*Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 4, 2013, стр. 13-26.*

# ОБ ОБРАТИМЫХ АЛГЕБРАХ ЛИНЕЙНЫХ НАД АБЕЛЕВОЙ ГРУППОЙ

С. С. ДАВИДОВ

Ереванский государственный университет
E-mail: *davidov@ysu.am*

**Аннотация.** В работе с помощью формул второго порядка, а именно $\forall\exists(\forall)$–тождеств, характеризуются некоторые классы обратимых алгебр линейных над абелевой группой, имеющие ограничения на используемые автоморфизмы соответствующей группы.

**MSC2010 number: 20N05.**

**Ключевые слова:** квазигруппа; обратимая алгебра; линейная алгебра; обратимая Т-алгебра; формула второго порядка; сверхтождество.

## 1. Введение

При рассмотрении вопросов, связанных с многообразиями, квазигруппы представляют как алгебры с тремя операциями [1], добавляя к основной операции еще две дополнительные операции. Если основная операция является умножением $(\cdot)$, то остальные две операции называют правым и левым делением. Если операция квазигруппы обозначена через $A$, то правая и левая обратные операции обозначаются соответственно через $A^{-1}$ и ${}^{-1}A$.

Квазигруппа $(Q;\cdot)$ называется изотопной квазигруппе $(Q;\circ)$, если существует такая тройка подстановок $T=(\alpha,\beta,\gamma)$ на множестве $Q$, что выполняется соотношение $\gamma(x\circ y)=\alpha x\cdot\beta y$. В классе квазигрупп, изотопных группам, представляют интерес линейные квазигруппы введенные В. Д. Белоусовым [2] в связи с исследованием уравновешенных тождеств в квазигруппах. Квазигруппа $(Q;\cdot)$ называется линейной над группой $(Q;+)$, если она имеет вид

$$x\cdot y=\varphi x+c+\psi y, \tag{1.1}$$

где $\varphi,\psi\in Aut(Q;+), c-$ фиксированный элемент из $Q$.

Важный класс линейных квазигрупп составляют Т-квазигруппы. Согласно [3] Т-квазигруппа- это квазигруппа с соотношением (1.1), где $(Q;+)$– абелева группа. Г. Б. Белявской и А. Х. Табаровым доказано, что (примитивные) Т-квазигруппы составляют многообразие [4,5].

Бинарная алгебра $(Q;\Sigma)$ называется обратимой алгеброй, если каждая ее операция $A \in \Sigma$ является квазигруппой (обратимой). В работе [6], по аналогии с линейными квазигруппами введено понятие линейной обратимой алгебры и обратимой Т-алгебры, а также дана их характеризация с помощью формул второго порядка.

Разными авторами изучались подклассы линейных квазигрупп с ограничениями на изотопные им группы и на используемые автоморфизмы и антиавтоморфизмы. Например, Т-квазигруппы, медиальные, парамедиальные квазигруппы и т.д. рассматривались многими авторами(см. [7-13]).

В настоящей работе с помощью формул второго порядка, а именно $\forall\exists(\forall)$– тождеств, характеризуются некоторые классы обратимых Т-алгебр имеющие ограничения на используемые автоморфизмы соответствующей группы. Полученные результаты являются обобщением результатов статьи [13] для некоторых классов обратимых Т-алгебр и при их доказательстве используются некоторые методы данной работы.

## 2. Характеризация $T$-алгебр

Напомним [1], что квазиавтоморфизм (антиквазиавтоморфизм) квазигруппы $(Q;\cdot)$ это главная компонента $\gamma$ автотопии (антиавтотопии) $T = (\alpha,\beta,\gamma)$ квазигруппы $(Q;\cdot)$, т.е. $\gamma(x\cdot y) = \alpha x \cdot \beta y$ ($\gamma(x\cdot y) = \alpha y \cdot \beta x$). Согласно лемме 2.5 [1], любой квазиавтоморфизм группы $(Q;+)$ имеет вид

$$\gamma x = R_s\gamma_0 x = L_s\gamma_0' x, \tag{2.1}$$

где $\gamma_0$, $\gamma_0'$– автоморфизмы группы $(Q;+)$, $R_s x = x+s$, $L_s x = s+x$. Как отмечено в [2], утверждение, аналогичное лемме 2.5 [1], справедливо и для антиквазиавтоморфизма $\gamma$. В этом случае $\gamma_0$ и $\gamma_0'$ из (2.1) являются антиавтоморфизмами группы $(Q;+)$.

