

ОДНО ЗАМЕЧАНИЕ О КОММУТАТИВНОСТИ ОБРАЗА  
A-ЗНАЧНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

М. И. КАРАХАНИЯН, Г. А. КАМАЛЯН

Ереванский государственный университет

E-mail: *m\_karakhanyan@yahoo.com*

Аннотация. Пусть  $BL(\mathbb{H})$  – комплексная банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих на гильбертовом пространстве  $\mathbb{H}$ . Как показали И. Глобевник и И. Видав (см. [1, 2]), если множество значений операторнозначной аналитической функции, определенной в области  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ , состоит из нормальных операторов, то образ  $f(\mathcal{D})$  – коммутативное множество в алгебре  $BL(\mathbb{H})$ . В настоящей работе вышеуказанный результат усиливается для топологических алгебр (см. также [3]).

**MSC2010 number:** 46J45, 46H35.

**Ключевые слова:** локально выпуклая алгебра; квазинормальный элемент.

Пусть  $\mathcal{A}$  – комплексная банахова алгебра с единицей  $\mathbf{1}$  (мы предполагаем, что  $\|\mathbf{1}\| = 1$  и  $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$  для всех  $x, y \in \mathcal{A}$ ).

Предположим, что одновременно на алгебре  $\mathcal{A}$  задана локально выпуклая топология  $\tau$ , которая удовлетворяет следующим свойствам: тождественное отображение  $(\mathcal{A}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathcal{A}, \tau)$  является непрерывным, а умножение раздельно  $\tau$ -непрерывным. Напомним, что все стандартные операторные топологии обладают этими свойствами [4, 5].

Пусть  $\{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  – система алгебраических полунорм, которые определяют топологию  $\tau$ , а  $(\mathcal{A}, \tau)$  есть полная, хаусдорфова локально выпуклая алгебра. Элемент  $a \in \mathcal{A}$  назовем “квазинормальным”, если существует элемент  $a^+ \in \mathcal{A}$  такой, что  $[a, a^+] = aa^+ - a^+a = 0$  и для каждой полунормы  $P_\lambda$  имеем

$$(1) \quad P_\lambda \left( \exp \frac{1}{2} (za - za^+) \right) = o(|z|^{1/2}) \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть  $C(\Delta, (\mathcal{A}, \tau))$  – пространство всех непрерывных  $\mathcal{A}$ -значных функций на  $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , с поточечными операциями и определяющей системой полунорм  $\{P_{\lambda, K}\}_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ K \in \mathcal{K}(\Delta)}}$ , где  $\mathcal{K}(\Delta)$  – множество всех компактных подмножеств  $\Delta$ , а

$$P_{\lambda, K}(f) = \sup\{P_\lambda(f(z)) : z \in K\}.$$

Обозначим через  $\text{Hol}(\Delta; (A, \tau))$  подпространство пространства  $C(\Delta; (A, \tau))$ , состоящее из аналитических функций на  $\Delta$  со значением в  $(A, \tau)$ . Это те  $A$ -значные функции из алгебры  $C(\Delta; (A, \tau))$ , которые аппроксимируются суммами вида  $\sum_{k=1}^N \omega_k(z) a_k$ , где  $\omega_k$  – скалярные аналитические функции,  $a_k \in A$ . Таким образом (см. [6]), всякий элемент  $f \in \text{Hol}(\Delta; (A, \tau))$  однозначно представим в окрестности каждой точки  $z_0 \in \Delta$ , сходящимся в топологии  $\tau$  рядом вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

где  $b_k \in A$ . Если  $f \in \text{Hol}(\Delta; (A, \tau))$  и  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ , то ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$  абсолютно сходится в замкнутом диске  $\bar{\Delta}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ ,  $(0 \leq r < 1)$  к функции  $f$  в алгебре  $(A, \tau)$ , т.е. для любой полунормы  $P_\lambda$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) сходится числовой ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} P_\lambda(a_k) r^k$ . Если сумму этого ряда обозначить через  $P_{\lambda,r}(f)$ , то возникшая система полунорм  $\{P_{\lambda,r}\}_{\substack{\lambda \in \Delta \\ 0 \leq r < 1}}$  – определяющая система полунорм в пространстве  $\text{Hol}(\Delta; (A, \tau))$ , относительно которой  $\text{Hol}(\Delta; (A, \tau))$  – полное, хаусдорфово, локально выпуклое топологическое пространство.

