B}_n)\cdot I_N(C(\mathbf{B}_n)\cdot I_N)$ есть множество всех диагональных матриц, чьи элементы непрерывны. Множество A находится в центре $\mathfrak{A}$ и изоморфно $C(\partial\mathbf{B}_n)(C(\mathbf{B}_n))$, и мы можем локализовать $\mathfrak{A}$ к точкам $\partial\mathbf{B}_n$. В самом деле, для t из $\partial\mathbf{B}_n$ пусть τ_t будет замкнутый идеал в $\mathfrak{A}$, порожденный $\{T_a \in \mathfrak{A} : a \in C(\partial\mathbf{B}_n)\cdot I_N, a(t)=0\}$ и $\mathfrak{A}_t$ будет частная алгебра $\mathfrak{A}/\tau_t$. Пусть Ψ_t будет естественный $*$ -гомеоморфизм из $\tau\left(L^{\infty}_{N\times N}(\partial\mathbf{B}_n)\right)$ на $\mathfrak{A}_t$. Из теоремы 4.1 следует, что оператор Теплица T_a есть оператор Фредгольма тогда и только тогда, когда для всех $t \in \partial\mathbf{B}_n$ $\Psi_t(T)$ есть обратимый в $\mathfrak{A}_t$. Пусть $U_\varepsilon(t)$ – окружность точки t.

Теорема 4.2. *Пусть $a \in L^{\infty}_{NxN}(\overline{\partial B_n})$ такой, что для всех $t \in \partial B_n$ существует обратимая матрица $H_t, G_t \in C_{NxN}$ такая, что $0 \notin \cap_{\varepsilon>0}\overline{W(H_t a G_t\,|_{U_\varepsilon(t)})}$. Тогда T_a есть оператор Фредгольма.*

Доказательство. Пусть $c \in C(\overline{B_n}).I_N$ – непрерывная функция на $\mathbf{B}_n$ с элементами $c_{ii}, i=1,2,...,N$ чьи носители находятся в $U_\varepsilon(t)$ и значение в $\{0,1\}$. Пусть $c_{ii}\equiv 1$ на $U_\varepsilon(t)$ и равна нулю на дополнении $U_\varepsilon(t)$. Для каждого t определим линейное преобразование из $\partial\mathbf{B}_n$: $\Psi^c_t : L^{\infty}_{N\times N}(U_\varepsilon(t)) \to \mathfrak{A}; d \mapsto \Psi_t(T_{cd})$. Так как $\Psi^c_t(1) = \Psi_t(T_c) = \Psi_t(T_{1-(1-c)1}) = \Psi_t(T_1) - \Psi_t(T_{(1-c)1}) = 1$ и $|\Psi^c_d(d)| = |\Psi_t(T_{cd})| \leq |T_{cd}| = |cd| \leq |d|$, то $|\Psi^c_d| = 1$. Из леммы 4.4 следует, что численный диапазон $V(\mathfrak{A}_t, \Psi^c_d(d)) \subset V(L^{\infty}_{N\times N}(U_\varepsilon(t), d))$ и из свойства 4.2 получаем

$$\sigma(\Psi^c_d(d)) \subset V(\mathfrak{A}_t, \Psi^c_d(d)).$$

Тогда существует изометрия $d \mapsto M_d$ между $L^{\infty}_{N\times N}(U_\varepsilon(t)$ и $\mathfrak{L}(L^2_N(U_\varepsilon(t)))$ и из свойства 4.2 следует, что $V(L^{\infty}_{N\times N}(U_\varepsilon(t)) = V(\,\mathfrak{L}(L^2_N(U_\varepsilon(t)), M_d)$. Из леммы 4.3 получаем $V(L^{\infty}_{N\times N}(U_\varepsilon(t)) = \overline{W(d)}$. Так как $0 \notin \cap_{\varepsilon>0}\overline{W(H_t a G_t\,|_{U_\varepsilon(t)})}$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $0 \notin \cap_{\varepsilon>0}\overline{W(H_t a G_t\,|_{U_\varepsilon(t)})}$ и $0 \notin \sigma(\Psi^c_d(H_t a G_t\,|_{U_\varepsilon(t)}))$. Это означает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\Psi^c_d(H_t a G_t\,|_{U_\varepsilon(t)}) = \Psi(T_{cH_t a G_t|_{U_\varepsilon(t)}})$ обратим. Тогда $a = H_t^{-1}H_t a = H_t^{-1}((1-c) + c\chi_{U_\varepsilon(t)} + c\chi_{\partial\mathbf{B}^n\setminus U_\varepsilon(t)})H_t a$ и для Ψ_t имеем $\Psi_t(T_a) = \Psi_t(T_{H_t^{-1}(1-c)H_t a}) + \Psi_t(T_{H_t^{-1}c\chi_{U_\varepsilon(t)}H_t a})$. Так как $T_{1-c}\in\tau_t$, то $T_{H_t^{-1}(1-c)H_t a} = 0$ и

$$H_t^{-1}\Psi^c_t(H_t a G_t\,|_{U_\varepsilon(t)}\,G_t^{-1} = \Psi(T_{H_t^{-1}cH_t a|_{U_\varepsilon(t)}G_t G_t^{-1}}) = \Psi(T_a)$$

– обратимый оператор для всех $t \in \partial\mathbf{B}_n$. □

Оценка для спектра T_φ и выпуклого множества численного диапазона T в гильбертовом пространстве получена в [22]. Остаются ли в силе эти свойства для многомерного пространства типа Бергмана-Джрбашяна, нуждается в изучении.

