

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МАРТИНГАЛОВ И НЕКОТОРЫЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Г. А. КАРАГУЛЯН

Институт математики НАН Армении
E-mail: *g.karagulyan@yahoo.com*

Аннотация. Рассматриваются некоторые задачи сходимости мартингалов почти всюду. Получены разные теоремы эквивалентности, которые позволяют заменить общие мартингалы на мартингалы Хаара в некоторых задачах в теории мартингалов. Рассмотрены приложения этих результатов в теории дифференцирования интегралов и в некоторых вопросах сходимости сумм Римана.

MSC2010 number: 42B25

Ключевые слова: сходимость мартингалов; максимальная функция; дифференцирование интегралов; суммы Римана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования по сходимости почти всюду мартингалов тесно связаны с разными проблемами гармонического анализа. Многие результаты в теории мартингалов являются прямыми обобщениями теорем о рядах Фурье-Хаара, дифференцирование интегралов и максимальных функций. Одним из центральных теорем в теории мартингалов является теорема Дуба [4], которая утверждает, что L^1 -ограниченные мартингалы сходятся почти всюду. Аналогичную проблему в многомерном случае рассматривал Р. Кароли [6]. Он доказывает сходимость почти всюду d -кратных мартингалов, ограниченных в пространстве $L \log^{d-1} L$.

В настоящей работе установлены некоторые теоремы эквивалентности мартингалов как для одномерных, так и для кратных мартингалов. Доказывается, что в некоторых задачах сходимости почти всюду мартингалов можно рассматривать просто мартингалы Хаара. Рассматриваются также некоторые приложения полученных результатов в теории дифференцирования интегралов, максимальных функций и сумм Римана.

Рассматривается вероятностное пространство измеримых по Лебегу в множестве $[0, 1)$. Пусть $\mathcal{L}$ есть семейство измеримых по Лебегу множеств в $[0, 1)$. Обозначим через $\mathcal{S}(E)$ минимальную σ -алгебру, содержащую семейство множеств $E \subset \mathcal{L}$. Будем говорить, что семейство σ -алгебр $\{\mathcal{A}_n, n = 1, 2, \dots\}$ в $[0, 1)$ регулярно, если выполняются следующие условия:

- 1) $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$,
- 2) $\mathcal{A}_n$ порождается конечным семейством интервалов вида $[a, b)$,
- 3) σ -алгебра $\mathcal{S}(\cup_n \mathcal{A}_n)$ не содержит атомов.

Будем рассматривать вероятностное пространство $(Q_d, \mathcal{L}_d, m_d)$ в d -мерном единичном кубе $Q_d = [0, 1)^d$, причем $\mathcal{L}_d$ — соответствующая σ -алгебра, а m_d — мера Лебега в Q_d . Пусть $\{\mathcal{A}_n^{(k)}, n \in \mathbb{N}\}$, $k = 1, 2, \dots, d$, есть последовательности σ -алгебр в $[0, 1)$. Рассмотрим их Декартово произведение

$$(1.1) \quad \mathcal{A}_{\mathbf{n}} = \mathcal{A}_{n_1, \dots, n_d} = \otimes_{k=1}^d \mathcal{A}_{n_k}^{(k)}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d.$$

Будем говорить, что кратная последовательность $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ регулярна, если регулярна каждая компонента $\{\mathcal{A}_n^{(k)}, n \in \mathbb{N}\}$. Для данной функции $f(x) \in L^1(Q_d)$ обозначим через

$$E^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}} f(x), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d,$$

условное математическое ожидание $f(x)$ относительно σ -алгебры $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$. Функция $\Theta : \mathcal{L}_d \rightarrow \mathcal{L}_d$ является мера-сохраняющее преобразование (MP -преобразование) куба Q_d , если

$$\begin{aligned} \Theta(E \cup F) &= \Theta(E) \cup \Theta(F), \\ m_d(\Theta(E)) &= m_d(E), \end{aligned}$$