Хорошо известно [1], что с каждой квазигруппой $A$ связаны следующие пять квазигрупп:

$$A^{-1},\ {}^{-1}A,\ {}^{-1}(A^{-1}),\ ({}^{-1}A)^{-1}\ A^*,$$

где $A^*(x,y) = A(y,x)$. Других обратных операций для $A$ не существует. Таким образом, с каждой обратимой алгеброй $(Q;\Sigma)$ связаны следующие пять обратимых алгебр:

$$(Q;\Sigma^{-1}),\quad (Q;{}^{-1}\Sigma),\quad (Q;{}^{-1}(\Sigma^{-1})),\quad (Q;({}^{-1}\Sigma)^{-1}),\quad (Q;\Sigma^*),$$

где $\Sigma^{-1} = \{A^{-1}|A \in \Sigma\}$, ${}^{-1}\Sigma = \{{}^{-1}A|A \in \Sigma\}$, ${}^{-1}(\Sigma^{-1}) = \{{}^{-1}(A^{-1})|A \in \Sigma\}$, $({}^{-1}\Sigma)^{-1} = \{({}^{-1}A)^{-1}|A \in \Sigma\}$, $\Sigma^* = \{A^*|A \in \Sigma\}$. Каждая из этих алгебр называется парастрофом исходной алгебры.

Для $A \in \Sigma$ и $a \in Q$ обозначим через $L_{A,a}$ $(R_{A,a})$ левую (правую) трансляцию алгебры $(Q;\Sigma)$, т.е. отображение $L_{A,a} : x \to A(a,x)$ $(R_{A,a} : x \to A(x,a))$.

**Определение 2.1.** [6]. *Обратимая алгебра $(Q;\Sigma)$ называется T-алгеброй, если каждая ее операция $A \in \Sigma$ изотопна одной и той же абелевой группе $(Q;+)$, причем изотопия имеет вид*

$$A(x,y) = \varphi_A x + c_A + \psi_A y, \tag{2.2}$$

*где $\varphi_A$, $\psi_A$– автоморфизмы группы $(Q;+)$, $c_A$– фиксированный элемент $Q$.*

**Теорема 2.1.** *Для обратимой алгебры $(Q;\Sigma)$ следующие условия эквивалентны:*

*1) $(Q;\Sigma)$– обратимая T-алгебра, причем для всех $X,Y \in \Sigma$,*
$\varphi_X\psi_Y\varphi_Y^{-1} = \psi_X\varphi_Y^{-1}\psi_Y$;

*2) Для всех $X,Y \in \Sigma$, в алгебре $(Q;\Sigma\cup\ {}^{-1}\Sigma)$, выполняется следующая формула второго порядка:*

$$X(Y(x,\ {}^{-1}Y(y,u)),z) = X(Y(x,\ {}^{-1}Y(u,u)),\ {}^{-1}Y(Y(z,y),u)). \tag{2.3}$$

*Доказательство.* 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $(Q;\Sigma)$– обратимая T-алгебра с условием $\varphi_X\psi_Y\varphi_Y^{-1} = \psi_X\varphi_Y^{-1}\psi_Y$ для всех $X,Y \in \Sigma$. Прежде всего заметим, что из (2.2) следует, что

$$X^{-1}(x,y) = -\psi_X^{-1}\varphi_X x - \psi_X^{-1}c_X + \psi_X^{-1}y,$$

$${}^{-1}X(x,y) = \varphi_X^{-1}x - \varphi_X^{-1}c_X - \varphi_X^{-1}\psi_X y.$$

Тогда, $X(Y(x, {}^{-1}Y(y,u)), z) =$

$$= \varphi_X\varphi_Y x + \varphi_X c_Y + \varphi_X\psi_Y(\varphi_Y^{-1}y - \varphi_Y^{-1}c_Y - \varphi_Y^{-1}\psi_Y u) + c_X + \psi_X z =$$

$$= \varphi_X\varphi_Y x + \varphi_X c_Y + \varphi_X\psi_Y\varphi_Y^{-1}y - \varphi_X\psi_Y\varphi_Y^{-1}c_Y - \varphi_X\psi_Y\varphi_Y^{-1}\psi_Y u + c_X + \psi_X z;$$

$$X(Y(x, {}^{-1}Y(u,u)), {}^{-1}Y(Y(z,y),u)) = \varphi_X Y(x, {}^{-1}Y(u,u)) + c_X + \psi_X^{-1}Y(Y(z,y),u) =$$

$$= \varphi_X(\varphi_Y x + c_Y + \psi_Y(\varphi_Y^{-1}u - \varphi_Y^{-1}c_Y - \varphi_Y^{-1}\psi_Y u)) + c_X + \psi_X(\varphi_Y^{-1}(\varphi_Y z + c_Y +$$

$$\psi_Y y) - \varphi_Y^{-1}c_Y - \varphi_Y^{-1}\psi_Y u) = \varphi_X\varphi_Y x + \varphi_X c_Y - \varphi_X\psi_Y\varphi_Y^{-1}c_Y - \varphi_X\psi_Y\varphi_Y^{-1}\psi_Y u +$$