Напомним, что ниже доказанный результат в случае банаховых алгебр ранее был получен в работе [3].

**Теорема 1.** Пусть  $A$  – комплексная банахова алгебра, на которой параллельно задана полная, хаусдорфова, локально выпуклая топология  $\tau$  и  $f : \Delta \rightarrow (A, \tau)$  есть такая  $A$ -значная аналитическая функция, что при каждом  $z \in \Delta$  элемент  $f(z)$  – квазинормальный элемент алгебры  $A$ . Тогда множество  $f(\Delta)$  – коммутативное подмножество в алгебре  $A$ .

*Доказательство.* Так как  $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$  при  $z \in \Delta$ , то при  $0 \leq r < 1$  имеем  $\sum_{j=0}^{\infty} P_\lambda(a_j) r^j < \infty$  при каждом  $\lambda \in \Lambda$ . Ввиду того, что  $[f(z), f^+(z)] = 0$ , то в раскрытом виде это означает, что

$$(2) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^j [a_m, a_{j-m}^+] \right) z^m \bar{z}^{j-m} = 0.$$

Так как  $a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$ , то элемент  $a_j$  является квазинормальным и поэтому  $P_\lambda(a_j^+) \leq M(1 + 2P_\lambda(a_j))$  (см. [3]) при каждом  $\lambda \in \Lambda$ , откуда имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_\lambda(a_j^+) r^j \leq M \left[ \sum_{j=0}^{\infty} r^j + 2 \sum_{j=0}^{\infty} P_\lambda(a_j) r^j \right] < \infty,$$

при  $0 \leq r < 1$ .

Из сходимости рядов  $\sum_{j=0}^{\infty} P_\lambda(a_j) r^j$  и  $\sum_{j=0}^{\infty} P_\lambda(a_j^+) r^j$  следует, что при каждом  $\lambda \in \Lambda$  и  $0 \leq r < 1$  сходится также ряд

$$(3) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^j [a_m, a_{j-m}^+] \right) r^j.$$

Таким образом, ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^j [a_m, a_{j-m}^+] \right) z^m \bar{z}^{j-m}$  равномерно сходится в каждом замкнутом диске  $\bar{\Delta}_r$  ( $0 \leq r < 1$ ).

Пусть  $n \in \mathbb{N}$ , тогда умножая (2) на  $z^{n-1}$  и почленно интегрируя по границе диска  $\bar{\Delta}_r$ , получаем

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} [a_j, a_{j+n}^+] r^{2(j+n)},$$

при  $0 \leq r \leq 1$ . Сходимость ряда (3) показывает, что ряд

$$h_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} [a_j, a_{j+n}^+] z^{2(j+n)}$$

абсолютно сходится в  $\Delta$  и поэтому  $\mathcal{A}$ -значная функция  $h_n(z)$  является  $(\mathcal{A}, \tau)$ -аналитической функцией, т.е.  $h_n \in \text{Hol}(\Delta; (\mathcal{A}, \tau))$ .

Из условия  $h_n(r) = 0$  имеем  $[a_j, a_{j+n}^+] = 0$  при  $j \in \mathbb{N}_0$ . Ввиду произвольности  $n \in \mathbb{N}_0$  имеем  $[a_j, a_\ell^+] = 0$ , где  $j, \ell \in \mathbb{N}_0$ . Как известно (см. [7, 8]), согласно обобщенной теореме фон Неймана-Фуглида: если в алгебре  $(\mathcal{A}, \tau)$  элемент  $a$  квазинормален и для некоторого элемента  $x \in (\mathcal{A}, \tau)$  коммутатор  $[a, x] = 0$ , то тогда  $[a^+, x] = 0$ . Так как элементы  $a_j$  являются квазинормальными, то в силу этой теоремы имеем  $[a_j, a_\ell] = 0$ . Теорема доказана.