для любого множества $E, F \in \mathcal{L}_d$. Если Θ есть MP -преобразование куба Q_d , то легко проверить, что

$$(1.2) \quad \begin{aligned} &\text{если } E \cap F = \emptyset, \text{ то } m_d(\Theta(E) \cap \Theta(F)) = 0, \\ &\text{если } E \subset F, \text{ то } m_d(\Theta(F) \setminus \Theta(E)) = 0. \end{aligned}$$

Для произвольной измеримой функции $f(x)$ определим $\Theta f(x)$ следующим образом: если

$$(1.3) \quad f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{I}_{E_i}(x),$$

где $E_i \in \mathcal{L}_d$, $i = 1, 2, \dots, m$, — семейство попарно непересекающихся измеримых множеств, то

$$\Theta f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{I}_{\Theta(E_i)}(x).$$

В общем случае $f(x)$ является поточечным пределом последовательности функций $s_n(x)$ формы (1.3), т.е.

$$(1.4) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad x \in Q_d.$$

Используя (1.2) и стандартные рассуждения, можно легко проверить, что $\Theta s_n(x)$ сходится почти всюду и предельная функция не зависит от представления (1.4). Обозначим этот предел через $\Theta f(x)$.

Для данной последовательности натуральных чисел $N = \{\nu_i \in \mathbb{N} : \nu_1 < \nu_2 < \dots\}$ рассмотрим кратную последовательность σ -алгебр

$$(1.5) \quad \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{n}} = \mathcal{A}_{\nu_{n_1}, \dots, \nu_{n_d}}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d.$$

Будем говорить, что последовательность (1.5) является подпоследовательностью (1.1).

Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1.1. Пусть $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ и $\{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ — произвольные кратные регулярные последовательности σ -алгебр в единичном кубе Q_d . Тогда для любой последовательности чисел $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, существует мера-сохраняющее преобразование Θ , последовательность множеств $G_{\mathbf{n}} \subset Q_d$ и подпоследовательность $\{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{n}}\}$ из $\{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}\}$ такие, что

$$(1.6) \quad G_{\mathbf{n}} \subset G_{\mathbf{n}'}, \quad \text{при } \mathbf{n} \leq \mathbf{n}',$$

$$(1.7) \quad |G_{\mathbf{n}}| > 1 - \varepsilon_m, \quad \text{при } \min_{1 \leq i \leq d} n_i \geq m$$

$$(1.8) \quad (\Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}}) f(x) = (\mathbf{E}^{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{n}}} \circ \Theta) f(x), \quad x \in G_{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

для любой функции $f \in L^1(Q_d)$, где $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d) \leq \mathbf{n}' = (n'_1, \dots, n'_d)$ означает $n_i \leq n'_i$, $i = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.2. Если $\{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ является подпоследовательностью регулярной кратной последовательности σ -алгебр $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$, то существует мера-сохраняющее преобразование Θ такое, что

$$(1.9) \quad (\Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}}) f(x) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}} \circ \Theta) f(x) \text{ п.в.}$$

для любой функции $f \in L^1(Q_d)$.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Будем говорить, что множество из $[0, 1)$ —простое, если оно является конечным объединением интервалов $[\alpha, \beta)$. Если конечное семейство простых множеств $A = \{a_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ удовлетворяет условиям

$$\cup_{i=1}^n a_i = [0, 1), \quad a_i \cap a_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

то будем говорить, что A есть разбиение $[0, 1)$. Любое разбиение A определяет σ -алгебру $\mathcal{A}$ порожденную атомами a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Обозначим семейство этих σ -алгебр через $\mathfrak{M}$. Используем буквы A , B и C для обозначения разбиений, а $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ соответствующие им σ -алгебры. Для любых двух σ -алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначим через

$$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{S}\{a \cap b : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

σ -алгебру порожденную множествами вида $a \cap b$, где $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Пусть a есть простое множество. Легко проверить, что функция

$$\phi_a(x) = |[0, x) \cap a|$$

взаимно однозначно отображает a в $[0, |a|)$, так, что

$$|E| = |\phi_a(E)|$$

для любого измеримого по Лебегу множества $E \subset a$. Для произвольных простых множеств a и b обозначим

$$\phi_{a,b} = \phi_b^{-1} \circ \left(\frac{|b|}{|a|} \phi_a \right).$$

Легко усмотреть, что $\phi_{a,b}$ определяет взаимно однозначное отображение из a в b и имеем

$$|\phi_{a,b}(E)| = \frac{|b|}{|a|} |E|$$

если $E \subset a$ измеримо. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{M}$, то обозначим через $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ МР-преобразование определяемое следующим образом. Сначала рассмотрим случай $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Возьмем произвольную точку $x \in [0, 1)$. Имеем $x \in a$ для некоторого $a \in \mathcal{A}$ и $a = \cup_{i=1}^k b_i$, где $b_i \in \mathcal{B}$. Пусть

