Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 3, 2013, стр. 3-24.

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О КОММУТАТИВНОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФУНКТОРОВ

А. Г. БАГДАСАРЯН

Ереванский государственный университет, Армения
E-mail: *angen@arminco.com*

Аннотация. В настоящей статье рассматриваются некоторые интерполяционные задачи типа проблемы пересечения Петре о коммутативности интерполяционных функторов. В наиболее общей постановке задача заключается в описании условий, при которых справедливо равенство $F(A, G(A_0, A_1)) = G(F(A, A_0), F(A, A_1))$ (F и G - интерполяционные функторы).

MSC2010 number: 46B70, 46M35.

Ключевые слова: Интерполяция; задача пересечения Петре; интерполяционный функтор; пересечение и сумма банаховых пространств; методы "вещественной" и "комплексной" интерполяции.

1. Введение

Пусть F - некоторый интерполяционный функтор (см. [1, 2]), а $\{A, A_0, A_1\}$ - интерполяционная тройка. Петре в [3] рассмотрел вопрос: когда справедливо равенство

$$F(A, A_0 \cap A_1) = F(A, A_0) \cap F(A, A_1)? \tag{1.1}$$

Рассматривая в качестве функтора F функтор "вещественной"интерполяции, Петре указал достаточные условия для выполнения равенства

$$(A, A_0 \cap A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q} \tag{1.2}$$

в терминах "квазилинеаризуемости"соответствующих интерполяционных пар.

Замечая, что в равенстве (1.1) кроме функтора F присутствует еще и функтор пересечения, можно поставить задачу, заменяя функтор пересечения на функтор суммы и рассмотреть вопрос справедливости равенства:

$$(A, A_0 + A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{1.3}$$

Можно обобщить постановку задачи Петре, заменяя в равенстве (1.1) функтор пересечения на некоторый интерполяционный функтор G и рассмотреть вопрос справедливости равенства

$$F(A, G(A_0, A_1)) = G(F(A, A_0), F(A, A_1)). \tag{1.4}$$

Используя в (1.4) в качестве функторов F и G функторы суммы и пересечения приходим к следующему вопросу: когда справедливы равенства

$$A \cap (A_0 + A_1) = (A \cap A_0) + (A \cap A_1), \tag{1.5}$$

$$A + (A_0 \cap A_1) = (A + A_0) \cap (A + A_1)? \tag{1.6}$$

Оказывается, что существует связь между равенствами (1.2), (1.3) и (1.5), (1.6).

Напомним некоторые основные понятия теории интерполяции. Условимся тройку банаховых пространств $\{A, A_0, A_1\}$ (как и пару) называть интерполяционной тройкой (интерполяционной парой), если они линейно и непрерывно вложены в некоторое линейное топологическое пространство T.

Далее, будем полагать, что рассматриваемые тройки (пары) являются интерполяционными.

Определение 1.1. *Для пары $\{A_0, A_1\}$ определим пересечение и сумму:*

$$\Delta \equiv A_0 \cap A_1 = \{a \in T;\ \|a\|_\Delta = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}) < \infty\},$$

$$\Sigma \equiv A_0 + A_1 = \{a \in T;\ a = a_0 + a_1,\ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1\}.$$

Норма в Σ вводится следующим образом:

$$\|a\|_\Sigma = \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_j \in A_j}} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}).$$

Определение 1.2. *Пространство A промежуточно относительно пары $\{A_0, A_1\}$, если имеют место вложения $\Delta \subset A \subset \Sigma$.*

Определение 1.3. *Пусть $0 < \theta < 1$. Будем говорить, что банахово пространство A принадлежит классу $\mathcal{B}(\theta, A_0, A_1)$, если*

$$(A_0, A_1)_{\theta,1} \subset A \subset (A_0, A_1)_{\theta,\infty}. \tag{1.7}$$

Будем полагать, что $A_j \in \mathcal{B}(j, A_0, A_1), j = 0, 1$.

Определение 1.4. *а) Банахово пространство A обладает* **(A)**- *свойством относительно пары $\{A_0, A_1\}$, если имеют место равенства (1.5), (1.6).*

б) Пространство A обладает свойством **(P)** *относительно пары $\{A_0, A_1\}$, если имеют место (1.2), (1.3) для всех θ и q, причем $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$.*

При этом равенства (1.5), (1.6) будем называть равенствами типа Петре, а равенства (1.2), (1.3) будем называть равенствами Петре.

Исследованию задачи Петре (равенство (1.2)) посвящены работы многих авторов, в частности отметим работы [3 -7]. Наш подход заключается в том, что мы фиксируем произвольную интерполяционную пару $\{A_0, A_1\}$, затем стараемся описать пространства A, обладающие $(\mathbf{P})$ - свойством относительно этой пары.

2. О равенствах типа Петре

Теорема 2.1. *Если одно из пространств тройки $\{A, A_0, A_1\}$ вложено в другое, то равенства (1.5), (1.6) имеют место для этой тройки.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что независимо от условий теоремы, для любой интерполяционной тройки имеют место вложения

$$A \cap (A_0 + A_1) \supset (A \cap A_0) + (A \cap A_1), \tag{2.1}$$

$$A + (A_0 \cap A_1) \subset (A + A_0) \cap (A + A_1). \tag{2.2}$$

Обратные вложения к вложениям (2.1), (2.2) легко проверяются, если имеет место одно из вложений $A_0 \subset A_1$, $A_1 \subset A_0$. Кроме того, вложение, обратное к (2.1) очевидно при $A \subset A_0$ или $A \subset A_1$, а вложение, обратное к (2.2) очевидно при $A_0 \subset A$ или $A_1 \subset A$.

Пусть $A_0 \subset A$. Тогда вложение, обратное к (2.1) имеет вид

$$A \cap (A_0 + A_1) \subset A_0 + (A \cap A_1). \tag{2.3}$$

Пусть $a \in A \cap (A_0 + A_1)$. Тогда $a \in A$, $a = a_0' + a_1'$; $a_0' \in A_0$, $a_1' \in A_1$. Имеем

$$\|a_1'\|_A \le \|a\|_A + \|a_0'\|_A \le c(\|a\|_A + \|a_0'\|_{A_0}) < \infty.$$

То есть $a_1' \in A$. Тогда $a_1' \in A \cap A_1$. Таким образом, элемент a представляется в виде $a = a_0' + a_1'$, где $a_0' \in A_0, a_1' \in A \cap A_1$, и следовательно $a \in A_0 + (A \cap A_1)$. Теоретико-множественное вложение (2.3) доказано. Докажем непрерывность этого вложения. Для $A_0 \subset A$ имеем

$$\|a\|_{A_0+(A\cap A_1)} = \inf_{\substack{a=a_0+a_1\\ a_0\in A_0\\ a_1\in A\cap A_1}} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A\cap A_1}) \le \|a_0'\|_{A_0} + \|a_1'\|_A + \|a_1'\|_{A_1} =$$

$$= \|a_0'\|_{A_0} + \|a - a_0'\|_A + \|a_1'\|_{A_1} \le \|a_0'\|_{A_0} + \|a\|_A + \|a_0'\|_A + \|a_1'\|_{A_1} \le$$

$$\le c(\|a_0'\|_{A_0} + \|a_1'\|_{A_1} + \|a\|_A).$$

Взяв нижнюю грань по всем разложениям элемента $a, a = a_0' + a_1'$, $a_0' \in A_0$, $a_1' \in A_1$ приходим к (2.3). Равенство (1.5) доказано при $A_0 \subset A$(или $A_1 \subset A$). Аналогично доказываем вложение, обратное к (2.2) при $A \subset A_0$ (или $A \subset A_1$). □

