

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ПОЛУГРУППЫ

$$\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$$

В. А. ТЕПОЯН

Казанский Государственный Энергетический Университет

E-mail: *tepoyan.math@gmail.com*

Аннотация. В работе исследуются изометрические представления полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$. Вводится понятие инверсного представления и дается полное описание (с точностью до унитарной эквивалентности) таких представлений этой полугруппы. Исследуется некоторый класс неприводимых не инверсных представлений (β -представления полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$).

MSC2010 number: 46L05, 20M18.

Ключевые слова: инверсная полугруппа; инверсное представление; C^* -алгебры; регулярное представление; β -представление.

1. ВВЕДЕНИЕ

Кобурн в [4] показал, что все полуунитарные представления полугруппы неотрицательных целых чисел изометрическими операторами порождают канонически изоморфные алгебры. Позже в работе [5] Дуглас и Мерфи [7] доказали аналогичное утверждение для полугрупп с архимедовым порядком и полным порядком, соответственно. В работе [1] было показано: для того, чтобы все не унитарные изометрические представления полугруппы S порождали канонически изоморфные C^* -алгебры необходимо и достаточно, чтобы на S естественный порядок был полным. Простейшим примером полугруппы с не полным порядком является полугруппа $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$. Впервые на эту полугруппу обратил внимание Мерфи в работе [7]. Джанг в [6] указала на два представления этой полугруппы, порождающие канонически не изоморфные C^* -алгебры. Рейбурн и Витаделло в работе [9] изучили все изометрические представления полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$, подчиненные определенному условию.

В настоящей работе исследуются изометрические представления полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$. Под *изометрическим представлением* мы понимаем представление

изометрическими (точнее, полуунитарными) операторами в гильбертовом пространстве. Вводится понятие инверсного представления и показывается, что таких неприводимых представлений (с точностью до унитарной эквивалентности) всего два. Доказывается, что это те представления, которые приводятся в работах [6], [7], [9], [10]. Исследуются также не инверсные представления полугруппы $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$.

2. ИНВЕРСНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Всюду в дальнейшем S – абелева аддитивная полугруппа с сокращением, содержащая нейтральный элемент 0 и не содержащая группу отличную от тривиальной. Обозначим через Γ группу Гротендика, порожденную полугруппой S . Напомним, что группа Γ есть фактор полугруппы $S \times S$ по отношению эквивалентности: $(a, b) \sim (c, d)$ тогда и только тогда, когда $a + d = b + c$. Обратным к фактору классу $[(a, b)]$ есть $[(b, a)]$. Принято писать $\Gamma = S - S$.

Пусть $T : S \rightarrow B(H_T)$ – точное не унитарное изометрическое представление полугруппы S в алгебру $B(H_T)$ всех ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H_T . Заметим, что в этом случае $T(0) = I$. Для каждого a из S , через $T^*(a)$ будем обозначать оператор сопряженный к $T(a)$.

Таким образом, $T^*(a)T(a) = I$ (тождественный оператор), а $T(a)T^*(a) = P_T(a)$ – проектор ($P_T(a) \neq I$).

Пусть $T : S \rightarrow B(H_T)$ – изометрическое представление полугруппы S . Элемент h_0 из H_T назовем *начальным* для оператора $T(a)$, если $T^*(a)h_0 = 0$, для любого a из $S \setminus \{0\}$ и $\|h_0\| = 1$.

Тривиальным мономом будем называть операторы $T(a)$ и $T^*(b)$, где $a, b \in S$. *Мономом* будем называть конечное произведение тривиальных мономов. Множество всех мономов образует мультипликативную инволютивную полугруппу, которую будем обозначать через S_T^* .

Определим на S порядок: $a \prec b$ если $b = a + c$. Относительно этого порядка S есть сеть.

Лемма 2.1. *Для любого монома V найдутся x и y в S такие, что*

$$\lim_{c \in S} T^*(c)VT(c) = T^*(x)T(y),$$

где $\lim_{c \in S}$ – предел по сети S .