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}](x) = \{\phi_{a,b_i}(x) : i = 1, \dots, k\}$$

и

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}](E) = \bigcup_{x \in E} [\mathcal{A}, \mathcal{B}](x).$$

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – произвольные, то $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, и мы определим

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = [\mathcal{A}, \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}].$$

Легко заметить, что $\theta = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ определяет MP -преобразование. Будем говорить, что $g(x)$ есть перестановка $f(x)$, если

$$P\{g(x) > \lambda\} = P\{f(x) > \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Обозначим это соотношение через $g \sim f$. Легко проверить следующие простые свойства MP -преобразований и условных математических ожиданий $\mathbf{E}^{\mathcal{A}}$.

P1) Для любого MP -преобразования θ и для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на Q_d , имеем

$$\theta f(x) \sim f(x).$$

P2) Для любого MP -преобразования θ оператор $\theta f(x)$ является линейно ограниченным в $L^1(Q_d)$ и

$$\|\theta\|_{L^1(Q_d) \rightarrow L^1(Q_d)} = 1.$$

P3) Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ имеем $\theta(a) = a$, $a \in \mathcal{A}$, где $\theta = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$.

P4) Для любых σ -алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\mathbf{E}^{\mathcal{A}} f(x) = \mathbf{E}^{\mathcal{B}} f(x), \quad x \in a, \quad a \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}.$$

P5) Если θ есть MP -преобразование, то

$$\theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}} = \mathbf{E}^{\theta(\mathcal{A})} \circ \theta.$$

P6) Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ и $\theta = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ то

$$\mathbf{E}^{\mathcal{A}} \circ \theta = \mathbf{E}^{\mathcal{A}} = \mathbf{E}^{\mathcal{B}} \circ \theta.$$

P7) Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ и $\theta = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]$, то

$$\mathbf{E}^{\theta(\mathcal{C})} \circ \theta = \mathbf{E}^{\theta(\mathcal{C}) \wedge \mathcal{B}} \circ \theta.$$

P8) Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ и $\theta = [\mathcal{A}, \mathcal{C}]$, то из равенства

$$\mathbf{E}^{\mathcal{A}} g(x) = \mathbf{E}^{\mathcal{B}} g(x)$$

вытекает

$$\mathbf{E}^{\mathcal{B}} g(x) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}} \circ \theta) g(x).$$

Любые MP -преобразования θ и математические ожидания $\mathbf{E}^A$ будут рассматриваться как линейные ограниченные операторы из $L^1[0, 1)$. Пусть

$$(2.1) \quad \{\mathcal{A}_k : k = 1, 2, \dots\},$$

$$(2.2) \quad \{\mathcal{B}_k : k = 1, 2, \dots\},$$

есть последовательности σ -алгебр из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условиям

$$\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}, \quad \mathcal{B}_k \subset \mathcal{B}_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \max_{a \in \mathcal{A}_n} |a| \rightarrow 0, \quad \max_{b \in \mathcal{B}_n} |b| \rightarrow 0.$$

Отметим, что если A_n состоит из интервалов, то (2.1) будет регулярным. Мы связываем с (2.1) и (2.2) последовательность MP -преобразований Θ_k , $k = 1, 2, \dots$, определенных следующим образом. Возьмем

$$\Theta_1 = [\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1], \quad \Theta_k = [\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k), \mathcal{B}_k] \circ \Theta_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Обозначив

$$(2.3) \quad \theta_1 = \Theta_1, \quad \theta_k = [\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k), \mathcal{B}_k], \quad k = 2, 3, \dots,$$