Теорема 2.2. *а) Если для тройки* $\{A, A_0, A_1\}$ *выполняется одно из равенств (1.5),(1.6), то выполняется и другое.*

б) Если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ *выполняются равенства (1.5), (1.6), то аналоги этих равенств выполняются для любой другой очередности пространств тройки (например для* $\{A_1, A, A_0\}$*).*

Доказательство. Поскольку $A_1 \subset A_0 +. A_1$, то к тройке $\{A_0 + A_1, A, A_1\}$ применима теорема 2.1. Имеем

$$(A_0 + A_1) \cap (A + A_1) = [(A_0 + A_1) \cap A] + [(A_0 + A_1) \cap A_1] = \\ = [(A_0 + A_1) \cap A] + A_1. \tag{2.4}$$

Пусть для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется (1.5). Тогда из (2.4) получаем

$$(A_0 + A_1) \cap (A + A_1) = (A_0 \cap A) + (A_1 \cap A) + A_1 = A_1 + (A_0 \cap A).$$

т.е. для тройки $\{A_1, A, A_0\}$ выполняется (1.6). Таким образом, если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется (1.5), то для тройки $\{A_1, A, A_0\}$ выполняется (1.6). Это обстоятельство кратко запишем так

$$\{A, A_0, A_1\}_{(5)} \Rightarrow \{A_1, A, A_0\}_{(6)} \tag{2.5}$$

Аналогично, поскольку $A \cap A_0 \subset A_0$, то применяя теорему 2.1 к тройке $\{A \cap A_0, A_0, A_1\}$, получаем

$$(A \cap A_0) + (A \cap A_1) = [(A \cap A_0) + A_0] \cap [(A \cap A_0) + A_1] = A_0 \cap [(A \cap A_0) + A_1].$$

На основании (2.5), применяя (1.6) к тройке $\{A_1, A, A_0\}$, получаем

$$(A \cap A_0) + (A_0 \cap A_1) = A_0 \cap (A + A_1) \cap (A_0 + A_1) = A_0 \cap (A + A_1).$$

т.е.

$$\{A_1, A, A_0\}_{(6)} \Rightarrow \{A_0, A_1, A\}_{(5)}. \tag{2.6}$$

Таким образом, мы доказали цепочку следствий (см. (2.5), (2.6))

$$\{A, A_0, A_1\}_{(5)} \Rightarrow \{A_1, A, A_0\}_{(6)} \Rightarrow \{A_0, A_1, A\}_{(5)} \Rightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(6)}$$

Аналогично можно доказать, что $\{A, A_0, A_1\}_{(6)} \Rightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(5)}$. Утверждение а) доказано. Утверждение б) следует из утверждения а) и импликаций (2.5), (2.6). □

Теорема 2.3. *Пусть* $0 < \theta < 1, 1 \le q \le \infty$ *и* $A = (A_0, A_1)_{\theta,q}$. *Тогда для тройки* $\{A, A_0, A_1\}$ *выполняются равенства (1.5), (1.6), т.е. (учитывая свойство промежуточности* $\Delta \subset A \subset \Sigma$*)*

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = [A_0 + (A_0, A_1)_{\theta,q}] \cap [A_1 + (A_0, A_1)_{\theta,q}], \tag{2.7}$$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = [A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q}] + [A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q}]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Из следствия 3.6.2 из [1] для K - функционала Петре имеем

$$K(t, a; A_0, A) \sim t \left[\int_{t^{\frac{1}{\theta}}}^{\infty} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2.9}$$

$$K(t, a; A, A_1) \sim \left[\int_{0}^{t^{\frac{1}{1-\theta}}} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{\frac{1}{q}}, \tag{2.10}$$

(с соответствующими видоизменениями при $q = \infty$). Складывая соотношения (2.9), (2.10), при $t = 1$, получаем

$$\|a\|_{(A+A_0)\cap(A+A_1)} \sim \|a\|_{A+A_0} + \|a\|_{A+A_1} \sim K(1, a; A_0, A) +$$

$$+ K(1, a; A_1, A) \sim \left[\int_0^{\infty} s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1) \frac{ds}{s} \right]^{\frac{1}{q}} = \|a\|_A.$$

Равенство (2.7) доказано. Равенство (2.8) следует из теоремы 2.2. □

Для дальнейших рассмотрений полезной оказывается следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть* $\{A, A_0, A_1\}$ *- интерполяционная тройка. Тогда*

а) $\{A \cap (A_0 + A_1), A_0, A_1\}_{(5),(6)} \Leftrightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(5),(6)}$,

б) $\{A + (A_0 \cap A_1), A_0, A_1\}_{(5),(6)} \Leftrightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(5),(6)}$.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 а) для доказательства утверждения а) леммы 2.1 достаточно убедиться, что $\{A \cap (A_0 + A_1), A_0, A_1\}_{(5)} \Leftrightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(5)}$. Пусть имеет место $\{A \cap (A_0 + A_1), A_0, A_1\}_{(5)}$. Тогда

$$A \cap (A_0 + A_1) = A \cap (A_0 + A_1) \cap (A_0 + A_1) = [A \cap (A_0 + A_1) \cap A_0] +$$

$$+ [A \cap (A_0 + A_1) \cap A_1] = A \cap A_0 + A \cap A_1.$$

Односторопяя импликация $\{A \cap (A_0 + A_1), A_0, A_1\}_{(5)} \Rightarrow \{A, A_0, A_1\}_{(5)}$ доказапа. Имеем далее, из $\{A, A_0, A_1\}_{(5)}$:

$$A \cap (A_0 + A_1) \cap (A_0 + A_1) = A \cap (A_0 + A_1) = A \cap A_0 + A \cap A_1 =$$

$$A \cap (A_0 + A_1) \cap A_0 + A \cap (A_0 + A_1) \cap A_1$$

Утверждение а) доказано. Утверждение б) доказывается аналогично. □

3. (P)-СВОЙСТВО ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этом параграфе мы установим, что пространства $A_0, A_1, A_0 + A_1, A_0 \cap A_1$, обладают свойством (P) относительно интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$.

Теорема 3.1. *Пространства* A_0, A_1 *обладают свойством* (P) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$, *т.е.* ($0 < \theta < 1 \quad 1 \leq q \leq \infty$, $j = 0, 1$)

(3.1)
$$(A_j, A_0 \cap A_1)_{\theta,q} = (A_j, A_{1-j})_{\theta,q} \cap A_j,$$

(3.2)
$$(A_j, A_0 + A_1)_{\theta,q} = (A_j, A_{1-j})_{\theta,q} + A_j.$$

Доказательство. Справедливость равенств (3.1) доказана в [6]. Докажем равенства (3.2). Пусть $j = 1$ (ясно, что можно ограничиться этим случаем). На основании следствия 3.6.2 из [1] имеем

(3.3)
$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1} = K(1, a; (A_0, A_1)_{\theta,q}, A_1) \sim \left[\int_0^1 s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя в (3.3) теорему 2 из [8], получаем:

$$\|a\|_{(\Sigma,A_1)_{\theta,q}} = \left[\int_0^\infty s^{-\theta q} K^q(s, a; \Sigma, A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}} \geq \left[\int_0^1 s^{-\theta q} K^q(s, a; \Sigma, A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\int_0^1 s^{-\theta q} K^q(s, a; A_0, A_1)\frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}} \sim \|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}+A_1},$$

т.е.

$$(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \subset (A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1.$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то равенство (3.2) выполняется. □