$$+ c_X + \psi_X z + \psi_X\varphi_Y^{-1}\psi_Y y.$$

Следовательно, формула (2.3) выполняется в алгебре $(Q; \Sigma \cup {}^{-1}\Sigma)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть в обратимой алгебре $(Q; \Sigma \cup {}^{-1}\Sigma)$ выполняется формула (2.3). Фиксируем в (2.3) элемент $u$ и операции $X = A$, $Y = B$, где $A, B \in \Sigma$, тогда получим:

$$A_1(A_2(x,y), z) = A_3(x, A_4(y,z)),$$

где $A_1(x,y) = A(x,y)$, $A_2(x,y) = B(x, {}^{-1}B(y,u))$, $A_3(x,y) = A(B(x, {}^{-1}B(u,u)), y)$, $A_4(x,y) = {}^{-1}B(B(y,x),u)$.

Из последнего равенства, по теореме Белоусова о четырех квазигруппах, связанных ассоциативным законом [2], каждая операция $A_i (i = 1,2,3,4)$ изотопна одной и той же группе. Следовательно, операции $A$ и $B$ изотопны одной и той же груше и поскольку эти операции произвольны, то любая операция из $\Sigma$ изотопна одной и той же группе $(Q; *)$.

Для каждого $X \in \Sigma$ определим операции:

$$x \underset{X}{+} y = X(R_{X,a}^{-1}x, L_{X,b}^{-1}y), \tag{2.4}$$

где $a$ и $b$ некоторые элементы из $Q$. Эти операции- лупы с единичным элементом $0_X = X(b,a)$ [1,теорема 1.3], и они изотопны группе $(Q; *)$, поэтому согласно теореме Алберта [1, теорема 1.4], операции $\underset{X}{+}$ являются группами для всех $X \in \Sigma$.

Перейдем в (2.3) к операциям $\underset{X}{+}$:

$$R_{X,a}(R_{Y,a}x \underset{Y}{+} L_{Y,b}^{-1}Y(y,u)) \underset{X}{+} L_{X,b}z =$$

$$= R_{X,a}(R_{Y,a}x \underset{Y}{+} L_{Y,b}^{-1}Y(u,u)) \underset{X}{+} L_{X,b}({}^{-1}Y(R_{Y,a}z \underset{Y}{+} L_{Y,b}y, u)),$$

$$R_{X,a}(x \underset{Y}{+} L^{-1}_{Y,b}Y(Y(y,u),u)) \underset{X}{+} z =$$
$$= R_{X,a}(x \underset{Y}{+} L^{-1}_{Y,b}Y(u,u)) \underset{X}{+} L_{X,b}R^{-1}_{Y,u}(R_{Y,a}L^{-1}_{X,b}z \underset{Y}{+} L_{Y,b}R_{Y,u}y).$$

Взяв в последнем равенстве $z = 0_X$ и фиксируя элемент $u$, получаем

$$R_{X,a}(x \underset{Y}{+} L_{Y,b}y) = R_{X,a}(x \underset{Y}{+} L^{-1}_{Y,b}Y(u,u)) \underset{X}{+} L_{X,b}R^{-1}_{Y,u}(R_{Y,a}a \underset{Y}{+} L_{Y,b}R_{Y,u}y),$$

или

(2.5) $$R_{X,a}(x \underset{Y}{+} y) = \alpha_{X,Y}x \underset{X}{+} \beta_{X,Y}y,$$

где $\alpha_{X,Y}$ и $\beta_{X,Y}$ подстановки множества $Q$. Так как операции $X$ и $Y$ произвольны, мы можем в (2.5) взять $X = Y$, получим:

(2.6) $$R_{X,a}(x \underset{X}{+} y) = \alpha_{X,X}x \underset{X}{+} \beta_{X,X}y.$$

Из (2.5) и (2.6) имеем:

$$x \underset{X}{+} y = R_{X,a}(\alpha^{-1}_{X,Y}x \underset{Y}{+} \beta^{-1}_{X,Y}y),$$
$$x \underset{X}{+} y = R_{X,a}(\alpha^{-1}_{X,X}x \underset{X}{+} \beta^{-1}_{X,X}y),$$
$$\alpha^{-1}_{X,X}x \underset{X}{+} \beta_{X,X}y = \alpha^{-1}_{X,Y}x \underset{Y}{+} \beta^{-1}_{X,Y}y,$$

таким образом получаем

(2.7) $$x \underset{X}{+} y = \gamma_{X,Y}x \underset{Y}{+} \delta_{X,Y}y,$$

где $\gamma_{X,Y} = \alpha^{-1}_{X,Y}\alpha_{X,X}$ и $\delta_{X,Y} = \beta^{-1}_{X,Y}\beta_{X,X}$ подстановки множества $Q$. Следовательно, из (2.5) и (2.6) имеем

$$R_{X,a}(x \underset{Y}{+} y) = \gamma_{X,Y}\alpha_{X,Y}x \underset{Y}{+} \delta_{X,Y}\beta_{X,Y}y,$$

т.е. $R_{X,a}$– квазиавтоморфизм группы $(Q; \underset{Y}{+})$. Поскольку операции $X, Y$– произвольны, то для любой операции $X \in \Sigma$, $R_{X,a}$ будет квазиавтоморфизмом каждой из групп $(Q; \underset{Y}{+})$, где $Y \in \Sigma$.

