Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 4, 2013, стр. 3-12.

О ЯВЛЕНИИ ГИББСА ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Р. Г. БАРХУДАРЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *rafayel@instmath.sci.am*

Аннотация. Рассмотрены разложения по собственным функциям системы Дирака. Выявлено явление Гиббса для таких разложений.

MSC2010 number: 34L10, 34L40.

Ключевые слова: Разложение по собственным функциям; система Дирака; явление Гиббса.

1. Введение

Как известно, разложения по собственным функциям регулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами на конечном отрезке равномерно сходятся, если разлагаемая функция принадлежит области определения соответствующего оператора. В противном же случае может наблюдаться явление, аналогичное явлению Гиббса для классических рядов Фурье. Подобные явления, в частных случаях, были изучены в ряде работ (см. Л.Мишо [1, 2], Л.Брандолини и Л. Колзани [3] а также [4, 5, 6]).

В настоящей работе выявлено явление Гиббса для компонент вектор-функции краевой задачи для системы Дирака

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} y = \lambda y, \tag{1.1}$$

$$y_2(-1)\cos\alpha + y_1(-1)\sin\alpha = 0, \tag{1.2}$$

$$y_2(1)\cos\beta + y_1(1)\sin\beta = 0. \tag{1.3}$$

где p и r действительные на отрезке $[-1,1]$ функции.

Исходя из физических соображений, Р. Шмитковски показал (см. [7, 8]), что разложения по собственным функциям системы Дирака не сходится к разлагаемой функции в концах интервала, даже если каждая компонента этой функции из класса $C^\infty[-1,1]$, но не удовлетворяет краевым условиям.

Следуя [9] (см. стр. 71), приведем некоторые, необходимые нам, известные факты и формулы, связанные с задачей (1.1)-(1.3). Обозначим через $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{v_n = (v_{n,1}, v_{n,2})^T\}_{n=-\infty}^{\infty}$ множество собственных значений и нормированных собственных вектор-функций этой задачи. Не умаляя общности можем предположить, что число $\lambda = 0$ не является собственным значением. Для краткости ряды по собственным функциям $\{v_n\}$ будем также называть рядами Фурье, а соответствующие коэффициенты - коэффициентами Фурье.

Для вектор функции $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^T \in L_2^2[-1,1] = L_2[-1,1] \times L_2[-1,1]$ введем обозначения,

$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} c_n v_n(x), \tag{1.4}$$

$$c_n = \int_{-1}^{1} v_n^T(x) f(x)\,dx, \tag{1.5}$$

$$R_N(f) = f(x) - S_N(f).$$

Известно [9] (см. стр. 82), что собственные вектор-функции задачи Дирака образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2^2[-1,1]$, т.е. $S_N(f)$ сходится к f по норме L_2^2

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} (f_1^2(x) + f_2^2(x))\,dx\right)^{1/2}.$$

Имеют место следующие асимптотические формулы (см. [9] стр. 75, где при выводе формул (1.7),(1.8) была допущена опечатка. Здесь приведена уточненная формула):

$$\lambda_n = n - \frac{\theta}{\pi} + O\left(n^{-1}\right), \quad n \to \infty, \tag{1.6}$$

$$v_{n,1}(x) = \cos(\xi_n - \alpha) + O\left(n^{-1}\right), \quad n \to \infty, \tag{1.7}$$

$$v_{n,2}(x) = \sin(\xi_n - \alpha) + O\left(n^{-1}\right), \quad n \to \infty, \tag{1.8}$$

где

$$\theta = \beta - \alpha - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(p(t) + r(t))dt, \tag{1.9}$$

$$\xi_n = \xi(x, \lambda_n) = \lambda_n(x+1) - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x}(p(\tau) + r(\tau))d\tau.$$

Основным результатом настоящей работы является

Теорема . *Пусть $p, r \in C^1[-1,1]$, $f \in C_2^1[-1,1]$ и функция f не удовлетворяет краевым условиям, тогда, если $B(f,-1,\alpha) \neq 0$ в точке -1 имеют место соотношения*

$$\limsup_{\substack{N\to\infty \\ x\to -1}} \frac{|B(S_N(f), x, \alpha)|}{|B(f,-1,\alpha)|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt,$$

а если $B(f,1,\beta) \neq 0$ то

$$\limsup_{\substack{N\to\infty \\ x\to 1}} \frac{|B(S_N(f), x, \beta)|}{|B(f,1,\beta)|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt,$$

где

$$B(f, x, \gamma) = f_1(x)\sin\gamma + f_2(x)\cos\gamma.$$

Замечание 1.1. *Так как все собственные функции удовлетворяют граничным условиям то если рассмотреть предел усеченного ряда то и он должен удовлетворять этим условиям (если сходимость равномерная). В случае когда разлагаемая функция не удовлетворяет граничным условиям, т.е. $B(f,-1,\alpha) \neq 0$ или $B(f,1,\beta) \neq 0$, то имеет место аналог явления Гиббса в терминах нарушения граничных условий.*