Теорема 3.2. *Пусть* $\{A_0, A_1\}$ *- интерполяционная пара. Пространства* Σ *и* Δ *обладают свойством* (P) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство. Докажем, что равенство (1.3) имеет место при $A = \Delta$. Имеем

$$
\begin{aligned}
&(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{\theta,q} = [A_0 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1 \cap (A_0, A_1)_{1-\theta,q}] = \\
&\quad = (A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_0] \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1]) + \\
&\quad + (A_1 \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0] \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_1]) = \\
&\quad (A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1]) + (A_1 \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0]) .
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

Первое равенство в (3.4) написано на основании (3.1) и теоремы 3.4.1 из [1]. Второе равенство вытекает из (2.7). Третье равенство очевидно. Применим теорему 2.1 к тройке

$$\{A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1], A_1, (A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0\} .$$

Тогда применяя равенство (1.6) к этой тройке, из (3.4) получаем

$$
\begin{aligned}
&(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{\theta,q} = (A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1] + A_1) \cap \\
&\quad \cap (A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1] + [(A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0]) = \\
&\quad (A_0 \cap [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1] + A_1) \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0] .
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Применим теорему 2.1 к тройке $\{A_0, (A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1, A_1\}$. Тогда из (3.5) имеем

$$(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{\theta,q} = [(A_0, A_1)_{\theta,q} + A_1] \cap [(A_0, A_1)_{1-\theta,q} + A_0] .$$

Применяя теорему 3.1 и теорему 3.4.1 из [1], получаем

$$(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{\theta,q} = (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_0)_{\theta,q} \supset (\Sigma, \Delta)_{\theta,q} .$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к равенству (1.3) при $A = \Delta$. Равенство (1.2) при $A = \Sigma$ доказано в [6]. Заметим, что

$$(\Sigma, A_0)_{\theta,q} + (\Sigma, A_1)_{\theta,q} = A_0 + (A_1, A_0)_{\theta,q} + A_1 + (A_0, A_1)_{\theta,q} = \Sigma = (\Sigma, \Sigma)_{\theta,q} ,$$

т.е. имеет место (1.3) при $A = \Sigma$.

Аналогично получаем

$$(\Delta, A_0)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q} = A_0 \cap (A_1, A_0)_{\theta,q} \cap A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} = \Delta = (\Delta, \Delta)_{\theta,q} ,$$

т.е. (1.2) имеет место при $A = \Delta$. □

4. О свойствах троек, удовлетворяющих равенствам типа Петре

В настоящем параграфе мы исследуем свойства троек, удовлетворяющих равенствам (1.5), (1.6). В частности оказывается, что выполнение этих равенств замкнуто относительно функторов суммы, пересечения и функтора "вещественной" интерполяции (во всяком случае для промежуточных пространств).

Теорема 4.1. *Пусть пространства A и B обладают свойством* (**A**) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$. *Тогда*

а) Из $B \supset \Delta$ следует, что $A \cap B$ тоже обладает свойством (**A**) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

б) Из $A \subset \Sigma$ следует, что $A + B$ тоже обладает свойством (**A**) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

Таким образом, если одно из пространств A или B промежуточно относительно пары $\{A_0, A_1\}$, то пространства $A \cap B$ и $A + B$ обладают свойством (**A**).

Доказательство. Пусть сначала имеют место оба вложения $B \supset \Delta$, $A \subset \Sigma$. Тогда из (1.5) и (1.6), примененных соответственно к тройкам $\{A, A_0, A_1\}$ и $\{B, A_0, A_1\}$, имеем

$$A \cap B = [A \cap A_0 + A \cap A_1] \cap (B + A_0) \cap (B + A_1). \tag{4.1}$$

Поскольку $A \cap A_0 \subset B + A_0$, то к тройке $\{A \cap A_0, A \cap A_1, B + A_0\}$ применима теорема 2.1. Как и при доказательстве теоремы 2.2 это обстоятельство кратко запишем так: $\{,,\}_{(5),(6)}$. Тогда из (4.1) имеем

$$A \cap B = [A \cap A_0 + A \cap A_1 \cap (B + A_0)] \cap (B + A_1). \tag{4.2}$$

Поскольку $A \cap A_1 \cap (B + A_0) \subset B + A$, то на основании теоремы 2.1, примененной к тройке $\{A \cap A_0, A \cap A_1 \cap (B + A_0), B + A_1\}$, из (4.2) получаем

$$A \cap B = A \cap A_0 \cap (B + A_1) + A \cap A_1 \cap (B + A_0). \tag{4.3}$$

Используя (**A**) - свойство пространства B относительно пары $\{A_0, A_1\}$, из (4.3) и теоремы 2.2 получаем ($B \supset \Delta$):

$$A \cap B = A \cap [B \cap A_0 + A_0 \cap A_1] + A \cap [B \cap A_1 + A_0 \cap A_1] =$$

$$= (A \cap B) \cap A_0 + (A \cap B) \cap A_1,$$

т.е. $\{A \cap B, A_0, A_1\}_{(5)}$. Рассуждая аналогично, для $A + B$ получаем

$$A + B = A \cap A_0 + A \cap A_1 + (B + A_0) \cap (B + A_1) = A \cap A_0 + [A \cap A_1 + B + A_0] \cap$$

$$\cap[A\cap A_1+B+A_1]=A\cap A_0+[A\cap A_1+B+A_0]\cap[B+A_1]=A\cap A_0+$$
$$+[(A+A_0)(A_1+A_0)+B]\cap[B+A_1]=A\cap A_0+[A+A_0+B]\cap[B+A_1]=$$
$$=[A\cap A_0+A+A_0+B]\cap[A\cap A_0+B+A_1]=$$
$$=(A+B+A_0)\cap[(A+A_1)\cap(A_0+A_1)+B]=(A+B+A_0)\cap(A+B+A_1).$$

т.е. $\{A+B,A_0,A_1\}_{(6)}$. Таким образом, утверждение теоремы имеет место при одновременном выполнении вложений $B\supset\Delta$, $A\subset\Sigma$.

Докажем утверждение а) теоремы. На основании леммы 2.1 имеем

$$\{A\cap B\cap(A_0+A_1),A_0,A_1\}_{(5),(6)}\Rightarrow\{A\cap B,A_0,A_1\}_{(5),(6)}.$$

Поскольку $B\subset\Delta, A\cap(A_0+A_1)\subset\Sigma$ то из предыдущих рассмотрений и леммы 2.1 приходим к утверждению а).

Утверждение б) доказывается аналогично. □

Следующая теорема показывает, что множество промежуточных пространств, удовлетворяющих равенствам (1.5), (1.6), замкнуто относительно функтора "вещественной" интерполяции.

Теорема 4.2. *Пусть* $0<\theta<1$, $1\le q\le\infty$, $A_0\cap A_1\subset A, B\subset A_0+A_1$ *Если пространства* A *и* B *обладают свойством* (**A**) *относительно пары* $\{A_0,A_1\}$, *то* $(A,B)_{\theta,q}$ *также обладает свойством* (**A**) *относительно этой пары.*

Доказательство теоремы будет приведено в §7. Обозначим правые части равенств (1.5), (1.6) через

$$A_*=(A\cap A_0)+(A\cap A_1),\quad A^*=(A+A_0)\cap(A+A_1).$$

Для промежуточного относительно пары $\{A_0,A_1\}$ пространства A свойство (**A**) означает, что $A=A_*=A^*$.