Зафиксируем операцию $\underset{B}{+}$ для некоторого $B \in \Sigma$ и в дальнейшем будем обозначать ее через $+$. Согласно (2.4), для операций $A \in \Sigma$, имеем:

$$A(x,y) = R_{A,a}x \underset{A}{+} L_{A,b}y.$$

Из последнего равенства, согласно (2.7), получим:

(2.8) $$A(x,y) = \theta_1^{A,B}x + \theta_2^{A,B}y,$$

где $\theta_1^{A,B}=\gamma_{A,B}R_{A,a}$ и $\theta_2^{A,B}=\delta_{A,B}L_{A,b}$ подстановки множества $Q$.

Покажем, что $\theta_1^{A,B}$– квазиавтоморфизм группы $(Q;+)$. Для этого, представим формулу (2.3) в следующем виде:

$$A(B(x,y),z)=A(B(x,{}^{-1}B(u,u)),{}^{-1}B(B(z,B(y,u)),u)). \tag{2.9}$$

Зафиксируем в (2.9) переменные $z=c,\ u=d$ и перепишем его с использованием операции $+$ :

$$\theta_1^{A,B}(R_{B,a}x+L_{B,b}y)+\theta_2^{A,B}c=\theta_1^{A,B}B(x,{}^{-1}B(d,d))+\theta_2^{A,B}\ {}^{-1}B(B(c,B(y,d)),d),$$

$$\theta_1^{A,B}(x+y)=\theta_1^{A,B}B(x,\ {}^{-1}B(d,d))+\theta_2^{A,B}\ {}^{-1}B(B(c,B(L_{B,b}^{-1}y,d)),d)-\theta_2^{A,B}c.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\theta_1^{A,B}(x+y)=\sigma_{A,B}x+\mu_{A,B}y,$$

где $\sigma_{A,B}$ и $\mu_{A,B}$ подстановки множества $Q$, следовательно $\theta_1^{A,B}$– квазиавтоморфизм группы $(Q;+)$.

Докажем теперь, что $\theta_2^{A,B}$– антиквазиавтоморфизм группы $(Q;+)$. Для этого, вновь перепишем формулу (2.9) в терминах операции $+$, получим:

$$\theta_1^{A,B}(R_{B,a}x+L_{B,b}y)+\theta_2^{A,B}z=\theta_1^{A,B}B(x,\ {}^{-1}B(u,u))+\theta_2^{A,B}\ {}^{-1}B(B(z,B(y,u)),u),$$

$$\theta_1^{A,B}(R_{B,a}x+L_{B,b}y)+z=\theta_1^{A,B}(R_{B,a}x+L_{B,b}^{-1}B(u,u))+\theta_2^{A,B}R_{B,u}^{-1}(R_{B,a}(\theta_2^{A,B})^{-1}z+ L_{B,b}R_{B,u}y).$$

В последнем равенстве возьмем $u=a$ и выберем $x$ таким образом, чтобы $\theta_1^{A,B}(R_{B,a}x+ L_{B,b}^{-1}B(a,a))=0$, тогда получим:

$$\alpha_{A,B}y+z=\theta_2^{A,B}R_{B,a}^{-1}(R_{B,a}(\theta_2^{A,B})^{-1}z+L_{B,b}R_{B,a}y),$$

где $\alpha_{A,B}$– подстановка множества $Q$, поэтому $\theta_2^{A,B}R_{B,a}^{-1}$– антиквазиавтоморфизм группы $(Q;+)$ и следовательно $\theta_2^{A,B}$ будет антиквазиавтоморфизмом, поскольку $R_{B,a}$– квазиавтоморфизм. Таким образом имеем:

$$\theta_1^{A,B}x=\varphi_Ax+k_A,$$

$$\theta_2^{A,B}x=t_A+\overline{\psi}_Ax,$$

где $\varphi_A$– автоморфизм, а $\overline{\psi}_A$– антиавтоморфизм группы $(Q;+)$ и $k_A$, $t_A \in Q$. Поэтому из (2.8) получаем

$$A(x,y) = \varphi_A x + c_A + \overline{\psi}_A y, \tag{2.10}$$

где $c_A = k_A + t_A$. Поскольку операция $A$ произвольна, получаем, что все операции из $\Sigma$ могут быть представлены в виде (2.10) с помощью операции $+$. Перепишем формулу (2.9) в терминах операции $+$ с использованием равенства (2.10):

$$A(B(x,y),z) = \varphi_A\varphi_B x + \varphi_A c_B + \varphi_A\overline{\psi}_B y + c_A + \overline{\psi}_A z,$$

$$A(B(x,\ {}^{-1}B(u,u)),\ {}^{-1}B(B(z,B(y,u)),u)) = \varphi_A\varphi_B x + \varphi_A c_B - \varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}c_B -$$
$$-\varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B u + \varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}u + c_A - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B u + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\varphi_B y +$$
$$+\overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B c_B + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\overline{\psi}_B u + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B + \overline{\psi}_A z,$$