имеем

$$(2.4) \quad \Theta_k = \theta_k \circ \Theta_{k-1} = \theta_k \circ \theta_{k-1} \circ \dots \circ \theta_1.$$

Лемма 2.1. *Для любых последовательностей (2.1) и (2.2)*

$$(2.5) \quad \mathcal{A}_1, \Theta_1(\mathcal{A}_2), \dots, \Theta_{n-1}(\mathcal{A}_n) \dots,$$

является возрастающей последовательностью σ -алгебр из $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Очевидно, что $\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k) \in \mathfrak{M}$. Так как $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A}_{k+1}$, то получаем

$$(2.6) \quad \Theta_k(\mathcal{A}_k) \subset \Theta_k(\mathcal{A}_{k+1}).$$

Согласно (2.3) и свойства РЗ) имеем $\theta_k(\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)) = \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)$. Отсюда, используя (2.4), получаем

$$\Theta_k(\mathcal{A}_k) = \theta_k(\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)) = \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k),$$

которое вместе с (2.6) дает $\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k) \subset \Theta_k(\mathcal{A}_{k+1})$. Первое и второе свойства регулярности (2.5) легко следуют из соответствующих свойств $\mathcal{A}_k$, что и завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 2.2. *Для последовательности (2.1) имеем*

$$\Theta_l(\mathcal{A}_k) = \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k), \quad l \geq k.$$

Доказательство. Из (2.3) и свойства P3), получаем

$$(2.7) \quad \theta_m(a) = a, \quad a \in \Theta_{m-1}(\mathcal{A}_m).$$

По лемме 2.1 имеем

$$(2.8) \quad \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k) \subset \Theta_{m-1}(\mathcal{A}_m), \quad m \geq k.$$

Из (2.7) и (2.8) следует

$$\theta_m(a) = a, \quad a \in \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k),$$

и следовательно, получим

$$(2.9) \quad \theta_m(\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)) = \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k), \quad m \geq k.$$

Из (2.4) имеем

$$\Theta_l = \theta_l \circ \theta_{l-1} \circ \dots \circ \theta_k \circ \Theta_{k-1}.$$

Отсюда, используя (2.9) для $m = k, k+1, \dots, l$, следует

$$\Theta_l(\mathcal{A}_k) = \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k), \quad l \geq k.$$

□

Лемма 2.3. *Если (2.1) регулярна, то существует МР-преобразование Θ такое, что*

$$(2.10) \quad \|\Theta_n(f) - \Theta(f)\|_{L_1} \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

для любой функции $f \in L^1[0, 1)$.

Доказательство. Сначала докажем сходимост $\Theta_n(f)$ в метрике L_1 . Так как последовательность (2.1)–регулярна, имеем

$$\|\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}(f) - f\|_{L_1} \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число N такое, что

$$\|\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}(f) - f\|_{L_1} < \varepsilon, \quad n > N.$$

Так как Θ_k мера-сохраняющее, из последнего неравенства вытекает

$$(2.11) \quad \|\Theta_k[\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}(f)] - \Theta_k(f)\|_{L_1} < \varepsilon, \quad n > N,$$

для любых $k = 1, 2, \dots$. Из леммы 2.2 следует

$$\Theta_m[\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}(f)] = \Theta_n[\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}(f)], \quad m > n.$$

Комбинируя это с (2.11), мы получим неравенство

$$\|\Theta_m(f) - \Theta_n(f)\|_{L_1} < 2\varepsilon, \quad m > n > N,$$

из которого вытекает сходимость $\Theta_k(f)$ в L^1 . Обозначив предельную функцию через $U(f)$, получим

$$(2.12) \quad \|\Theta_n(f) - U(f)\|_{L_1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