Теорема 4.3. *Пусть* $1\le q\le\infty$. *Тогда*

$$(A_*,A)_{\frac12,q}=A\cap(A^*,A_*)_{\frac12,q},\tag{4.4}$$

$$(A^*,A)_{\frac12,q}=A+(A^*,A_*)_{\frac12,q}.\tag{4.5}$$

Доказательство. Имеем

$$(A_*,A)_{\frac12,q}=(A\cap A_0+A\cap A_1,A)_{\frac12,q}=(A\cap(A\cap A_0+A_1),A)_{\frac12,q}=$$
$$=A\cap(A\cap A_0+A_1,A)_{\frac12,q}=A\cap(A+A_1,A\cap(A\cap A_0+A_1,A))_{\frac12,q}=\tag{4.6}$$
$$=A\cap(A+A_1,A\cap A_0+A\cap A_1)_{\frac12,q}=A\cap(A+A_1,A_*)_{\frac12,q}.$$

Второе и пятое равенства в (4.6) написаны на основании теоремы 2.1, примененной к тройке $\{A, A\cap A_0, A_1\}$, третье равенство написано на основании теоремы 3.1, четвертое равенство написано на основании следствия из теоремы 3 из [6]. Аналогично (4.6) получаем

$$(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A\cap(A+A_0, A_*)_{\frac{1}{2},q}. \tag{4.7}$$

Из (4.6), (4.7) имеем

$$(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A\cap(A+A_0, A_*)_{\frac{1}{2},q}\cap(A+A_1, A_*)_{\frac{1}{2},q}\supset$$

$$\supset A\cap((A+A_0)\cap(A+A_1), A_*)_{\frac{1}{2},q} = A\cap(A^*, A_*)_{\frac{1}{2},q}. \tag{4.8}$$

Поскольку очевидно $A_*\subset A\subset A^*$, то обратное вложение к (4.8) тоже выполняется, и мы приходим к (4.4). Аналогично доказываем (4.5):

$$(A^*, A)_{\frac{1}{2},q} = ((A+A_0)\cap(A+A_1), A)_{\frac{1}{2},q} = (A+A_1\cap(A+A_0), A)_{\frac{1}{2},q} =$$

$$= A+(A_1\cap(A+A_0), A)_{\frac{1}{2},q} = A+(A+A_1\cap(A+A_0), A\cap A_1))_{\frac{1}{2},q} =$$

$$= A+((A+A_0)\cap(A+A_1), A\cap A_1)_{\frac{1}{2},q} = A+(A^*, A\cap A_1)_{\frac{1}{2},q}.$$

Аналогично получаем $(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A+(A^*, A\cap A_0)_{\frac{1}{2},q}$. Тогда

$$(A_*, A)_{\frac{1}{2},q} = A+(A^*, A\cap A_0)_{\frac{1}{2},q}+(A^*, A\cap A_1)_{\frac{1}{2},q}\subset A+(A^*, A_*)_{\frac{1}{2},q}.$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к (4.5). □

5. Достаточные условия для выполнения равенств Петре

В §2 мы доказали (P) - свойство для первоначальных пространств A_0, A_1, Σ, Δ относительно интерполяционной пары $\{A_0, A_1\}$. Продолжим исследование интерполяционной проблемы Петре и укажем достаточные условия для выполнения равенств (1.2), (1.3).

Теорема 5.1. *Пусть* $0<\eta<1$. *Если* $A\in\mathcal{B}(\eta; A_0, A_1)$, *то пространство* A *обладает свойством* (P) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство. Имеем ($0<\theta<1,\ 1\le q\le\infty$)

$$(A,\Delta)_{\theta,q}\supset(A_*,\Delta)_{\theta,q} = (A\cap A_0+A\cap A_1,\Delta)_{\theta,q}\supset$$

$$\supset(A\cap A_0,\Delta)_{\theta,q}+(A\cap A_1,\Delta)_{\theta,q}. \tag{5.1}$$

Поскольку $A\in\mathcal{B}(\eta, A_0, A_1)$, то из теоремы 3.1 имеем

$(A_0,\Delta)_{\eta,1} = A_0\cap(A_0, A_1)_{\eta,1}\subset A_0\cap A,\qquad (A_0,\Delta)_{\eta,\infty} = A_0\cap(A_0, A_1)_{\eta,\infty}\supset A_0\cap A,$

т.е.

$$A_0 \cap A \in \mathcal{B}(\eta; A_0, \Delta). \tag{5.2}$$

Аналогично получаем

$$A_1 \cap A \in \mathcal{B}(\eta; \Delta, A_1). \tag{5.3}$$

Соотношения (5.2), (5.3) и включения $\Delta \in \mathcal{B}(1; A_0, \Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}(0; \Delta, A_1)$ показывают, что можно применить теорему реитерации (см. теорему 3.5.3 из [1]). Тогда из (5.1) имеем

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\eta(1-\theta),q}. \tag{5.4}$$

Применяя к правой части (5.4) теорему 3.1, получаем

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset \left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + \left[A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right]. \tag{5.5}$$

Поскольку (см. теорему 3.4.1 из [1])

$$(A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \subset (A_0, \Delta)_{\eta(1-\theta),q} = A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} \subset (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}, \tag{5.6}$$

то к тройке $\left\{A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}, A_1, (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right\}$ можно применить теорему 2.1. Тогда из (5.5), (5.6) имеем

$$\begin{gathered}(A, \Delta)_{\theta,q} \supset \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + A_1\right) \cap \\ \cap \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}\right) = \\ = \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + A_1\right) \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} \supset \\ \supset \left(\left[A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right] + \left[A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}\right]\right) \cap \\ \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q} = (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta),q}.\end{gathered} \tag{5.7}$$

Последнее равенство в (5.7) написано на основании теоремы 2.3 (см. (2.8)). Теперь, используя теорему реитерации 3.5.3 из [1], получаем

$$(A, \Delta)_{\theta,q} \supset (A, A_0)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}.$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к (1.2). Равенство (1.3) доказывается аналогично. □

Непосредственным следствием доказанной теоремы является то, что пространства $(A_0, A_1)_{\eta,r}$ и $[A_0, A_1]_\eta$ обладают (**P**) - свойством относительно пары $\{A_0, A_1\}$ (см. теоремы 3.4.1 и 4.7.1 из [1]) для всех индексов $\eta, r : 0 < \eta < 1,\ 1 \le r \le \infty$.

Теорема 5.2. *Пусть Δ плотно в A_j $(j = 0, 1)$ и $0 < \eta < 1$. Если A - интерполяционное пространство типа η (см. теорему 2.4.1 из [1]) относительно пары $\{A_0, A_1\}$, то A обладает свойством* (**P**) *относительно этой пары.*

Доказательство. На основании теоремы 3.9.1 из [1] заключаем, что $A \in \mathcal{B}(\eta; A_0, A_1)$. Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 5.1. □

Теорема 5.3. *Пусть $0 < \alpha, \beta, \eta < 1$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$. Положим*

$$B_0 = (A_0, A_1)_{\alpha, q_0} \quad (\text{ или } [A_0, A_1]_\alpha), B_1 = (A_0, A_1)_{\beta, q_1} \quad (\text{ или } [A_0, A_1]_\beta).$$

Если A - интерполяционное пространство типа η относительно пары $\{B_0, B_1\}$, то A обладает свойством (**P**) *относительно пары $\{A_0, A_1\}$.*

Доказательство. Из теоремы 3.5.3 из [1] имеем $(1 \leq r \leq \infty)$:

$$(B_0, B_1)_{\eta, r} = (A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, r}. \tag{5.8}$$

Теорема 3.4.2 из [1] (теорема 4.2.2 для метода "комплексной"интерполяции) утверждает, что $A_0 \cap A_1$ плотно в B_j $(j = 0, 1)$. Тогда в B_j $(j = 0, 1)$. плотно и пространство $B_0 \cap B_1$. Теперь из теоремы 3.9.1 из [1] получаем

$$(B_0, B_1)_{\eta, 1} \subset A \subset (B_0, B_1)_{\eta, \infty}. \tag{5.9}$$

Учитывая (5.8), вложения (5.9) можно переписать в виде

$$(A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, 1} \subset A \subset (A_0, A_1)_{\alpha(1-\eta)+\beta\eta, \infty},$$

т.е. $A \in \mathcal{B}(\alpha(1-\eta)+\beta\eta; A_0, A_1)$. Утверждение теоремы следует из теоремы 5.1. □

6. Об уточнении одного классического утверждения

Хорошо известно (см. утверждение е) теоремы 1.3.3 из [2], утверждение д) теоремы 3.4.1 из [1] для "вещественного"метода и утверждение д) теоремы 1.9.3 из [2], утверждение в) теоремы 4.2.1 из [1] для "комплексного"метода), что если $A_1 \subset A_0$, то

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} \subset (A_0, A_1)_{\eta, q}, \tag{6.1}$$

где $0 < \eta < \theta < 1$, $1 \leq q, r \leq \infty$.