Доказательство. Пусть моном V представляется в виде

$$V = \prod_{i=1}^n T'(a_i),$$

где $T'(a_i)$ – это либо $T(a_i)$, либо $T^*(a_i)$. Разобьем множество $\{a_i\}_{i=1}^n$ на два класса: $\{a_{i_k}\}_{k=1}^l$ и $\{a_{i_j}\}_{j=l+1}^n$. Первый класс состоит из тех $\{a_i\}_{i=1}^n$ для которых множителем для V является оператор $T(a_i)$, а во второй – оператор $T^*(a_i)$. Пусть

$$a = \sum_{j=l+1}^n a_{i_j}, \quad b = \sum_{k=1}^l a_{i_k}.$$

Воспользовавшись равенством $T^*(s)T(s) = I$ и $T(s)T(t) = T(t)T(s)$ для любых s и t из S , получим

$$T^*(c)VT(c) = T^*(a)T(b),$$

где $c = a + b$. Поэтому для любого d , $c \prec d$,

$$T^*(d)VT(d) = T^*(a)T(b) = \lim_{c \in S} T^*(c)VT(c). \quad \square$$

Заметим, что если $T^*(a)T(b) = T^*(c)T(d)$ для некоторых a, b, c и d из S , тогда, в силу точности представления, $b + c = a + d$. Поэтому, каждому моному V можно поставить в соответствие единственный элемент $b - a$ группы Гротендика G . Элемент $b - a$ будем называть *индексом* монома V и обозначать $\text{ind}V = b - a$. Это понятие было введено в работе [2] для регулярного представления полугруппы S . Фактически доказано следующее утверждение.

Лемма 2.2. (1) *Индекс монома не зависит от его представления в виде произведения элементарных мономов.*

(2) *Индекс произведения мономов равен сумме индексов сомножителей:*

$$\text{ind}(V_1 \cdot V_2) = \text{ind}V_1 + \text{ind}V_2.$$

Обозначим через $S_{0,T}^*$ подполугруппу полугруппы S_T^* состоящую из тех V для которых $\text{ind}V = 0$.

Будем говорить, что изометрическое представление $T : S \rightarrow B(H_T)$ является *инверсным представлением*, если S_T^* – инверсная полугруппа относительно операций умножения и инволюции, или, что то же самое, полугруппа $S_{0,T}^*$ есть полугруппа идемпотентов в S_T^* (полугруппа ортопроекторов). Согласно лемме 2.2 [2]

каждая полугруппа S обладает по крайней мере одним инверсным представлением. С другой стороны если на S определенный выше порядок является полным порядком, тогда все изометрические представления полугруппы S инверсны (см. [1]).

Простейшим примером инверсного представления, есть представление $L : \mathbb{Z}_+ \rightarrow B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ оператором сдвига $L(n)e_m = e_{n+m}$, где $e_n(m) = \delta_{n,m}$ (символ Кронекера) образуют ортонормированный базис в $l^2(\mathbb{Z}_+)$. В этом случае полугруппа $\mathbb{Z}_{+L}^*$ – есть бициклическая полугруппа.

3. ИНВЕРСНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$

Всюду далее полугруппа $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$ обозначается через M .

Мерфи в [7], а позднее Джанг в [6] показали, что у полугруппы M существуют, по крайней мере два изометрических представления, порождающих канонически не изоморфные C^* -алгебры. В работе [9] были исследованы изометрические представления T полугруппы M , когда проекторы $T(n)T^*(n)$ и $T(m)T^*(m)$ коммутируют для любых n, m из M . Из результатов этого параграфа следует, что представление T инверсно. Здесь фактически получаются те же результаты, что и в [9], но их доказательства опираются на понятие *начального элемента*. Данный параграф приводится для полноты изложения.

Рассмотрим два изометрических представления полугруппы M

$$T_1 : M \rightarrow B(l^2(M)), \quad T_0 : M \rightarrow B(l^2(\mathbb{Z}_+)),$$

задаваемые операторами сдвига

$$T_1(m)e_n = e_{m+n} \text{ и } T_0(m)f_n = f_{m+n},$$

где $\{e_n\}_{n \in M}$ и $\{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ – естественные ортонормированные базисы соответственно в $l^2(M)$ и $l^2(\mathbb{Z}_+)$. Как показано в [7] и [6] эти представления унитарно не эквивалентны.