таким образом

$$\varphi_A\overline{\psi}_B y + c_A = -\varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}c_B - \varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B u + \varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}u + c_A - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B -$$
$$-\overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B u + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\varphi_B y + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B c_B + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\overline{\psi}_B u + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B.$$

Возьмем в последнем равенстве $u = 0$, получим:

$$\varphi_A\overline{\psi}_B y + c_A = -\varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}c_B + c_A - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\varphi_B y + \tag{2.11}$$
$$+\overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B c_B + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B.$$

Положим в (2.11) $y = 0$, получим

$$c_A = -\varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}c_B + c_A - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B c_B + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B. \tag{2.12}$$

Подставляя (2.12) в (2.11) получаем:

$$\varphi_A\overline{\psi}_B y - \varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}c_B + c_A - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B =$$
$$= -\varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}c_B + c_A - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\varphi_B y.$$

Пусть, $-\varphi_A\overline{\psi}_B\varphi_B^{-1}c_B + c_A - \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}c_B = p$, тогда

$$\varphi_A\overline{\psi}_B y + p = p + \overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\varphi_B y,$$

или

$$\widetilde{R}_p\varphi_A\overline{\psi}_B y = \widetilde{L}_p\overline{\psi}_A\varphi_B^{-1}\overline{\psi}_B\varphi_B y, \tag{2.13}$$

где $\widetilde{R}_p x = x + p$, $\widetilde{L}_p x = p + x$. Из (2.13) имеем

$$\widetilde{L}_p^{-1}\widetilde{R}_p y = \overline{\psi}_A \varphi_B^{-1} \overline{\psi}_B \varphi_B \overline{\psi_B}^{-1} \varphi_A^{-1} y,$$

поэтому $\widetilde{L}_p^{-1}\widetilde{R}_p$– антиавтоморфизм группы $(Q;+)$. Следовательно,

$$\widetilde{L}_p^{-1}\widetilde{R}_p(x+y) = \widetilde{L}_p^{-1}\widetilde{R}_p y + \widetilde{L}_p^{-1}\widetilde{R}_p x,$$

или

$$-p + x + y + p = -p + y + p - p + x + p,$$

поэтому $x + y = y + x$, т.е. группа $(Q;+)$– абелева группа. Поэтому $\overline{\psi}_A = \psi_A \in Aut(Q;+)$ и $\widetilde{L}_x = \widetilde{R}_x$ для всех $x \in Q$. Из (2.13) получаем:

$$\varphi_A \psi_B \varphi_B^{-1} = \psi_A \varphi_B^{-1} \psi_B.$$

□

Следующие утверждения доказываются аналогично.

**Предложение 2.1.** *Для обратимой алгебры $(Q;\Sigma)$ следующие условия эквивалентны:*

*1) $(Q;\Sigma)$– обратимая $T$-алгебра, причем для всех $X, Y \in \Sigma$ имеем $\varphi_X \psi_Y \varphi_X^{-1} = \psi_X \varphi_X^{-1} \psi_X$;*

*2) Для всех $X, Y \in \Sigma$ в обратимой алгебре $(Q; \Sigma \cup {}^{-1}\Sigma)$ выполняется следующая формула второго порядка:*

$$X(Y(x, {}^{-1}X(y,u)), z) = X(Y(x, {}^{-1}X(u,u)), {}^{-1}X(X(z,y),u)).$$

**Предложение 2.2.** *Для обратимой алгебры $(Q;\Sigma)$ следующие условия эквивалентны:*

*1) $(Q;\Sigma)$ обратимая $T$-алгебра, причем для всех $X, Y \in \Sigma$ имеем $\varphi_X \psi_Y \varphi_X^{-1} = \psi_X \varphi_Y^{-1} \psi_Y$;*

*2) Для всех $X, Y \in \Sigma$ в обратимой алгебре $(Q; \Sigma \cup {}^{-1}\Sigma)$ выполняется следующая формула второго порядка:*

$$X(Y(x, {}^{-1}X(y,u)), z) = X(Y(x, {}^{-1}X(u,u)), {}^{-1}Y(Y(z,y),u)).$$

**Предложение 2.3.** *Для обратимой алгебры $(Q;\Sigma)$ следующие условия эквивалентны:*

*1)* $(Q;\Sigma)$ *обратимая Т-алгебра, причем для всех* $X,Y\in\Sigma$, $\varphi_X\psi_X^{-1}\varphi_X=\psi_X\varphi_Y\psi_X^{-1}$;