Замечание 1.2. *Если рассмотреть разложения* (1.4) *покомпонентно, то легко можно выяснить (следует из доказательства теоремы), что если* $\alpha = 0$ *или* $\alpha = \pi/2$ *то одна компонента ряда* $S_N(f)$ *сходиться равномерно а для другой имеет место явления Гиббса в точке* -1 *(см. §3). Вышесказанное имеет место также в точке* 1 *если* $\beta = 0$ *или* $\beta = \pi/2$.

Замечание 1.3. *Величина* $\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin t}{t}dt \approx 1.17898$ *это константа классического явления Гиббса для рядов Фурье.*

Замечание 1.4. *Для преодоления этого явления в работе [10] был предложен метод ускорения сходимости разложений по собственным вектор-функциям задачи* (1.1)-(1.3), *аналогичный методу Крылова-Экгофа ускорения сходимости классического ряда Фурье (см [11, 12])*

2. Доказательство теоремы

Обозначим

$$Lf = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{df}{dx} - \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} f,$$

$$Bf = B\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2(x) \\ f_1(x) \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_k(x) = BL^k f(x), \quad k \geqslant 0,$$

где L^0 -тождественный оператор.

Лемма 2.1. *Пусть* $p, r \in C^{q-1}[-1,1]$, $p^{(q-1)}, r^{(q-1)} \in AC[-1,1]$, $f \in C_2^q[-1,1]$ *и* $f^{(q)} \in AC_2[-1,1]$, *причем* $q \geqslant 1$. *Тогда для коэффициентов* c_n, *определенных в* (1.4), *имеет место представление* $c_n = P_n + F_n$, *где*

$$P_n = v_n^T(1)\sum_{k=0}^{q} \lambda_n^{-k-1}\bar{f}_k(1) - v_n^T(-1)\sum_{k=0}^{q} \lambda_n^{-k-1}\bar{f}_k(-1), \tag{2.1}$$

$$F_n = \lambda_n^{-q-1}\int_{-1}^{1} v_n^T(x)L^{q+1}(f(x))dx.$$

Доказательство. Имеем

$$c_n = \int_{-1}^{1} v_n^T(x) f(x) dx = \lambda_n^{-1} \int_{-1}^{1} (f_1(x)(v'_{n,2}(x) - p(x)v_{n,1}(x))$$

$$f_2(x)(v'_{n,1}(x) + r(x)v_{n,2}(x)))dx.$$

Интегрируя последнее равенство по частям, получим:

$$\begin{aligned} c_n &= \lambda_n^{-1} \left(f_1(x)v_{n,2}(x) - f_2(x)v_{n,1}(x)\right)\Big|_{-1}^{1} \\ &\quad + \lambda_n^{-1} \int_{-1}^{1} v_{n,1}(x)(f_2'(x) - p(x)f_1(x)) + v_{n,2}(x)(-f_1'(x) - r(x)f_2(x))dx \\ &= \lambda_n^{-1} v_n^T(x)\tilde{f}_0(x)\Big|_{-1}^{1} + \lambda_n^{-1} \int_{-1}^{1} v_n^T(x) L(f(x))dx \end{aligned}$$

Повторяя интегрирование по частям q раз, получим требуемое. □

Рассмотрим теперь функцию

$$\kappa(x) = \begin{pmatrix} x-1 \\ -x+1 \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

которая не удовлетворяет краевым условиям в точке $x = 0$ при $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$. Рассмотрим ее разложение по системе $\{v_n(x)\}$:

$$S_N(\kappa) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(\kappa) v_n, \tag{2.3}$$

где $c_n(\kappa) = \int_{-1}^{1} v_n^T(x)\kappa(x)dx$.

Лемма 2.2. *Если $p, r \in C^1[-1,1]$, то коэффициенты разложения функции* (2.2) *имеют следующую асимптотику*

$$c_n(\kappa) = \sqrt{2}\lambda_n^{-1}(\cos\alpha - \sin\alpha) + \alpha_n,$$

где $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty$.