Оказывается, что справедливы и обратные утверждения. Кроме того, вторые нижние индексы в (6.1) могут не совпадать:

$$(A_0, A_1)_{\theta, q} \subset (A_0, A_1)_{\eta, r}. \tag{6.2}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $0 < \eta < \theta < 1$, $1 \le q, r \le \infty$. *Для выполнения каждого из вложений (6.1), (6.2) необходимо и достаточно, чтобы* $A_1 \subset A_0$.

Утверждение остается верным при $\theta = 1$, если заменить $(A_0, A_1)_{\theta,q}$ (или $[A_0, A_1]_\theta$) на A_1; и при $\eta = 0$, если заменить $(A_0, A_1)_\eta$ (или $[A_0, A_1]_q$) на A_0.

Доказательство. Докажем утверждение для "вещественного" метода. Пусть сначала $0 < \eta < \theta < 1$, $q = r$. Учитывая утверждение д) теоремы 3.4.1 из [1] достаточно доказать, что из вложения (6.2) следует вложение $A_1 \subset A_0$.

Используя теорему 3.1 и вложение (6.2), имеем

(6.3) $$(\Delta, A_1)_{\theta,q} = A_1 \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} \subset A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta,q} = (\Delta, A_1)_{\eta,q}.$$

Далее, из утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1] ($1-\theta < 1-\eta$ и $\Delta \subset A_1$), имеем

(6.4) $$(\Delta, A_1)_{\theta,q} = (A_1, \Delta)_{1-\theta,q} \supset (A_1, \Delta)_{1-\eta,q} = (\Delta, A_1)_{\eta,q}.$$

Вложения (6.3), (6.4) дают $(\Delta, A_1)_{\theta,q} = (\Delta, A_1)_{\eta,q}$, $\eta < \theta$.
Теперь из упражнения 21 §3.16 из [1] следует , что $\Delta = A$, т.е. $A_1 \subset A_0$.

Пусть теперь $\theta = 1$ или $\eta = 0$. Ограничимся случаем $\theta = 1$. Тогда вложение (6.2) принимает вид

(6.5) $$A_1 \subset (A_0, A_1)_{\eta,r}.$$

Вложение (6.5) следует из вложения $A_1 \subset A_0$. В справедливости обратного утверждения можно убедиться применяя теорему реитерации 3.5.2 из [1]. Получаем

$$(A_0, A_1)_{\alpha,p} \subset (A_0, (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\alpha,p} = (A_0, A_1)_{\eta\alpha,p}, \quad 0 < \alpha < 1,\ 1 \le p \le \infty.$$

Теперь вложение $A_1 \subset A_0$ следует из выше доказанного. Таким образом утверждение теоремы для "вещественного"метода доказано при $q = r$.

Пусть теперь $0 < \eta < \theta < 1$, $1 \le q, r \le \infty$. Предположим, что имеет место вложение (6.2). Тогда аналогично тому, как это делалось выше, на основании теоремы реитерации ($0 < \alpha < 1$, $1 \le p \le \infty$) имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta\alpha,p} = (A_0, (A_0, A_1)_{\theta,q})_{\alpha,p} \subset (A_0, (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\alpha,p} = (A_0, A_1)_{\eta\alpha,p}.$$

Теперь из выше доказанного следует, что $A_1 \subset A_0$.

Пусть, наконец $A_1 \subset A_0$. Из теоремы реитерации имеем

(6.6) $$((A_0, A_1)_{\eta,r}, (A_0, A_1)_{\theta,q})_{\alpha,q} = (A_0, A_1)_{\beta,q},$$

где $\beta=(1-\alpha)\eta+\theta\alpha$. Поскольку $\beta<\theta$, то из вложения $A_1 \subset A_0$ (см. теорему 3.4.1 из [1]) следует, что

$$(A_0,A_1)_{\theta,q} \subset (A_0,A_1)_{\beta,q}. \tag{6.7}$$

Если положить $B_0=(A_0,A_1)_{\eta,r}$, $B_1=(A_0,A_1)_{\theta,q}$. то из (6.6), (6.7) имеем $B_1 \subset (B_0,B_1)_{\alpha,q}$. Тогда из доказанного выше (случай $\theta=1, \eta=\alpha$) следует, что $B_1 \subset B_0$, т.е. вложение (6.2) имеет место.
Утверждение теоремы доказано для метода "вещественной"интерполяции.

Докажем утверждение для "комплексного"метода. Пусть $0\le\eta<\theta\le 1$. Учитывая утверждение в) теоремы 4.2.1 из [1] достаточно доказать, что из вложения (6.1) следует вложение $A_1 \subset A_0$. Воспользуемся теоремой 1.10.3/2 из [2]. Тогда, используя (6.1), получаем

$$(A_0,A_1)_{(1-\alpha)\theta+\alpha,q}=([A_0,A_1]_\theta,A_1)_{\alpha,q} \subset ([A_0,A_1]_\eta,A_1)_{\alpha,q}=$$
$$=(A_0,A_1)_{(1-\alpha)\eta+\alpha,q}, \quad 0<\alpha<1.$$

Как было доказано выше, из полученного вложения интерполяционных пространств "вещественного" метода следует, что $A_1 \subset A_0$. □

7. О СВЯЗИ РАВЕНСТВ ПЕТРЕ И РАВЕНСТВ ТИПА ПЕТРЕ

В этом параграфе мы исследуем вопрос справедливости равенств (1.2), (1.3) для тройки $\{A,A_0,A_1\}$, где пространство A является промежуточным относительно пары $\{A_0,A_1\}$. Оказывается, что в этом случае, для выполнения равенств (1.2), (1.3) достаточно выполнения одного из равенств (1.5), (1.6) (второе равенство тогда выполняется автоматически). Начнем рассмотрения с доказательства формул для суммы и пересечения интерполяционных пространств.

Теорема 7.1. *Пусть* $0<\eta<\theta<1$, $1\le q,r\le\infty$. *Тогда справедливы равенства:*

а) $(A_0,A_1)_{\theta,q}\cap(A_0,A_1)_{\eta,r}=(A_0,\Sigma)_{\eta,r}\cap(\Sigma,A_1)_{\theta,q}$,

б) $(A_0,A_1)_{\theta,q}\cap(A_0,A_1)_{\eta,r}=(A_0,\Delta)_{\theta,q}+(\Delta,A_1)_{\eta,r}$,

в) $(A_0,A_1)_{\theta,q}+(A_0,A_1)_{\eta,r}=(A_0,\Delta)_{\eta,r}+(\Delta,A_1)_{\theta,q}$,

г) $(A_0,A_1)_{\theta,q}+(A_0,A_1)_{\eta,r}=(A_0,\Sigma)_{\theta,q}\cap(\Sigma,A_1)_{\eta,r}$.