Представления T_0 и T_1 порождают инверсные полугруппы $M_{T_0}^*$ и $M_{T_1}^*$. Представление T_1 инверсно, так как оно регулярно (см. [1], [2]), а T_0 инверсно, поскольку легко проверить, что $T_0^*(2)T_0(3)$ является оператором сдвига на $l^2(\mathbb{Z}_+)$ переводящий базисные элементы e_n в e_{n+1} . Тогда ясно, что $(T_0^*(2)T_0(3))^n = T_0(n)$, где $n \geq 2$. Отметим, что $M_{T_0}^*$ – бициклическая полугруппа с образующей $T_0^*(2)T_0(3)$.

В данном параграфе покажем, что каждое инверсное точное изометрическое неприводимое представление полугруппы M унитарно эквивалентно либо T_0 либо T_1 .

Пусть T неприводимое изометрическое представление полугруппы M .

Лемма 3.1. *Для любого $n \geq 2$, выполняется следующее равенство:*

$$T^*(n)T(n+1) = T^*(n+1)T(n+2).$$

Доказательство. Из равенства $T^*(m)T(m) = I$ следует

$$\begin{aligned} T^*(n)T(n+1) &= T^*(n)T^*(3)T(3)T(n+1) = T^*(n+3)T(n+4) \\ &= T^*(n+1)T^*(2)T(2)T(n+2) = T^*(n+1)T(n+2). \end{aligned}$$

□

Следствие 3.1. *Для всех $l, n, m \in M$ имеем:*

$$T^*(n)T(m) = T^*(n+l)T(m+l).$$

Для дальнейшего нам необходимы следующие элементарные тождества

$$T^*(2) = T^*(3)T^*(2)T(3), \quad T^*(3) = T^*(4)T^*(2)T(3), \quad T^*(3)T(2) = T^*(2)T^*(2)T(3).$$

Из этих тождеств непосредственно следует: если h_0 из $\ker T^*(2)T(3)$, тогда

$$T^*(2)T(3)h_0 = T^*(2)h_0 = T^*(3)h_0 = T^*(3)T(2)h_0 = 0.$$

Лемма 3.2. *Пусть $T : M \rightarrow B(H)$ – неприводимое представление. Предположим $\ker T^*(2)T(3) \neq 0$. Тогда это представление инверсно и унитарно эквивалентно представлению T_1 .*

Доказательство. Зафиксируем $h_0 \in \ker T^*(2)T(3)$, $\|h_0\| = 1$. Обозначим через H_0 – гильбертово подпространство в H , порожденное линейными комбинациями элементов из множества $\{h_n\}_{n \in M}$, где $h_n = T(n)h_0$. Очевидно $\|h_n\| = 1$.

Покажем, что $H_0 = H$. Так как $T(n)H_0 \subset H_0$, нам достаточно показать, что $T^*(n)h_m$ принадлежит H_0 для всех n из M . Из приведенных выше равенств следует

$$\begin{aligned} T^*(2)h_0 &= 0, \quad T^*(2)h_3 = T^*(2)T(3)h_0 = 0, \\ T^*(3)h_0 &= 0, \quad T^*(3)h_2 = T^*(2)T^*(2)T(3)h_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{и } T^*(3)h_4 = T^*(3)T(4)h_0 = T^*(2)T(3)h_0 = 0.$$

Теперь, учитывая, что если $n \in M \setminus \{0; 3\}$, то $n - 2$ также принадлежит M , имеем

$$T^*(2)h_n = T^*(2)T(2)h_{n-2} = h_{n-2}.$$

Аналогично, $T^*(3)h_m = h_{m-3}$, если m из $M \setminus \{0, 2, 4\}$.

Пусть теперь m произвольное число из M . Тогда

$$m = 3l + 2k, \quad T^*(m) = T^*(3)^l T^*(2)^k.$$

Поэтому $T^*(m)h_n = 0$ либо $T^*(m)h_n = h_{n-m}$. Таким образом, $H_0 = H$. Покажем, что множество $\{h_n\}_{n \in M}$ образует ортонормированный базис в H_0 . Пусть n, m из M и $n > m$. Предположим $n - m \neq 1$. Тогда

$$(h_m, h_n) = (T^*(n - m)h_0, h_0) = 0.$$

Если $n = m + 1$, тогда

$$T^*(m)T(n) = T^*(2)T(3) \text{ и } (h_m, h_n) = (h_0, T^*(2)T(3)h_0) = 0.$$

Для завершения доказательства, определим сплетающий оператор

$$U : H_0 \rightarrow l^2(M) \text{ полагая } Uh_n = e_n$$

Тогда $U^*T_1U = T$. □

Лемма 3.3. Пусть $T : M \rightarrow B(H)$ – инверсное представление. Тогда

$$P = T^*(3)T(2)T^*(2)T(3) \text{ и } Q = T^*(2)T(3)T^*(3)T(2)$$

проекторы и $Q < P$.