*2) Для всех* $X,Y\in\Sigma$ *в обратимой алгебре* $(Q;\Sigma\cup\Sigma^{-1})$ *выполняется следующая формула второго порядка:*

$$X(x,Y(X^{-1}(u,y),z))=X(X^{-1}(u,X(y,x)),Y(X^{-1}(u,u),z)).$$

**Предложение 2.4.** *Для обратимой алгебры* $(Q;\Sigma)$ *следующие условия эквивалентны:*

*1)* $(Q;\Sigma)$ *обратимая Т-алгебра, причем для всех* $X,Y\in\Sigma$ *имеем* $\psi_X\varphi_Y\psi_X^{-1}=\varphi_X\psi_Y^{-1}\varphi_Y$;

*2) Для всех* $X,Y\in\Sigma$ *в обратимой алгебре* $(Q;\Sigma\cup\Sigma^{-1})$ *выполняется следующая формула второго порядка:*

$$X(x,Y(X^{-1}(u,y),z))=X(Y^{-1}(u,Y(y,x)),Y(X^{-1}(u,u),z)).$$

**Предложение 2.5.** *Для обратимой алгебры* $(Q;\Sigma)$ *следующие условия эквивалентны:*

*1)* $(Q;\Sigma)$ *обратимая Т-алгебра, причем для всех* $X,Y\in\Sigma$ *имеем* $\psi_X\varphi_Y\psi_Y^{-1}=\varphi_X\psi_Y^{-1}\varphi_Y$;

*2) Для всех* $X,Y\in\Sigma$ *в обратимой алгебре* $(Q;\Sigma\cup\Sigma^{-1})$ *выполняется следующая формула второго порядка:*

$$X(x,Y(Y^{-1}(u,y),z))=X(Y^{-1}(u,Y(y,x)),Y(Y^{-1}(u,u),z)).$$

Приведем примеры обратимых Т-алгебр с ограничениями на автоморфизмы соответствующей группы для каждого случая (Теорема 2.1 и Предложения 2.2–2.6). Рассмотрим четверную группу Клейна $K_4=\{0,1,2,3\}$. Как известно, ее группа автоморфизмов изоморфна группе $S_3$. Обозначим автоморфизмы группы $K_4(\cdot)$: $\varphi_1=\epsilon$, $\varphi_2=(12)$, $\varphi_3=(23)$, $\varphi_4=(13)$, $\varphi_5=(132)$, $\varphi_6=(123)$. Пусть $A_{i,j}(x,y)=\varphi_i x\cdot\varphi_j y$, $i,j=1,2,...,6$. Тогда, Т-алгебры $(K_4;\{A_{4,3},A_{3,2}\})$ и $(K_4;\{A_{1,1},A_{5,5},A_{6,6}\})$ - удовлетворяют теореме 2.1; $(K_4;\{A_{2,4},A_{3,4}\})$ - предложению 2.2; $(K_4;\{A_{2,4},A_{3,3}\})$ - предложению 2.3; $(K_4;\{A_{2,3},A_{2,4}\})$ - предложению 2.4; $(K_4;\{A_{2,3},A_{4,4}\})$ - предложению 2.5; $(K_4;\{A_{3,4},A_{2,3}\})$ - предложению 2.6.

## 3. $T$-АЛГЕБРЫ И СВЕРХТОЖДЕСТВА

В данном параграфе приведем другие условия на автоморфизмы, приводящие к некоторым классам обратимых Т-алгебр, связанных с известными сверхтождествами:

$$X(x, Y(y,x)) = X(Y(y,x), y), \tag{3.1}$$

$$X(x, Y(y,x)) = Y(X(y,x), y), \tag{3.2}$$

$$X(Y(x,y), Y(y,x)) = y, \tag{3.3}$$

$$X(x, Y(x,y)) = X(Y(x,y), y), \tag{3.4}$$

$$X(x, Y(x,y)) = Y(X(x,y), y), \tag{3.5}$$

$$X(Y(x,y), Y(y,x)) = x. \tag{3.6}$$

Первые три сверхтождества называются сверхтождествами Стейна, другие три- сверхтождествами Шредера. Отметим, что в работе [14] В. Д. Белоусовым подробно исследованы квазигруппы с соответствующими тождествами Стейна и Шредера. Следующие две леммы очевидны.