Будем говорить, что двусторонний идеал  $J$  удовлетворяет свойству  $(GFP)$ , если для каждого квазинормального элемента  $a \in \mathcal{A}$  и элемента  $b \in \mathcal{A}$  из условия  $[a, b] \in J$  следует  $[a^+, b] \in J$ .

Пусть  $J$  – замкнутый в топологии  $\tau$  двусторонний идеал в алгебре  $\mathcal{A}$ . Будем говорить, что элемент  $a \in \mathcal{A}$  квазинормален по модулю идеала  $J$ , если существует такой квазинормальный элемент  $b \in \mathcal{A}$ , что  $a - b \in J$ .

Из теоремы 1 получаются следующие результаты:

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{A}$  – комплексная банахова алгебра, на которой параллельно задана полная, хаусдорфова, локально выпуклая топология  $\tau$ . Тогда каждый замкнутый в этой топологии двусторонний идеал  $J \subset \mathcal{A}$  обладает свойством (GFP).

**Следствие 2.** Пусть  $\mathcal{A}$  – комплексная банахова алгебра, на которой параллельно задана полная, хаусдорфова, локально выпуклая топология  $\tau$  и  $f : \Delta \rightarrow (\mathcal{A}, \tau)$  есть такая  $\mathcal{A}$ -аналитическая функция, что для каждого  $z \in \Delta$ ,  $f(z)$  – квазинормальный элемент по модулю  $J$ . Тогда образ  $f(\Delta)$  – коммутативное по модулю идеала  $J$  подмножество в алгебре  $\mathcal{A}$ .

Отметим, что если в определении квазинормальности (1) условие  $o(|z|^{1/2})$  заменить на  $O(|z|^{1/2})$ , то результаты работы не верны.

**Abstract.** Let  $BL(\mathbb{H})$  be a complex Banach algebra of all bounded linear operators acting on the Hilbert space  $\mathbb{H}$ . J. Globevnik and I. Vidav proved that when the range of an operator-valued analytic function with domain of definition  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$  consists of the normal operators, then  $f(\mathcal{D})$  is a commutative set in the algebra  $BL(\mathbb{H})$ . The paper strengthens this result for the topological algebras.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Globevnik, I. Vidav, “A note on normal operator valued analytic functions”, Proc. Amer. Math. Soc., **37**, No. 2, 619 – 621 (1973).
- [2] R. J. Fleming and J. E. Jamison, “Commutative ranges of analytic functions in Banach algebras”, Proc. Amer. Math. Soc., **93**, No. 1, 48 – 50 (1985).
- [3] М. И. Караханян, “О коммутативности образа  $\mathcal{A}$ -значной аналитической функции”, Изв. НАН Армении, Математ., **XXXI**, No. 1, 35 – 45 (1996).
- [4] F. Bonsall, T. Duncan, Complete Normed Algebras, Springer (1973).
- [5] У. Браттели, Д. Робинсон, Операторные Алгебры и Квантовая Статистическая Механика”, Москва, Мир (1982).
- [6] А. Я. Хелемский, Гомология в Банаховых и Топологических Алгебрах”, Изд. МГУ, (1986).
- [7] М. И. Караханян, “Асимптотический вариант общих теорем о коммутаторах”, Функциональный анализ и его прилож., **39**, No. 4, 80 – 83 (2005).
- [8] I. M. Karakhanyan, M. I. Karakhanyan, “A remark on asymptotic property of commutators”, Proceed. of the YSU 2, 63 – 66 (2009).

Поступила 30 апреля 2011