Доказательство. Используя лемму 2.1 для функции (2.2) получим:

$$c_n = v_n^T(1)\lambda_n^{-1}\bar{\kappa}_0(1) - v_n^T(-1)\lambda_n^{-1}\bar{\kappa}_0(-1) + \lambda_n^{-1}\int_{-1}^{1} v_n^T(x)L^1(\kappa(x))dx =$$

$$\binom{2}{2} v_n^T(-1)\lambda_n^{-1}\bar{\kappa}_0(-1) + \lambda_n^{-1}\int_{-1}^{1} v_n^T(x)L^1(\kappa(x))dx =$$

$$\sqrt{2}\lambda_n^{-1}(\cos\alpha - \sin\alpha) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \lambda_n^{-1}\int_{-1}^{1} v_n^T(x)L^1(\kappa(x))dx.$$

Учитывая тот факт что $L^1(\kappa(x)) \in L_2^2[-1,1]$, получим желаемый результат. □

Покажем теперь, что если $p, r \in C^1[-1,1]$ и функция κ определена в (2.2), тогда, если $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, для функции κ имеет место явление Гиббса. Рассмотрим ошибку при приближении функции (2.2) урезанным рядом

$$R_N(\kappa) = \kappa(x) - S_N(\kappa) = \sum_{\|n\|>N} c_n v_n(x) = \sum_{\|n\|>N} c_n \begin{pmatrix} v_{n,1}(x) \\ v_{n,2}(x) \end{pmatrix}.$$

Используя лемму 2.2 и асимптотику собственных функций κ, получим

$$\sum_{|n|>N} c_n v_{n,1}(x) = (\cos\alpha - \sin\alpha)\sum_{|n|>N}\left(\frac{\cos(\xi_n - \alpha)}{\lambda_n} + \alpha_n\right) = \tag{2.4}$$

$$(\cos\alpha - \sin\alpha)\sum_{|n|>N}\left(\frac{\cos(\frac{\pi}{2}n(x+1) + \varphi(x))}{\pi n/2} + \alpha_n\right),$$

где

$$\varphi(x) = -\alpha - \frac{\theta}{2}(x+1) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(p(\tau) + r(\tau))d\tau.$$

Из (2.4) следует, что

$$S_N(\kappa) = \kappa(x) - \sum_{|n|>N}\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\pi n/2}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}n(x+1) + \varphi(x)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}n(x+1) + \varphi(x)\right)\end{pmatrix} + o(1) =$$

$$\kappa(x) - \frac{2(\cos\alpha - \sin\alpha)}{\pi}\begin{pmatrix}-\sin(\varphi(x)) \\ \cos(\varphi(x))\end{pmatrix}\sum_{|n|>N}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n(x+1)\right)}{n} + o(1).$$

Функция φ непрерывна, а сумма $\sum\limits_{|n|>N} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n(x+1)\right)}{n}$ является остаточной суммой ряда Фурье для функции $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x$, т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n(x+1)\right)}{n} = -\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}, \quad x \in (-1,1]. \tag{2.5}$$

Разделим интервал $(-1,1]$ на две части $(-1,\xi]$, $(\xi,1]$ так, что бы на интервале $(-1,\xi]$ выполнялась оценка $|\varphi(x) - \varphi(-1)| < \epsilon$, а на интервале $(\xi,1]$ - оценка $|\kappa(x) - S_N(\kappa)| < \epsilon$, для достаточно больших N. Тогда

$$\limsup_{\substack{N\to\infty \\ x\to-1}} |B(S_N(\kappa),x,\alpha)| = |B(\kappa,-1,\alpha)| - \frac{|B(\kappa,-1,\alpha)|}{\pi} \limsup_{\substack{N\to\infty \\ x\to-1}} \sum_{|n|>N} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n(x+1)\right)}{n}. \tag{2.6}$$

Из формул (2.6) и (2.5) получим желаемый результат.

Аналогичный результат можно получить для функции

$$\varrho(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ -x-1 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

которая имеет сингулярность в точке 1.

Если $p, r \in C^1[-1,1]$ и функция ϱ определена в (2.7), тогда при $\beta \neq \frac{\pi}{4}$ имеет место явление Гиббса, а именно

$$\limsup_{\substack{N\to\infty \\ x\to1}} \frac{|B(S_N(\varrho),x,\beta)|}{|B(\varrho,1,\beta)|} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Отсюда получен следующий общий результат

Предположим $\alpha, \beta \neq \frac{\pi}{4}$, аналогичным образом, можно доказать в случае когда α или β равны $\frac{\pi}{4}$.

Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - h\,\kappa(x) - H\varrho(x)$, где

$$h = \frac{f_2(-1)\cos\alpha + f_1(-1)\sin\alpha}{\kappa_2(-1)\cos\alpha + \kappa_1(-1)\sin\alpha}, \quad H = \frac{f_2(1)\cos\alpha + f_1(1)\sin\alpha}{\varrho_2(1)\cos\alpha + \varrho_1(1)\sin\alpha}.$$

Функция $g(x)$ будет удовлетворять краевым условиям и имеет непрерывную первую производную, следовательно ряд $S_N(f(x) - h\kappa(x) - H\varrho(x))$ сходится равномерно, что и доказывает утверждение теоремы. $\square$

3. Численные иллюстрации

Проиллюстрируем сказанное на примере функции κ. Заметим также, что если $\alpha = 0$, то одна компонента в разложении (2.3) сходится равномерно, а другая ведет к явлению Гиббса. Для иллюстрации этого явления рассмотрим систему с нулевым потенциалом, и пусть $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{\pi}{4}$. Для этой задачи легко можно вычислить собственные значения и собственные функции, а именно

$$\lambda_n = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

а нормированные собственные вектор функции имеют вид

$$v_n(x) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}} \begin{pmatrix} \cos\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right)\cot\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right) \\ \cos\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right) + \cot\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x\right) \end{pmatrix}.$$

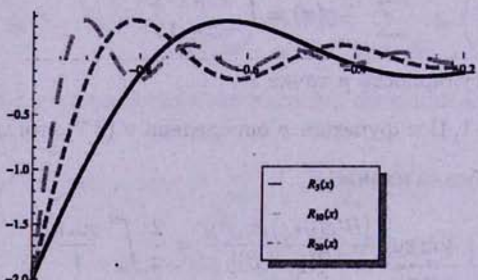

Рис. 1. **Ошибка приближения второй компоненты функции $\kappa(x)$ конечной суммой ряда Фурье в окрестности точки $x = -1$ с использованием 5, 10, 20 коэффициентов Фурье**

Благодарность. Автор выражает благодарность фондам Кнут и Алис Воленберг и Горан Густафсон за предоставленную возможность посещать Королевский Технический Университет.

Abstract. The paper considers expansions by eigenfunctions of the boundary problem for Dirac system. The Gibbs phenomenon for such expansions is revealed.

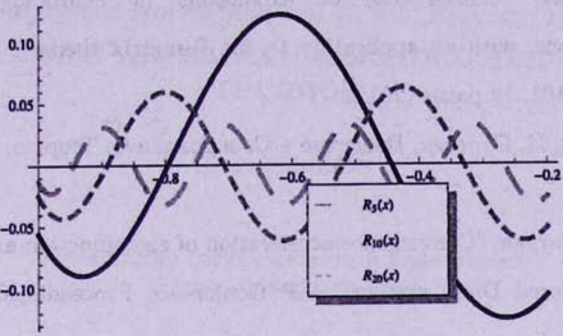

Рис. 2. Ошибка приближения первой компоненты функции $\kappa(x)$ конечной суммой ряда Фурье в окрестности точки $x = -1$, при $N = 5, 10, 20$ коэффициентов Фурье (равномерная ошибка уменьшается с ростом N).

Список литературы

[1] L. Mishoe, Eigenfunction expansions associated with non-selfadjoint differential equations, Delaware State College, Dover, Del. (1964).

[2] L. Mishoe, "On the Gibb's phenomenon in a certain eigenfunction series", Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 1–5 (1958).

[3] L. Brandolini, L. Colzani, "Localization and convergence of eigenfunction expansions", J. Fourier Anal. Appl., **5** (5), 431 – 447 (1999).

[4] M. Taylor, "The Gibbs phenomenon, the Pinsky phenomenon, and variants for eigenfunction expansions", Comm. Partial Differential Equations, **27** (3-4), 565 – 605 (2002).

[5] K. Coletta, K. Dias, R. Strichartz, "Numerical analysis on the Sierpinski gasket, with applications to Schrödinger equations, wave equation, and Gibbs' phenomenon", Fractals, **12** (4), 413 – 449 (2004).

[6] S. Kaber, "The Gibbs phenomenon for Jacobi expansions", Communications in Applied Analysis, **10**, 551 – 555 (2006).

[7] R. Szmytkowski, "Discontinuities in Dirac eigenfunction expansions", J. Math. Phys., **42** (9), 4606 – 4617 (2001).

[8] J. Stasińska, "Convergence of expansions in Schrödinger and Dirac eigenfunctions, with an application to the R-matrix theory", J. Math. Phys., **53** (2), 022101, 12 pages (2012).

[9] Б. Левитан, И. Саргсян, Введение в Спектральную Теорию, Наука, Москва (1970).

[10] R. Barkhudaryan, "Convergence acceleration of eigenfunction expansions of the one-dimensional Dirac system", AIP Conference Proceedings, **936**, 86 – 89 (2007).

[11] K. S. Eckhoff, "Accurate and efficient reconstruction of discontinuous functions from truncated series expansions", Math. Comp., **61**, 745 – 763 (1993).

[12] A. Barkhudaryan, R. Barkhudaryan, A. Poghosyan, "Asymptotic behavior of Eckhoff's method for Fourier series convergence acceleration", Anal. Theory Appl., **23** (3), 228 – 242 (2007).

Поступила 14 декабря 2011