С другой стороны имеем

$$m\{\Theta_n(f) > \lambda\} = m\{f > \lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Отсюда, ввиду (2.12), получаем

$$m\{U(f) > \lambda\} = m\{f > \lambda\}.$$

Положив $f = \mathbb{I}_F$ для некоторого измеримого множества F , получим $U(f) = \mathbb{I}_G$ для некоторого другого измеримого G с $mG = mF$. Отсюда можно определить MP -преобразование Θ , положив $\Theta(F) = G$. Для завершения доказательства леммы остается проверить, что

$$(2.13) \quad \Theta(f) = U(f), \quad f \in L^1[0, 1].$$

Из (2.12) следует, что $U(f)$ есть ограниченный линейный оператор из L^1 в L^1 , так как аналогичным свойством обладают операторы Θ_n (см. P2)). Согласно определению Θ равенство (2.13) имеет место для характеристических функций $f = \mathbb{I}_F$. Отсюда, из соображений линейности, (2.13) будет выполняться для функций вида (1.3). Далее, используя непрерывность операторов $\Theta(f)$ и $U(f)$, мы получим (2.13) для любой интегрируемой функции. Лемма доказана. $\square$

Определение 2.1. Скажем, что последовательность (2.2) делит (2.1), если

$$(2.14) \quad \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{B}_1, \quad \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{B}_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Лемма 2.4. Если σ -алгебра (2.2) делит (2.1), то имеем

$$(2.15) \quad \mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_l = \mathbf{E}^{\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)} \circ \Theta_l, \quad l \geq k.$$

Доказательство. σ -алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}_n$, $\mathcal{A} = \Theta_{n-1}(\mathcal{A}_n)$ и $\mathcal{C} = \Theta_{n-1}(\mathcal{A}_{n+1})$ удовлетворяют условиям свойства P7). Действительно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ следует из того факта, что (2.2) делит (2.1), включение $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ следует из регулярности $\mathcal{A}_n$, точнее из $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n+1}$. По (2.3) имеем

$$\theta_n = [\Theta_{n-1}(\mathcal{A}_n), \mathcal{B}_n] = [\mathcal{A}, \mathcal{B}].$$

Рассмотрим функцию $f \in L^1$. Применив свойство P7), получим

$$(2.16) \quad \left(\mathbf{E}^{\theta_n(\Theta_{n-1}(\mathcal{A}_{n+1}))} \circ \theta_n \right) (\Theta_{n-1}(f)) = \left(\mathbf{E}^{\theta_n(\Theta_{n-1}(\mathcal{A}_{n+1})) \wedge B_n} \circ \theta_n \right) (\Theta_{n-1}(f)).$$

Так как $\theta_n \circ \Theta_{n-1} = \Theta_n$, получим

$$\mathbf{E}^{\Theta_n(\mathcal{A}_{n+1})}(\Theta_n(f)) = \mathbf{E}^{\Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}) \wedge B_n}(\Theta_n(f)).$$

σ -алгебры $\mathcal{A} = \Theta_n(\mathcal{A}_{n+1})$, $\mathcal{B} = \Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}) \wedge \mathcal{B}_n$ и $\mathcal{C} = \mathcal{B}_{n+1}$ удовлетворяют условиям P8). Условие $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ очевидно. В силу регулярности $\mathcal{B}_n$, имеем $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}_{n+1}$. Кроме того, так как $\{\mathcal{B}_n\}$ делит $\{\mathcal{A}_n\}$, мы получим $\Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}) \subset \mathcal{B}_{n+1}$. Отсюда следует $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$. Имеем

$$\theta_{n+1} = [\Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}), \mathcal{B}_{n+1}] = [\mathcal{A}, \mathcal{C}].$$

Следовательно, используя (2.16) и свойство P8), заключаем

$$\mathbf{E}^{\Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}) \wedge B_n}(\Theta_n(f)) = (\mathbf{E}^{\Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}) \wedge B_n} \circ \theta_{n+1})(\Theta_n(f)) = \mathbf{E}^{\Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}) \wedge B_n}(\Theta_{n+1}(f)).$$

Отсюда, так как $\mathcal{B}_k \subset \Theta_n(\mathcal{A}_{n+1}) \wedge \mathcal{B}_n$ при $k \leq n$, получим

$$(\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_n)(f) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_{n+1})(f), \quad k \leq n,$$

откуда следует

$$(\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_l)(f) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_{l-1})(f) = \dots = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_k)(f),$$

и мы получаем

$$(2.17) \quad (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_l)(f) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_k)(f) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \theta_k)(\Theta_{k-1}(f)).$$