Доказательство. Ясно, что P и Q проекторы. Докажем, что $Q < P$.

$$\begin{aligned} PQ &= T^*(3)T(2)T^*(2)T(3)T^*(2)T(3)T^*(3)T(2) = \\ &= T^*(3)T(2)T^*(2)T(3)T^*(3)T(4)T^*(3)T(2) = \\ &= T^*(3)T(3)T^*(3)T(2)T^*(2)T(4)T^*(3)T(2) = \\ &= T^*(3)T(2)T^*(2)T(2)T(2)T^*(3)T(2) = \\ &= T^*(3)T(2)T(2)T^*(3)T(2) = T^*(3)T(4)T^*(3)T(2) = \\ &= T^*(2)T(3)T^*(3)T(2) = Q. \end{aligned}$$

□

Во время доказательства этого неравенства мы воспользовались следующими равенствами и леммой 3.1

$$T(2)T^*(2)T(3)T^*(3) = T(3)T^*(3)T(2)T^*(2), \quad T^*(2)T(4) = T(2).$$

Лемма 3.4. Пусть T не унитарное изометрическое представление полугруппы M . Тогда существует элемент являющийся начальным для любого оператора $T(n)$.

Доказательство. Обозначим $H_2 = \ker T^*(2)$. Тогда ясно, что $T^*(3) : H_2 \rightarrow H_2$. Действительно,

$$T^*(2)T^*(3)H_2 = T^*(3)T^*(2)H_2 = 0.$$

Таким образом возможны два случая $T^*(3)H_2 = \{0\}$ или $T^*(3)H_2 \neq \{0\}$. В первом случае за начальный элемент берется любой элемент H_2 . Во втором случае зафиксируем ненулевой элемент $h_2 \in H_2$, тогда $h_0 = T^*(3)h_2 \|T^*(3)h_2\|^{-1}$ является начальным элементом, поскольку можно применить к h_0 оператор $T^*(3)$ и $T^*(6) = T^*(2)T^*(2)T^*(2)$. $\square$

Лемма 3.5. Пусть $T : M \rightarrow B(H)$ – неприводимое не унитарное инверсное представление полугруппы M . Предположим, что $\ker T^*(2)T(3) = \{0\}$. Тогда это представление унитарно эквивалентно представлению T_0 .

Доказательство. Из условия $\ker T^*(2)T(3) = \{0\}$, следует: $P = I$ – тождественный оператор и $T^*(2)T(3)$ – изометрия. Покажем, что $T^*(2)T(3)$ не унитарный оператор. Действительно, согласно лемме 3.1 имеем

$$T^*(2)T(3)T^*(2)T(3) = T^*(2)T(3)T^*(3)T(4) =$$

$$T^*(2)T(3)T^*(3)T(2)T(2) = QT(2).$$

Оператор $QT(2)$ – не унитарный, так как есть произведение проектора и изометрического оператора. Поэтому и $T^*(2)T(3)$ – не унитарный изометрический оператор.

По теореме Уолда-фон-Неймана [8] изометрический оператор $T^*(2)T(3)$ есть прямая сумма оператора сдвига и унитарного оператора. Пусть h_0 из H начальный элемент для оператора $T^*(2)T(3)$.

Положим $h_n = (T^*(2)T(3))^n h_0$. Поскольку $P = I$, выполняются равенства $\|h_n\| = 1$ и $(h_n, h_m) = 0$, если $n \neq m$, то есть семейство $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормированное семейство в H .