Основной результат для индекса операторов Фредгольма в многомерном случае пространства типа Бергмана-Джрбашяна в единичном шаре был получен в [21]. К сожалению, мы не смогли обобщить этот результат для $\mathbf{R}^n$ для гармонических функций. Поэтому мы вычислим индекс операторов Фредгольма при $n = 2$.

Лемма 4.5. *Пусть K – комплексное множество из C, а U – открытое множество из K. Для $a \in L^\infty_{N\times N}(U)$ и $b \in R(a)$ справедливо следующее включение:*

$$\overline{W(b)} \subset \overline{W(a)}.$$

Доказательство. Пусть $y \in \overline{W(b)}$ – произвольный элемент. Тогда для всех $\delta > 0$ существует $x \in C_N$ с $|x| = 1$ такое, что $|\langle bx, x\rangle - y| = |\langle (b-y)x, x\rangle| < \delta$. Так как b принадлежит $R(a)$, множество $\{t \in U : |a(t) - b| < \delta\}$ имеет положительную меру. Множество матриц, для которых $|\langle (c-y)x, x\rangle| < \delta$ является открытой окрестностью для b и множество

$$A := \{t \in U : |\langle (a(t) - y)x, x\rangle| < \delta\}$$

имеет положительную меру. Определим f из $L^2_N(U)$ так, что $f(t) := \frac{\chi_A(t)}{\sqrt{\mu(A)}}$ для $t \in U$. Ясно также, что $|f| = 1$. Тогда

$$|\langle (a-y)f, f\rangle_{L^2_N(U)}| = |\int_U \langle (a(t)-y)f(t), f(t)\rangle d\mu(t)|$$

$$= |\int_A \langle (a(t)-y)\chi, \chi\rangle \frac{1}{\mu(A)} |d\mu(t) \le \sup_{t\in A} |\langle (a(t)-y)\chi, \chi\rangle| \le \delta,$$

и y принадлежит $\overline{W(a)}$. □

Abstract. The paper considers weighted spaces of harmonic functions. Having lower and upper bounds for the equivalent kernels of such spaces we consider Toeplitz and Hankel operators with different symbols. The Fredholm criterion for these operators on some compact is also studied.

Список литературы

[1] E. Albrecht, "Several variable spectral theory in the noncommutative case", Banach Center Publications, **8**, 9 – 30 (1982).

[2] O. E. Antonenkova, F. A. Shamoian, "Cauchy tranformation for the linear continuous functionals and projections in the weighted spaces of analytic functions", Sibirsk. Math. Zh., **46**, no. 6, 1207 – 1234 (2005).

[3] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, Harmonic Function Theory, Springer-Verlag, New York (1992).

[4] A. Böttcher, B. Silbermann, Analysis of Teoplitz Operators, Springer-Verlag (1990).

[5] F. Bonsall, J. Duncan, Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements Normed Algebras, Cambridge University Press, (1971).

[6] F. Bonsall, J. Duncan, Numerical Ranges 2, Cambridge University Press, (1973).

[7] R. R. Coifman, R. Rochberg, "Representation theorems for holomorphic and harmonic functions in L^p", Astérisque **77**, 11 – 66 (1980).

[8] A. E. Djrbashian, F. A. Shamoian, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner -Texte zur Mathematik, Band, **105**, Leipzig (1993).

[9] R. G. Douglas, Banach Algebra Techniques in Operator Theory, New York (1972).

[10] R. G. Douglas, Banachalgebra Techniques in the Theory of Toeplitz operators, CBMS 15, Amer. Math. Soc., Providence, (1973).

[11] H. Hedelmalm, B. Korenblum, K.Zhu, Theory of Bergman Spaces, Graduate Texts in Mathematics, **199**, Springer, New York-Berlin-Heidelberg (2000).

[12] M. Javović, "Compact Hankel operators on harmonic Bergman spaces", Integral Equations and Operator Theory, **27**, 426 – 438 (1997).

[13] G. McDonald, "Toeplitz operators on the ball with piecewise continuous symbol", Illinois Journal of Math., **23**, no. 2, 286 – 284 (1979).

[14] J. Miao, "Toeplitz operators on harmonic Bergman spaces", Integral Equations and Operator Theory, **27**, 426 – 438 (1997).

[15] J.Miao, "Reproducting kernels for harmonic Bergman spaces of unit ball", Monatshefte für Mathematik, **125**, 25 – 35 (1998).

[16] F. A. Shamoian, "Diagonal mapping and problems of representation in weighted spaces of fuctions that are holomorphic in a polydisk" [in Russian], Sibirsk. Math.Zh., **31**, no. 2, 197-215 (1990). Translation in Siberian Math.J., **31**, no. 2, 350 – 365 (1990).

[17] E. Seneta, Regularly Varying Functions, Lecture Notes in Mathematics 508, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1976).

[18] F. A. Shamoian and M. A. Zakaryan, "Some problems of representation in weighted spaces of functions harmonic in a ball", Dokl. Akad. Nauk Armenii, **94**, no. 4, 210 – 216 (1993).

[19] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Uni. Press, Princeton, NJ (1970).

[20] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Eucliean Spaces, Princeton Uni. Press,Princeton, NJ (1971).

[21] U. Venugopalkrishna, "Fredholm operators associated with strongly pseudocoelomates domains in C^n", J.Functional Analysis, **9**, 345 – 373 (1972).

[22] T. H. Wolff, Counterexamples to two variants of the Helson-Szegò Theorem, California Inst. of Technology, Report N. 11, Pasadena (1983).

Поступила 24 октября 2011