Доказательство. Докажем утверждение а). Имеем

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}\cap(A_0,A_1)_{\eta,r}=(A_0,\Sigma)_{\theta,q}\cap(\Sigma,A_1)_{\theta,q}\cap(A_0,\Sigma)_{\eta,r}\cap(\Sigma,A_1)_{\eta,r}=$$

$$= (\Sigma, A_0)_{1-\theta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_0)_{1-\eta,r} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta,r} =$$
$$= (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (\Sigma, A_0)_{1-\eta,r} = (A_0, \Sigma)_{\eta,r} \cap (\Sigma, A_1)_{\theta,q}.$$

Первое равенство написано на основании теоремы 2.3 (см. (2.7)) и теоремы 3.1, второе и четвертое равенства на основании утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1], в третьем равенстве использована теорема 6.1.

Аналогично доказываем утверждение в) теоремы. На основании теоремы 2.3 (см. (2.8)), утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1] и теоремы 6.1 имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} + (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q} + (A_0, \Delta)_{\eta,r}$$
$$+(\Delta, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} + (A_1, \Delta)_{1-\theta,q} + (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (A_1, \Delta)_{1-\eta,r} =$$
$$= (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (A_1, \Delta)_{1-\theta,q} = (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}.$$

Докажем утверждение б). На основании теоремы 2.3 и (3.1) имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = [(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}] \cap [(A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}].$$

Поскольку, согласно теореме 6.1 $(\eta < \theta)\,(A_0, \Delta)_{\theta,q} \subset (A_0, \Delta)_{\eta,r}$, то на основании теоремы 2.1 убеждаемся, что для тройки $\{(A_0, \Delta)_{\theta,q}, (\Delta, A_1)_{\theta,q}, (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}\}$ имеет место формула (1.5). Тогда

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = [(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}] \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} +$$
$$+ [(A_0, \Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A_1)_{\theta,q}] \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} +$$
$$+(A_0, \Delta)_{\theta,q} \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\theta,q} \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Delta)_{\theta,q} \tag{7.1}$$
$$+(\Delta, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (A_0, \Delta)_{\theta,q} \cap (\Delta, A_1)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}.$$

Первое и второе равенства в (7.1) написаны на основании формулы (1.5) (см. теорему 2.1 и теорему 6.1), в третьем равенстве использована теорема 6.1. Воспользовавшись равенствами (3.1), убеждаемся, что второе и третье слагаемые в (7.1) совпадают с Δ . Теперь утверждение б) следует из (7.1).

Наконец утверждение г) есть следствие цепочки

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} + (A_0, A_1)_{\eta,r} = [(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\theta,q}] +$$
$$+ [(\Sigma, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, \Sigma)_{\eta,r}] = ([(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\theta,q}] + (\Sigma, A_1)_{\eta,r}) \cap$$
$$\cap ([(\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\theta,q}] + (A_0, \Sigma)_{\eta,r}) =$$
$$= [(\Sigma, A_1)_{\theta,q} + (\Sigma, A_1)_{\eta,r}] \cap [(A_0, \Sigma)_{\theta,q} + (\Sigma, A_1)_{\eta,r}] \cap$$
$$\cap [(\Sigma, A_1)_{\theta,q} + (A_0, \Sigma)_{\eta,r}] \cap [(A_0, \Sigma)_{\theta,q} + (A_0, \Sigma)_{\eta,r}] =$$
$$= (\Sigma, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, \Sigma)_{\eta,r}.$$

Первое равенство написано на основании формулы (2.7) и теоремы 3.1 (формула (3.2)). Второе и третье равенства написаны на основании формулы (1.6) с учетом теорем 2.1 и 6.1. Последнее равенство написано на основании теоремы 6.1 и равенств (3.2) (см. теорему 3.1). □

Доказанная теорема позволяет установить связь между (**A**) и (**P**) свойствами.

Теорема 7.2. *Пусть A - промежуточное пространство относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется какое-либо из равенств (1.5), (1.6), то для этой тройки выполняются оба равенства (1.2), (1.3) для всех $\theta, q: 0 < \theta < 1,\ 1 \le q \le \infty$ (т.е. из свойства* (**A**) *следует свойство* (**P**)*).*

Доказательство. Для произвольного пространства A имеем

$$(A,\Delta)_{\theta,q} \supset (A_*,\Delta)_{\theta,q} = (A\cap A_0 + A\cap A_1,\Delta)_{\theta,q} \supset (A\cap A_0,\Delta)_{\theta,q}+$$

$$+(A\cap A_1,\Delta)_{\theta,q} = (A\cap A_0,\Delta)_{\theta,q} + (\Delta, A\cap A_1)_{1-\theta,q}. \tag{7.2}$$

Если положить $B_0 = (A\cap A_0),\ B_1 = (A\cap A_1)$, то

$$B_0\cap B_1 = A\cap A_0\cap A_1 = \Delta, \tag{7.3}$$

$$B_0 + B_1 = A\cap A_0 + A\cap A_1 = A\cap(A_0 + A_1) = A. \tag{7.4}$$

В первом равенстве в (7.3) использовали вложение $A\supset\Delta$. В равенстве (7.4) использовали вложение $A\supset\Delta$ и (**A**)- свойство. Теперь из (7.2), используя утверждения а)-г) теоремы 7.1, и равенств (7.3), (7.4), получаем

$$(A,\Delta)_{\theta,q} \supset (B_0,\Delta)_{\theta,q} + (\Delta, B_1)_{1-\theta,q} = (B_0, B_0+B_1)_{1-\theta,q}\cap$$

$$\cap(B_0+B_1, B_1)_{\theta,q} = (B_0, A)_{1-\theta,q}\cap(A,B_1)_{\theta,q} = (A,B_0)_{\theta,q}\cap(A,B_1)_{\theta,q} = \tag{7.5}$$

$$= (A, A\cap A_0)_{\theta,q}\cap(A, A\cap A_1)_{\theta,q} = A\cap(A,A_0)_{\theta,q}\cap(A,A_1)_{\theta,q}.$$

На последнем шаге цепочки использовали равенства (3.1). Из равенства (2.2) имеем

$$A = A + (A_0\cap A_1) = (A\cap A_0)\cap(A\cap A_1) \supset (A,A_0)_{\theta,q}\cap(A,A_1)_{\theta,q}. \tag{7.6}$$

Теперь соотношения (7.5), (7.6) дают: $(A,\Delta)_{\theta,q}\supset(A,A_0)_{\theta,q}\cap(A,A_1)_{\theta,q}$. Поскольку обратное вложение очевидно, мы приходим к (1.2). Докажем равенство (1.3). Имеем

$$(A,\Sigma)_{\theta,q} = ((A+A_0)\cap(A+A_1),\Sigma)_{\theta,q} \subset (A+A_0,\Sigma)_{\theta,q}\cap(A+A_1,\Sigma)_{\theta,q} =$$

$$= (A+A_0,\Sigma)_{\theta,q}\cap(\Sigma, A+A_1)_{1-\theta,q} = (A+A_0, A)_{1-\theta,q} + (A, A+A_1)_{\theta,q} =$$

$$= A + (A_0, A)_{1-\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q} = (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}.$$

Первые два шага очевидны. Третье равенство написано на основании утверждения а) теоремы 3.4.1 из [1]. Четвертое равенство написано на основании теоремы 7.1 и равенства (1.6). Пятое равенство написано на основании равенств (3.2). Последнее равенство есть следствие цепочки (см. (1.5))

$$A = A \cap (A_0 + A_1) = A \cap A_0 + A \cap A_1 \subset (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}.$$

Таким образом, $(A, \Sigma)_{\theta,q} \subset (A, A_0)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}$. Поскольку обратное вложение очевидно, то мы приходим к (1.3). □

Теоремы 2.1 и 7.2 приводят к следующему утверждению.