**Лемма 3.1.** *Если в обратимой алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняется одно из сверхтождеств (3.1) – (3.5), то алгебра $(Q;\Sigma)$– идемпотентна.*

**Лемма 3.2.** *Пусть $(Q;\Sigma)$ идемпотентная обратимая $T$-алгебра. Тогда, для любого $X \in \Sigma$, $c_X = 0$ и $\varphi_X + \psi_X = \varepsilon$, где $\varepsilon$– тождественная подстановка множества $Q$.*

**Предложение 3.1.** *Для обратимой $T$-алгебры $(Q;\Sigma)$ следующие условия эквивалентны:*

*1) Обратимая алгебра $(Q;\Sigma)$ имеет вид*

$$X(x,y) = \varphi_X x + \psi_X y,$$

*где $\varphi_X + \psi_X\psi_Y = \varphi_X\psi_Y$, $\varphi_X\varphi_Y + \psi_X = \psi_X\varphi_Y$ для всех $X, Y \in \Sigma$;*

*2) В обратимой алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняется сверхтождество Стейна (3.1).*

*Доказательство.* 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть в обратимой T-алгебре верно сверхтождество (3.1). Тогда, согласно лемме 3.1, $(Q;\Sigma)$ идемпотентная, а из леммы 3.2 следует, что $c_X = 0$ для всех $X \in \Sigma$. Учитывая это, переходим в сверхтождестве (3.1) к операции $+$, получим:

$$X(x, Y(y,x)) = \varphi_X x + \psi_X(\varphi_Y y + \psi_Y x) = \varphi_X x + \psi_X\varphi_Y y + \psi_X\psi_Y x,$$

$$X(Y(y,x), y) = \varphi_X(\varphi_Y y + \psi_Y x) + \psi_X y = \varphi_X\varphi_Y y + \varphi_X\psi_Y x + \psi_X y,$$

или

$$\varphi_X x + \psi_X\varphi_Y y + \psi_X\psi_Y x = \varphi_X\varphi_Y y + \varphi_X\psi_Y x + \psi_x y. \tag{3.7}$$

Пусть $x = 0$, тогда

$$\psi_X\varphi_Y y = \varphi_X\varphi_Y y + \psi_X y, \ \varphi_X\varphi_Y + \psi_X = \psi_X\varphi_Y.$$

Положим в (3.7) $y = 0:$

$$\varphi_X x + \psi_X\psi_Y x = \varphi_X\psi_Y x, \ \varphi_X + \psi_X\psi_Y = \varphi_X\psi_Y.$$

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) легко проверяется. □

**Предложение 3.2.** *Для обратимой T-алгебры $(Q;\Sigma)$ следующие условия эквивалентны:*

*1) Обратимая алгебра $(Q;\Sigma)$ имеет вид*

$$X(x,y) = \varphi_X x + \psi_X y,$$

*где $\varphi_X + \psi_X\psi_Y = \varphi_Y\psi_X$, $\psi_Y + \varphi_Y\varphi_X = \psi_X\varphi_Y$ для всех $X, Y \in \Sigma$;*

*2) В обратимой алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняется сверхтождество Стейна (3.2).*

*Доказательство.* Аналогично предложению 2.3. □

**Предложение 3.3.** *Для обратимой T-алгебры $(Q;\Sigma)$ следующие условия эквивалентны:*

*1) Обратимая алгебра $(Q;\Sigma)$ имеет вид*

$$X(x,y) = \varphi_X x + \psi_X y + c_X,$$

*где* $\varphi_X c_Y + \psi_X c_Y + c_X = 0$, $\varphi_X\psi_Y + \psi_X\varphi_Y = \varepsilon$, $\varphi_X\varphi_Y = J\psi_X\psi_Y$ $(Jx = -x)$ *для всех* $X, Y \in \Sigma$;

*2) В обратимой алгебре* $(Q;\Sigma)$ *выполняется сверхтождество Стейна (3.3).*

*Доказательство.* 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $(Q;\Sigma)$ обратимая T-алгебра со сверхтождеством Стейна (3.3). Следовательно,

$$X(Y(x,y),Y(y,x)) = \varphi_X(\varphi_Y x + \psi_Y y + c_Y) + \psi_X(\varphi_Y y + \psi_Y x + c_Y) + c_X =$$

$$= \varphi_X\varphi_Y x + \varphi_X\psi_Y y + \varphi_X c_Y + \psi_X\varphi_Y y + \psi_X\psi_Y x + \psi_X c_Y + c_X = y.$$

Положим в последнем равенстве $x = y = 0$. Тогда

$$\varphi_X c_Y + \psi_X c_Y + c_X = 0.$$

Поэтому $\varphi_X\varphi_Y x + \varphi_X\psi_Y y + \psi_X\varphi_Y y + \psi_X\psi_Y x = y$. Положим в последнем равенстве $y = 0$:

$$\varphi_X\varphi_Y x + \psi_X\psi_Y x = 0,\ \varphi_X\varphi_Y = J\psi_X\psi_Y.$$

Тогда $\varphi_X\psi_Y y + \psi_X\varphi_Y y = y$, т.е. $\varphi_X\psi_Y + \psi_X\varphi_Y = \varepsilon$.