Из равенств

$$1 = \|h_2\| = \|QT(2)h_0\| \text{ и } \|T(2)h_0\| = 1$$

следует $QT(2)h_0 = T(2)h_0$, то есть $h_2 = T(2)h_0$. Аналогично

$$h_3 = (T^*(2)T(3))T(2)h_0 = T(3)h_0.$$

Продолжая этот процесс получим

$$h_n = T(n)h_0.$$

Таким образом, гильбертово подпространство H_0 в H для которого семейство $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ – ортонормированный базис, инвариантно для оператора сдвига $T^*(2)T(3)$ и

$$(T^*(2)T(3))^n = T(n)$$

на H_0 , $n \in M$. Поэтому $H_0 = H$ и унитарный оператор

$$U : H_0 \rightarrow l^2(\mathbb{Z}_+), \quad Uh_n = e_n,$$

есть сплетающий оператор: $U^*T_0U = T$. □

Из лемм 3.2 и 3.5 получаем следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть T не унитарное инверсное представление полугруппы M . Тогда T унитарно эквивалентно либо T_0 либо T_1 .*

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Каждое изометрическое инверсное представление T полугруппы M можно представить в виде прямой суммы*

$$T = kT_0 \oplus lT_1 \oplus T_2,$$

где k и l – кратности представлений T_0 и T_1 соответственно, а T_2 – унитарное представление полугруппы M .

Замечание 3.1. Можно показать, что для любого изометрического представления T полугруппы M инверсность полугруппы M_T^* равносильна условию коммутативности элементарных проекторов $P_T(n) = T(n)T^*(n)$, $n \in M$. Неизвестно,

эквивалентно ли понятие инверсности понятию перестановочности элементарных проекторов для изометрического представления общей полугруппы.

4. β -ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ M

Из теоремы Кобурна [4] непосредственно следует, что у полугруппы $\mathbb{Z}_+$ только одно (с точностью до унитарной эквивалентности) бесконечное неприводимое представление. В данном параграфе покажем, что таких представлений у “деформированной” полугруппы M континуум.

Пусть H_0 гильбертово подпространство в $l^2(\mathbb{Z}_+)$ порожденное базисом $\{e_n\}_{n=2}^\infty$, $e_n(m) = \delta_{n,m}$. Обозначим через H_β гильбертово подпространство пространства $l^2(\mathbb{Z}_+)$ порожденное элементами из H_0 и элементом $g_\beta = \beta e_0 + t e_1$, где $\beta \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}_+$ и $\beta^2 + t^2 = 1$. Очевидно g_β с семейством $\{e_n\}_{n=2}^\infty$ образует ортонормированный базис в H_β и $H_\beta = \mathbb{C}g_\beta \oplus H_0$.

Пусть $P_\beta : l^2(\mathbb{Z}_+) \rightarrow H_\beta$ – ортопроектор из $l^2(\mathbb{Z}_+)$ на H_β . Определим представление $\tau_\beta : M \rightarrow B(H_\beta)$ полагая

$$\tau_\beta(n) = P_\beta T_0(n) P_\beta,$$

где $T_0 : M \rightarrow B(l^2(\mathbb{Z}_+))$ – инверсное представление определенное выше.

Так как $T_0(n)$ отображает H_β на себя, представление $\tau_\beta : M \rightarrow B(H_\beta)$ – изометрическое представление полугруппы M .

Лемма 4.1. *Представление $\tau_\beta : M \rightarrow B(H_\beta)$ – инверсное представление тогда и только тогда когда $\beta = 0$ либо $|\beta| = 1$.*

Доказательство. Если $\beta = 0$, тогда $g_0 = e_1$ и $H_0 = l^2(\mathbb{N})$. Поэтому представление $\tau_0 : M \rightarrow B(l^2(\mathbb{N}))$ унитарно эквивалентно представлению T_0 . Если $|\beta| = 1$, тогда $g_\beta = \beta e_0$ и $H_\beta = l^2(M)$. В этом случае представление $\tau_\beta : M \rightarrow B(l^2(M))$ унитарно эквивалентно инверсному представлению T_1 .

Предположим теперь $0 < |\beta| < 1$. Покажем, что в этом случае оператор $\tau_\beta^*(3)\tau_\beta(2)\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)$ не является проектором. Посчитаем сначала $\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)$ на базисных элементах g_β и e_n пространства H_β .