Теорема 7.3. *Если пространство A такое, что имеет место какое-либо из следующих четырех двусторонних вложений*

$$\Delta \subset A \subset A_0, \quad \Delta \subset A \subset A_1, \quad A_0 \subset A \subset \Sigma, \quad A_0 \subset A \subset \Sigma,$$

то пространство A обладает свойством (**P**) *относительно пары* $\{A_0, A_1\}$.

Доказательство. Ясно, что при выполнении любого из четырех вложений, пространство A промежуточно относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Далее, вложения $A \subset A_j$ или $A_j \subset A$ $(j = 0, 1)$) обеспечивают выполнение равенств (1.5), (1.6) (см. теорему 2.1). Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 7.2. □

В заключении параграфа докажем теорему 4.2, сформулированную в §4.

Доказатаельство теоремы 4.2. На основании (2.7), (3.2) имеем

$$(A, B)_{\theta,q} = (A, A + B)_{\theta,q} \cap (A + B, B)_{\theta,q}. \tag{7.7}$$

Согласно теореме 4.1 достаточно доказать, что пространства $(A, A + B)_{\theta,q}$ и $(A + B, B)_{\theta,q}$ обладают свойством (**A**) относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Проверим сначала, что пространство $A + B$ обладает свойством (**A**) относительно пары $\{B + A_0, B + A_1\}$. Из теоремы 2.1 имеем

$$(A+B)\cap(B+A_0)+(A+B)\cap(B+A_1) = B+A_0\cap(A+B)+B+A_1\cap(A+B) = A+B.$$

Последнее равенство написано на основании утверждения б) теоремы 4.1. Таким образом, пространство $A + B$ обладает свойством (**A**) относительно пары $\{B + A_0, B + A_1\}$ и следовательно (свойство промежуточности) по теореме 7.2 и свойством (**P**) тоже. Тогда, используя (**A**) - свойство пространства B, имеем

$$(A + B, B)_{\theta,q} = (A + B, (B + A_0) \cap (B + A_1))_{\theta,q} =$$

$$(7.8) \qquad = (A+B, B+A_0)_{\theta,q} \cap (A+B, B+A_1))_{\theta,q} \supset$$
$$\supset [(A+B,B)_{\theta,q} + (A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + (A+B,A_1)_{\theta,q}] \,.$$

Согласно (2.7)

$$(A+B,A_j)_{\theta,q} = [A_j + (A+B,A_j)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_j)_{\theta,q}], \quad j=0,1.$$

Тогда из (7.7) и теоремы 2.1 получаем

$$(A+B,B)_{\theta,q} = [(A+B,B)_{\theta,q} + [A_0 + (A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap$$
$$\cap [A+B+(A+B,A_0)_{\theta,q}]] \cap$$
$$\cap [(A+B,B)_{\theta,q} + [A_1 + (A+B,A_1)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_1)_{\theta,q}]] =$$
$$(7.9) \qquad = [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0 + (A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_0)_{\theta,q}] \cap$$
$$\cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1 + (A+B,A_1)_{\theta,q}] \cap [A+B+(A+B,A_1)_{\theta,q}] \supset$$
$$\supset [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1] \cap (A+B).$$

Применяя в (7.9) утверждение б) теоремы 4.1, получаем:

$$(A+B,B)_{\theta,q} \supset [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1] \cap$$
$$\cap [A+B+A_0] \cap [A+B+A_1] =$$
$$= [(A+B,B)_{\theta,q} + A_0] \cap [(A+B,B)_{\theta,q} + A_1].$$

Поскольку обратное вложение очевидно, то пространство $(A+B,B)_{\theta,q}$ обладает свойством (А) относительно пары $\{A_0,A_1\}$.

Аналогично доказываем, что пространство $(A,A+B)_{\theta,q}$ обладает свойством (А) относительно пары $\{A_0,A_1\}$. Тогда из (7.7) и теоремы 4.1 а) получаем, что пространство $(A,B)_{\theta,q}$ обладает свойством (А) относительно пары $\{A_0,A_1\}$. Теорема 4.2 доказана.

8. О других равенствах типа Петре

Положим в (1.4) в качестве функторов F и G функторы пересечения и "вещественной" интерполяции соответственно. Тогда из (1.4) мы приходим к следующему вопросу: когда справедливо равенство

$$(8.1) \qquad A \cap (A_0,A_1)_{\theta,q} = (A\cap A_0, A\cap A_1)_{\theta,q}?$$

Отметим, что вопрос справедливости равенства (8.1) интересовал многих авторов. Отметим работы [9 - 13]. Полагая в (1.4) в качестве функторов F и G

функторы суммы и "вещественной" интерполяции соответственно, мы приходим к вопросу справедливости равенства

$$A + (A_0, A_1)_{\theta,q} = (A + A_0, A + A_1)_{\theta,q}. \tag{8.2}$$

В настоящем параграфе мы докажем, что равенства (8.1), (8.2) вообще говоря не выполняются. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8.1. *Пусть* $0 < \theta, \eta < 1$, $1 \le q, r \le \infty$, $A = (A_0, A_1)_{\eta,r}$. *Если выполнено какое-либо из равенств (8.1), (8.2), то* $A_0 = A_1$.

Доказательство. Имеем

$$(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = ((A_0, \Delta)_{\eta,r}, (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$
$$((A_0, \Delta)_{\eta,r}, (A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} \cap ((A_0, \Delta)_{\eta,r} + (\Delta, A_1)_{\eta,r}, (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$
$$= ((A_0, \Delta)_{\eta,r}, A)_{\theta,q} \cap (A, (\Delta, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$
$$= ((A_0 \cap (A_0, A_1)_{\eta,r}, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1 \cap (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} =$$
$$= (A_0 \cap A, A)_{\theta,q} \cap (A, A \cap A_1)_{\theta,q} = A \cap (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q} = \tag{8.3}$$
$$(A_0, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, (A_0, A_1)_{\eta,r})_{\theta,q} \cap ((A_0, A_1)_{\eta,r}, A_1))_{\theta,q} =$$
$$= (A_0, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}.$$

Первое равенство написано на основании (3.1), второе равенство написано на основании (2.7) и (3.2), третье равенство написано на основании (2.8) и (3.1), в четвертом равенстве опять использовали (3.1), в пятом и седьмом равенствах подставлено значение пространства A. Шестое равенство написано на основании (3.1). Последнее равенство написано на основании теоремы 3.5.3 из [1].

Поскольку $\theta\eta < \eta < \eta(1-\theta) + \theta$, то из этой же теоремы следует, что

$$(A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} \subset (A_0, A_1)_{\eta,r} \tag{8.4}$$

Тогда из (8.3), (8.4) имеем

$$(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}. \tag{8.5}$$

Из утверждения а) теоремы 7.1 имеем

$$(A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = (A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}, \tag{8.6}$$

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta,r} = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0} \cap (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1}, \tag{8.7}$$

где $p_0 = q$, $p_1 = r$, если $\eta > \theta$ и $p_0 = r$, $p_1 = q$, если $\eta < \theta$. Обозначим $E = (A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q}$, $F = (\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q}$, $G = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0}$, $H = (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1}$.

Тогда из теоремы 6.1 (см. (6.2)) получаем

$$E \subset G, \quad F \subset H. \tag{8.8}$$

Использовали, что $\eta(1-\theta)+\theta > \max(\theta,\eta)$ и $\theta\eta < \min(\theta,\eta)$.