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2). легко проверяется. □

Доказательство следующих предложений аналогичны доказательствам предыдущих.

**Предложение 3.4.** *Для обратимой T-алгебры* $(Q;\Sigma)$ *следующие условия эквивалентны:*

*1) Обратимая алгебра* $(Q;\Sigma)$ *имеет вид*

$$X(x,y) = \varphi_X x + \psi_X y,$$

*где* $\psi_X\psi_Y = \varphi_X\psi_Y + \psi_X$, $\varphi_X + \psi_X\varphi_Y = \varphi_X\varphi_Y$ *для всех* $X, Y \in \Sigma$, *а* $(Q;+)$*– группа экспоненты два;*

*2) В обратимой алгебре* $(Q;\Sigma)$ *выполняется сверхтождество Шредера (3.4).*

**Предложение 3.5.** *Для обратимой T-алгебры* $(Q;\Sigma)$ *следующие условия эквивалентны:*

*1) Обратимая алгебра* $(Q;\Sigma)$ *имеет вид*

$$X(x,y)=\varphi_X x+\psi_X y,$$

*где* $\psi_X\psi_Y=\varphi_Y\psi_X+\psi_Y$, $\varphi_Y\varphi_X=\psi_X\varphi_Y+\varphi_X$ *для всех* $X,Y\in\Sigma$, *а* $(Q;+)$*– группа экспоненты два;*

*2) В обратимой алгебре* $(Q;\Sigma)$ *выполняется сверхтождество Шредера (3.5).*

**Предложение 3.6.** *Для обратимой T-алгебры* $(Q;\Sigma)$ *следующие условия эквивалентны:*

*1) Обратимая алгебра* $(Q;\Sigma)$ *имеет вид*

$$X(x,y)=\varphi_X x+\psi_X y+c_X,$$

*где* $\varphi_X c_Y+\psi_X c_Y+c_X=0$, $\varphi_X\psi_Y=J\psi_X\varphi_Y$ $(Jx=-x)$, $\varphi_X\varphi_Y+\psi_X\psi_Y=\varepsilon$ *для всех* $X,Y\in\Sigma$;

*2) В обратимой алгебре* $(Q;\Sigma)$ *выполняется сверхтождество Шредера (3.6).*

**Abstract.** In this paper using the second order formula, namely the $\forall\exists(\forall)-$ identities, we characterize some subclasses of the invertible algebras that are linear over an Abelian group and have restrictions on the use of the automorphisms of the corresponding group.

## Список литературы

[1] В. Д. Белоусов, Основы Теории Квазигрупп и Групп. М., Наука, 1967.
[2] В. Д. Белоусов, "Уравновешенные тождества в квазигруппах", Мат. сб., **70** (112), no. 1, 55 – 97 (1966).
[3] T. Kepka , P. Nemec, "T-quasigroups. Part I", Acta Universitatis Carolina Math. et Phys., **12**, no. 1, 39 – 49 (1971).
[4] Г. Б. Белявская, "T-квазигруппы и центр квазигруппы", Мат. исследов. Кишинев, Штиинца, вып. 111, 24 – 43 (1989).
[5] Г. Б. Белявская, А. К. Табаров, "Характеристика линейных и алинейных квазигрупп", Дискр. математика, РАН, **4**, вып. 2, 142 – 147 (1992).
[6] S. S. Davidov, "A characterization of binary invertible algebras linear over a group", Quasigroups and Related Systems, **19**, 207 – 222 (2011).
[7] Yu. M. Movsisyan, E. Nazari, "Transitive modes", Demonstratio Mathematica, **XLIV**, no. 3, 511 – 522 (2011).
[8] T. Kepka, "Structure of weakly abelian quasigroups", Czech Math. Journal, **28**, 181 – 188 (1978).
[9] T. Kepka, "Structure of triabelian quasigroups", Comment. Math. Univ. Caroline., **17**, 229 – 240 (1976).
[10] A. P. Keedwell, V. A. Shcherbacov, "Quasigroups with an inverse property and generalized parastrophic identities", Quasigruops and Related Systems, **13**, 109 – 124 (2005).

[11] J. Cho, J. Ježek, T. Kepka, "Paramedial groupoids", Czech. Math. Journal, 49 (124), 277 – 290 (1999).
[12] А. Х. Табаров, "Т-квазигруппы с дополнительными тождествами", Деп. в ВИНИТИ, Москва, 09.01.91, N163-В91 (1991).
[13] А. Х. Табаров, "О некоторых многообразиях абелевых квазигрупп", Дискр.математика, РАН, 12, вып.3, 154 – 159 (2000).
[14] В. Д. Белоусов, Парастрофно-ортогональные квазигруппы, Препринт. АН МССР, Институт Математики, Кишинев (1983).

Поступила 20 октября 2011