Имеем $\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)e_n = e_{n+1}$, $n = 2, 3, \dots$, то есть $\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)$ – есть оператор одностороннего сдвига на H_0 . Отсюда, сужение $\tau_\beta^*(3)\tau_\beta(2)\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)$ на H_0 есть

тождественный оператор. Имеем

$$(\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)g_\beta, g_\beta) = (\tau_\beta(3)g_\beta, \tau_\beta(2)g_\beta) = \beta t,$$

$$(\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)g_\beta, e_2) = (\tau_\beta(3)g_\beta, e_4) = t,$$

$$(\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)g_\beta, e_n) = 0, \text{ при } n \geq 3.$$

Поэтому

$$\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)g_\beta = \beta t g_\beta + t e_2.$$

Следовательно,

$$\tau_\beta(2)(\beta t g_\beta + t e_2) = \beta t(\beta e_2 + t e_3) + t e_4.$$

Для завершения доказательства, найдем $\tau_\beta^*(3)e_2$, $\tau_\beta^*(3)e_3$ и $\tau_\beta^*(3)e_4$. Очевидно

$$(\tau_\beta^*(3)e_2, g_\beta) = 0 = (\tau_\beta^*(3)e_2, e_n), \quad n \geq 2,$$

то есть $\tau_\beta^*(3)e_2 = 0$. Далее

$$(\tau_\beta^*(3)e_3, e_n) = (T^*(3)e_4, e_n) = 0 \text{ для всех } n = 2, 3, \dots, \text{ и}$$

$$(\tau_\beta^*(3)e_3, g_\beta) = (e_3, \beta e_3 + t e_4) = \bar{\beta}, \quad (\tau_\beta^*(3)e_4, g_\beta) = (e_4, \beta e_3 + t e_4) = t.$$

Таким образом, $\tau_\beta^*(3)e_3 = \bar{\beta}g_\beta$, $\tau_\beta^*(3)e_4 = t g_\beta$. Поэтому

$$\tau_\beta^*(3)\tau_\beta(2)\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)g_\beta = (|\beta|^2 t^2 + t^2)g_\beta.$$

Из условий, $0 < |\beta| < 1$ и $|\beta|^2 t^2 + t^2 = 1$ следует, что $|\beta|^2 t^2 + t^2 < 1$ и $\tau_\beta^*(3)\tau_\beta(2)\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)$ – диагональный оператор относительно базиса $g_\beta, e_2, e_3, \dots$, с собственными значениями $|\beta|^2 t^2 + t^2$ и 1. Так как этот оператор не проектор, $M_{\tau_\beta}^*$ – не инверсная полугруппа. $\square$

Теорема 4.1. (1) *Представление τ_β полугруппы M является неприводимым и изометрическим.*

(2) *Если $\beta_1 \neq \beta_2$, $|\beta_1| < 1$, то представления T_{β_1} и T_{β_2} унитарно не эквивалентны.*

Доказательство. (1) Заметим, что если $|\beta|^2 t^2 + t^2 = 1$, то $\beta = 0$. Следовательно, получим представление τ_0 которое, как было отмечено ранее, не только неприводимое и изометрическое, но и инверсное. В противном случае, пусть

$$Q_\beta = c(I - \tau_\beta^*(3)\tau_\beta(2)\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)), \text{ где } c = \frac{1}{1 - |\beta|^2 t^2 - t^2}.$$

Тогда Q_β – проектор на одномерное пространство $\mathbb{C}g_\beta$ и $A_\beta = (I - Q_\beta)\tau_\beta^*(2)\tau_\beta(3)(I - Q_\beta)$ – оператор одностороннего сдвига на H_0 обращающийся в нуль на g_β , то есть $A_\beta g_\beta = 0$, $A_\beta e_n = e_{n+1}$, $n = 2, 3, \dots$

Следовательно C^* -алгебра порожденная оператором A_β есть алгебра Теплица на H_0 , содержащая все компактные операторы из $(1 - Q_\beta)B(H_\beta)(1 - Q_\beta)$. Поэтому каждое инвариантное подпространство для C^* -алгебры, порожденной представлением τ_β , либо содержит H_0 , либо ортогонально к H_0 .