Пусть имеет место равенство (8.1). Тогда из (8.1), (8.5), (8.6), (8.7) имеем

$$E \cap F = (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} \cap (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = (A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = A \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} =$$

$$= (A_0, A_1)_{\eta,r} \cap (A_0, A_1)_{\theta,q} = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0} \cap (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1} = G \cap H. \tag{8.9}$$

С другой стороны

$$E + F = (A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q} \cap (\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} =$$

$$= A_0 + (A_0, A_1)_{\theta\eta,q} + A_1 + (A_0, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = A_0 + A_1,$$

$$G + H = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta\eta),p_0} + (\Sigma, A_1)_{\max(\eta,\theta),p_1} =$$

$$= A_0 + (A_0, A_1)_{\min(\theta,\eta),p_0} + A_1 + (A_0, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1} = A_0 + A_1,$$

т.е.

$$E + F = G + H. \tag{8.10}$$

Таким образом, из (8.8) - (8.10) получаем

$$\begin{cases} E \cap F = G \cap H, \\ E + F = G + H, \\ E \subset G, \ F \subset H. \end{cases}$$

Убедимся, что из полученных соотношений следует, что

$$E = G, \quad F = H. \tag{8.11}$$

Из (8.8) имеем $E + F \subset G + F$. Тогда из (8.10) получаем $G + H = E + F \subset G + F$. Теперь $H \subset G + H \subset G + F$. Поскольку $F \subset G + F$, $H \subset G + F$, то

$$F + H \subset G + F. \tag{8.12}$$

Далее, поскольку $F \subset H$, то к тройке $\{F, G, H\}$ применима теорема 2.1. Тогда из равенства (1.6), примененного к этой тройке, получаем (см. (8.9), (8.12))

$$F = F + E \cap F = F + G \cap H = (F + G) \cap (F + H) = F + H,$$

то есть $H \subset F$. Полученное вложение вместе с (8.8) дает $H = F$. Аналогично убеждаемся, что $E = G$. Равенства (8.11) доказаны. Перепишем полученные равенства (8.11) в виде

$$(A_0, \Sigma)_{\theta\eta,q} = (A_0, \Sigma)_{\min(\theta,\eta),p_0}, \ \theta\eta < \min(\theta,\eta),$$

$$(\Sigma, A_1)_{\eta(1-\theta)+\theta,q} = (\Sigma, A_1)_{\max(\theta,\eta),p_1}, \ \eta(1-\theta)+\theta > \max(\theta,\eta).$$

Полученные равенства (см. [1]) показывают, что $A_0 = \Sigma = A_1$. Аналогично доказываем утверждение в предположении справедливости (8.2). □

Таким образом, если $A_0 \neq A_1$, то равенства (8.1), (8.2) не имеют места и, следовательно, в этом случае не имеет места равенство (1.4). Однако оказывается, что в этом случае справедливо другое соотношение между функторами F и G

$$G(F(A, A_0), F(A, A_1)) = F(G(A_0, A), G(A, A_1)). \tag{8.13}$$

Если G - функтор "вещественной"интерполяции, F - функтор пересечения, то (8.13) принимает вид

$$(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} = (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{8.14}$$

Если же F - функтор суммы, то

$$(A + A_0, A + A_1)_{\theta,q} = (A_0, A)_{\theta,q} + (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{8.15}$$

Докажем равенства в более общей ситуации. Оказывается, что и здесь важную роль играет (**A**) - свойство.

Теорема 8.2. *Пусть A - промежуточное пространство относительно пары $\{A_0, A_1\}$. Если для тройки $\{A, A_0, A_1\}$ выполняется какое-либо из равенств (1.5), (1.6), то для этой тройки выполняются оба равенства (8.14), (8.15) для всех $\theta, q: 0 < \theta < 1,\ 1 \leq q \leq \infty$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}(A \cap A_0, A \cap A_1)_{\theta,q} &= (A \cap A_0, A \cap A_0 + A \cap A_1)_{\theta,q} \cap \\ \cap (A \cap A_0 + A \cap A_1, A \cap A_1)_{\theta,q} &= (A \cap A_0, A)_{\theta,q} \cap \\ \cap (A, A \cap A_1)_{\theta,q} &= A \cap (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}\end{aligned} \tag{8.16}$$

Первое равенство написано на основании (2.7), (3.2), второе равенство написано на основании равенства (1.5) и свойства промежуточности пространства A относительно пары $\{A_0, A_1\}$, третье равенство написано на основании (3.1). Далее, из свойства промежуточности пространства A относительно пары $\{A_0, A_1\}$ и равенства (1.6), имеем

$$A = A + (A_0 \cap A_1) = (A + A_0) \cap (A + A_1) \supset (A_0, A)_{\theta,q} \cap (A, A_1)_{\theta,q}. \tag{8.17}$$

Теперь соотношения (8.16), (8.17) приводят нас к равенству (8.14).

Равенство (8.15) доказывается аналогично:

$$(A+A_0, A+A_1)_{\theta,q} = (A+A_0, (A+A_0)\cap(A+A_1))_{\theta,q}+$$

$$+((A+A_0)\cap(A+A_1), A+A_1)_{\theta,q} = (A+A_0, A)_{\theta,q}+ \tag{8.18}$$

$$+(A, A+A_1)_{\theta,q} = A+(A_0, A)_{\theta,q}+(A, A_1)_{\theta,q}$$

Поскольку $A = A\cap(A_0+A_1) = (A\cap A_0)+(A\cap A_1) \subset (A_0, A)_{\theta,q}+(A, A_1)_{\theta,q}$, то из (8.18) получаем (8.15). Теорема доказана. □

Abstract. The paper considers some interpolation problems of type of Peetre intersection problem on commutation of interpolation functors. The general statement of the problem is to find sufficient conditions for the equality $F(A, G(A_0, A_1)) = G(F(A, A_0), F(A, A_1))$, where F and G are the interpolation functors.

Список литературы

[1] Й. Берг, Й. Лёфстрём, Интерполяционные Пространства. Введение, М., Мир (1980).
[2] Х. Трибель, Теория Интерполяции. Функциональные Пространства. Дифференциальные Операторы, М., Мир (1980).
[3] J. Peetre, "Über den Durchschnitt von Interpolationsrdumen, Arch. Math., Basel, **25**, 511 – 513 (1974).
[4] J. Peetre, "Non-commutative interpolation", Le Matemat, **25**, 1 – 15 (1970).
[5] P. Grisvard, "Interpolation non commutative", Atti. Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natuz., **52**, 11 – 15 (1972).
[6] L. Maligranda, "On commutativity of interpolation with intersection", 13-th Winter School on Abstract Analysis, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl, **10**, 113 – 118 (1985).
[7] A. G. Bagdasaryan, "On one approach to the Peetre problem of intersection", Proceedings of A. Razmadze Mat. Inst, Tbilisi, **126**, 1 – 10 (2001).
[8] L. Maligranda, "The K-functional for symmetric spaces", Lecture Notes in Math., **1070**, 169 – 182 (1984).
[9] M. S. Baouendi, C. Goulaouic, "Commutation de l'intersection et des foncteurs d'interpolation", C.R. Acad. Sci. Paris **265**, 313 – 315 (1967).
[10] H. Triebel, "Allgemeine Legendresche Differentialoperatoren", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **24**, 1 – 35 (1970).
[11] N. Krugljak, L. Maligranda, L. E. Persson, "The Failure of Hardy's inequality and interpolation of intersections, Arkiv Mat, **37**, 323 – 344 (1999).
[12] A. G. Baghdasaryan, "On some interpolation problems of Peetre type", Proceeding of A.Razmadze Mathematical Institute, **135**, 27 – 39 (2004).
[13] С. В. Асташкин, П. Сунехаг, "Вещественный метод интерполяции на парах пересечений", Функц. анализ и его прил., **40:3**, 66 – 69 (2006).

Поступила 19 октября 2011