Отсюда, ввиду

$$(2.18) \quad \Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{B}_k,$$

получим

$$(2.19) \quad (\mathbf{E}^{\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)} \circ \Theta_l)(f) = (\mathbf{E}^{\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)} \circ \Theta_k)(f) = (\mathbf{E}^{\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)} \circ \theta_k)(\Theta_{k-1}(f)).$$

Наконец, снова учитывая (2.18), из свойства P6) вытекает

$$(\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \theta_k)(\Theta_{k-1}(f)) = (\mathbf{E}^{\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)} \circ \theta_k)(\Theta_{k-1}(f)).$$

Из этого и из соотношений (2.17) и (2.19) вытекает (2.15). $\square$

Лемма 2.5. Если последовательность σ -алгебр (2.2) делит (2.1), а (2.1)-регулярна, то существует МР-преобразование Θ такое, что

$$(2.20) \quad \Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_k} = \mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Так как Θ_l есть мера-сохраняющее, из P5) следует, что

$$(2.21) \quad \Theta_l \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_k} = \mathbf{E}^{\Theta_l(\mathcal{A}_k)} \circ \Theta_l.$$

Отсюда, применив лемму 2.2, а далее лемму 2.4 при $l \geq k$, мы получим

$$(2.22) \quad \mathbf{E}^{\Theta_l(\mathcal{A}_k)} \circ \Theta_l = \mathbf{E}^{\Theta_{k-1}(\mathcal{A}_k)} \circ \Theta_l = \mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_l.$$

Последнее вместе с (2.21) дает

$$\Theta_l \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_k} = \mathbf{E}^{\mathcal{B}_k} \circ \Theta_l, \quad l > k.$$

Так как (2.1) состоит из σ -алгебр, можно определить Θ , с условием (2.10) из леммы 3. Тогда, используя ограниченность операторов $\mathbf{E}^{\mathcal{A}_k}$ и $\mathbf{E}^{\mathcal{B}_k}$ в L^1 , получим (2.20). $\square$

Для любых σ -алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathfrak{M}$, порожденные разбиениями A и B , обозначим

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \left| \bigcup_{b \in B \setminus A} b \right| = \left| \bigcup_{a \in A \setminus B} a \right|.$$

Лемма 2.6. *Если $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$, а последовательность (2.2)-регулярна, то*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}_n, \mathcal{B}_n) = 0.$$

Доказательство. Легко проверить, что количество элементов в

$$(A \wedge B_n) \setminus B_n$$

не превосходит некоторое число l , зависящее только от A . Отсюда, так как $\{B_n\}$ -регулярна, получим

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}_n) = \left| \bigcup_{a \in (A \wedge B_n) \setminus B_n} a \right| \leq l \max_{b \in B_n} |b| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 1.1: одномерный случай: Пусть $\{\mathcal{A}_n\}$ и $\{\mathcal{B}_n\}$ суть регулярные последовательности σ -алгебр в $[0, 1)$, а $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, есть последовательность некоторых чисел. Предположим, что $l_1 < l_2 < \dots < l_n < \dots$ есть последовательность натуральных чисел и $\{\tilde{\mathcal{B}}_n = \mathcal{B}_{l_n}, n \in \mathbb{N}\}$ -подпоследовательность

$\{\mathcal{B}_k\}$. Введем последовательность $\mathcal{C}_k \in \mathfrak{M}$ и меру-сохраняющие преобразования Θ_k следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{B}_{l_1}, \quad \Theta_1 = [\mathcal{A}_1, \mathcal{C}_1], \\ \mathcal{C}_2 &= \Theta_1(\mathcal{A}_2) \wedge \mathcal{B}_{l_2}, \quad \Theta_2 = [\Theta_1(\mathcal{A}_2), \mathcal{C}_2] \circ \Theta_1, \\ &\dots \\ \mathcal{C}_n &= \Theta_{n-1}(\mathcal{A}_n) \wedge \mathcal{B}_{l_n}, \quad \Theta_n = [\Theta_{n-1}(\mathcal{A}_n), \mathcal{C}_n] \circ \Theta_{n-1}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Очевидно, что последовательность $\{\mathcal{C}_k\}$ делит $\{\mathcal{A}_k\}$ (см. определение (2.1)). Следовательно, по лемме 2.5, существует MP -преобразование Θ такое, что

$$(3.1) \quad \Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_k} = \mathbf{E}^{\mathcal{C}_k} \circ \Theta, \quad k = 1, 2, \dots$$