Заметим теперь, что, поскольку $H_\beta = \mathbb{C}g_\beta \oplus H_0$ и $\tau_\beta(2)g_\beta \in H_0$, представление τ – неприводимо.

(2) Пусть $\tau_{\beta_1} \sim \tau_{\beta_2}$, $0 < |\beta_1| < 1$. Покажем, что $\beta_1 = \beta_2$.

Пусть $U : H_{\beta_1} \rightarrow H_{\beta_2}$ такой унитарный оператор, что $\tau_{\beta_1} = U\tau_{\beta_2}U^*$. Так как каждый элемент из H_{β_i} на котором операторы $\tau_{\beta_i}^*(2)$ и $\tau_{\beta_i}^*(3)$ обращаются в нуль, кратен элементу g_{β_i} , $i = 1, 2$, унитарный оператор $U : H_{\beta_2} \rightarrow H_{\beta_2}$ переводит пространство $\mathbb{C}g_{\beta_1}$ на $\mathbb{C}g_{\beta_2}$, то есть

$$Ug_{\beta_1} = e^{i\theta}g_{\beta_2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Поскольку оператор $V = e^{-i\theta}U$ унитарен, $\tau_{\beta_1} = V\tau_{\beta_2}V^*$ и $Vg_{\beta_1} = g_{\beta_2}$. Следовательно,

$$\beta_1 t_1 = (\tau_{\beta_1}^*(2)\tau_{\beta_1}(3)g_{\beta_1}, g_{\beta_1}) = (\tau_{\beta_2}^*(2)\tau_{\beta_2}(3)g_{\beta_2}, g_{\beta_2}) = \beta_2 t_1,$$

и $|\beta_1|^2 t_1^2 + t_1^2 = |\beta_2|^2 t_2^2 + t_2^2$ – собственное значение оператора $\tau_{\beta_i}^*(3)\tau_{\beta_i}(2)\tau_{\beta_i}^*(2)\tau_{\beta_i}(3)$ на вектора g_{β_i} , $i = 1, 2$. Отсюда $\beta_1 = \beta_2$. $\square$

Естественно возникает вопрос описания всех неприводимых изометрических представлений полугруппы M . Нам неизвестно, являются ли все изометрические неприводимые бесконечномерные представления полугруппы M унитарно эквивалентными некоторому представлению $\tau_\beta : M \rightarrow B(H_\beta)$.

Автор выражает особую благодарность Григоряну Сурену Аршаковичу за постановку задачи и полезные обсуждения, а также благодарит В. А. Арзуманяна, прочитавшего рукопись этой работы и сделавшего существенные замечания, улучшившие текст статьи.

Abstract. In this paper we study isometric representations of the semigroup $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$. The notion of inverse representation is introduced and a complete (to within unitary

equivalence) description of such representations of that semigroup is provided. A class of irreducible non-inverse representations (β -representations of the semigroup $\mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$) is described.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. А. Аухадиев, В. Н. Тепоян, "Isometric representations of totally ordered semigroups, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **33**, no. 3, 239-243 (2012).
- [2] С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов, "C*-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением", *Сиб. матем. журн.*, **51**, no. 1, 16 – 25 (2010).
- [3] А. Клиффорд, Г. Престон, Алгебраическая теория полугрупп, Т.1, Мир, М., 1972
- [4] L. A. Coburn, "The C*-algebra generated by an isometry", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**, 722 – 726 (1967).
- [5] R. G. Douglas, "On the C*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries", *Acta Math.* **128**, 143 – 152 (1972).
- [6] S. Y. Jang, "Uniqueness property of C*-algebras like the Toeplitz algebras", *Trends Math.*, **6**, 29 – 32 (2003).
- [7] G. J. Murphy, "Ordered groups and Toeplitz algebras", *J. Operator Theory*, **18**, 303 – 326 (1987).
- [8] Дж. Мерфи, C*-алгебры и Теория Операторов, М., Факториал (1997).
- [9] I. Raeburn, S. T. Vittadello, "The isometric representation theory of a perforated semigroup", *J. Operator Theory*, **62:2**, 357 – 370 (2009).
- [10] S. T. Vittadello, "The isometric representation theory of numerical semigroups, *Integral Equations and Operator Theory*, **64:4**, 573 – 597 (2009).

Поступила 22 августа 2012