Применив лемму 2.6, выберем последовательность $\{l_n\}$, с условием

$$\rho(\mathcal{B}_{l_k}, \mathcal{C}_k) < \varepsilon_k.$$

Обозначив

$$(3.2) \quad G_k = \bigcup_{a \in B_{l_k} \cap C_k} a,$$

из определения ρ , получим

$$|G_k| = 1 - \rho(B_{l_k}, C_k) > 1 - \varepsilon_k.$$

С другой стороны, согласно свойству P4), имеем

$$(3.3) \quad (\mathbf{E}^{\mathcal{C}_k} \circ \Theta) f(x) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_{l_k}} \circ \Theta) f(x), \quad x \in G_k.$$

Из (3.1) и (3.3) немедленно получим

$$(\Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_k}) f(x) = (\mathbf{E}^{\mathcal{B}_{l_k}} \circ \Theta) f(x), \quad x \in G_k,$$

которое и завершает доказательство Теоремы 1 в случае $d = 1$. $\square$

Если T есть ограниченный линейный оператор $L^1[0, 1)$, то обозначим через T_k , $1 \leq k \leq d$, оператор

$$T_k : L^1(Q_d) \rightarrow L^1(Q_d)$$

определенный по формуле

$$T_k f(x_1, \dots, x_d) = T f(x_1, \dots, x_{k-1}, \cdot, x_{k+1}, \dots, x_d).$$

Очевидно, что оператор T_k ограничен в $L^1(Q_d)$.

Лемма 3.1. *Если T и P —две ограниченные операторы в $L^1[0, 1]$, то*

$$P_n \circ T_m = T_m \circ P_n, \quad n \neq m, \quad 1 \leq n, m \leq d.$$

Доказательство. Нам надо доказать, что

$$(3.4) \quad (P_n \circ T_m)f(\mathbf{x}) = (T_m \circ P_n)f(\mathbf{x})$$

для любой функции $f \in L^1(Q_d)$. Если

$$(3.5) \quad f(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^d \mathbb{I}_{E_k}(x_k)$$

где $E_k \subset [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots, d$ есть некоторые измеримые множества, из линейности получим

$$P_n f(\mathbf{x}) = \prod_{k \neq n} \mathbb{I}_{E_k}(x_k) \cdot P(\mathbb{I}_{E_n})(x_n)$$

и, следовательно,

$$(T_m \circ P_n)f(\mathbf{x}) = P(\mathbb{I}_{E_n})(x_n) \cdot T(\mathbb{I}_{E_m})(x_m) \cdot \prod_{k \neq n, m} \mathbb{I}_{E_k}(x_k).$$

То же самое имеем для $(P_n \circ T_m)f(\mathbf{x})$. Отсюда (3.4) имеет место для функций вида (3.5) и их линейных комбинаций, т.е. оно имеет место для простых функций. Если $f(\mathbf{x}) \in L^1(Q_d)$, то можно найти последовательность простых функций $s_n(x, y)$ вида (3.5) такую, что $\|s_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$. Используя непрерывность операторов T_m и P_n , а также (3.4) для функций s_n , сразу же получим (3.4) в общем случае. $\square$

Доказательство Теоремы 1.1: Общий случай: Используя выше сделанные обозначения, имеем

$$\mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}} = \left(\mathbf{E}^{\mathcal{A}_{n_1}^{(1)}} \right)_1 \circ \dots \circ \left(\mathbf{E}^{\mathcal{A}_{n_d}^{(d)}} \right)_d, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d).$$

Без потери общности, в формулировке теоремы можно предположить, что $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$. Применив одномерный случай теоремы для последовательностей σ -алгебр $\mathcal{A}_n^{(k)}$ и $\mathcal{B}_n^{(k)}$, можем определить MP -преобразование Θ_k , $k = 1, 2, \dots, d$, последовательность измеримых множеств $\{G_i^{(k)}\}$, и подпоследовательности σ -алгебр $\tilde{\mathcal{B}}_i^{(k)}$, такие, что

$$|G_i^{(k)}| > 1 - \frac{\varepsilon_i}{d},$$

$$\left(\Theta_k \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_i^{(k)}} \right) f(x) = \left(\mathbf{E}^{\tilde{\mathcal{B}}_i^{(k)}} \circ \Theta_k \right) f(x), \quad x \in G_i^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Обозначим

$$\Theta = (\Theta_1)_1 \circ \dots \circ (\Theta_d)_d,$$

$$G_{\mathbf{n}} = \left\{ \mathbf{x} \in Q_d : x_k \in G_{n_k}^{(k)} \right\}, \quad \mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d).$$

Имеем

$$|G_{\mathbf{n}}| > 1 - \sum_{k=1}^d \frac{\varepsilon_{n_k}}{d} \geq 1 - \varepsilon_{\min n_k},$$

а также

$$(3.6) \quad \otimes_{k=1}^d \left(\Theta_k \circ \mathbf{E}_{n_k}^{\mathcal{A}_{n_k}^{(k)}} \right)_k f(\mathbf{x}) = \otimes_{k=1}^d \left(\mathbf{E}_{n_k}^{\tilde{\mathcal{B}}_{n_k}^{(k)}} \circ \Theta_k \right)_k f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d.$$

Применив лемму 2.7 несколько раз, получим

$$\otimes_{k=1}^d \left(\Theta_k \circ \mathbf{E}_{n_k}^{\mathcal{A}_{n_k}^{(k)}} \right)_k = \left(\otimes_{k=1}^d (\Theta_k)_k \right) \circ \left(\otimes_{k=1}^d \left(\mathbf{E}_{n_k}^{\mathcal{A}_{n_k}^{(k)}} \right)_k \right) = \Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}}$$

Аналогичным образом имеем

$$(3.7) \quad \otimes_{k=1}^d \left(\mathbf{E}_{n_k}^{\tilde{\mathcal{B}}_{n_k}^{(k)}} \circ \Theta_k \right)_k = \mathbf{E}^{\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{n}}} \circ \Theta.$$

Отсюда, с учетом (3.6) и (3.7), вытекает (1.8). $\square$

Доказательство Теоремы 1.2. Доказательство теоремы 1.2 есть дословное повторение доказательства теоремы 1.1 с незначительными изменениями. Точнее, если $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}$ есть последовательность $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$, то возьмем $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathbf{n}} = \mathcal{B}_{\mathbf{n}}$. Тогда все множества G_k в (3.2) совпадают с $[0, 1]$ и, следовательно, в доказательстве общего случая теоремы 1.1 будем иметь $|G_{\mathbf{n}}| = 1$ для каждого $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$. Отсюда равенство (1.9) выполняется почти всюду в общем случае. $\square$

4. МАКСИМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Для $1 \leq t_i \leq 2^{n_i}$ и $n_i \in \mathbb{N}$ рассмотрим семейство двоичных интервалов в единичном кубе Q_d :

$$(4.1) \quad \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in Q_d : \frac{t_i - 1}{2^{n_i}} \leq x_i < \frac{t_i}{2^{n_i}}, i = 1, 2, \dots, d \right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}_{\mathbf{n}}$ подсемейство прямоугольников соответствующее фиксированному мультииндексу $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_d)$. Очевидно, что $\mathcal{R}_{\mathbf{n}}$ состоит из попарно непересекающихся прямоугольников, объединение которых есть Q_d . Для

бесконечного семейства индексов $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ рассмотрим семейство прямоугольников

$$\mathfrak{R}_{\mathcal{N}} = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathcal{N}^d} \mathcal{R}_{\mathbf{n}}.$$

Если $\mathcal{N} = \mathbb{N}$, то вместо $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ воспользуемся обозначением $\mathfrak{R}$. Скажем, что базис $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ дифференцирует интеграл функции $f \in L^1(Q_d)$, если

$$D_{\mathcal{N}}f(\mathbf{x}) = \lim_{\text{diam}(R) \rightarrow 0, \mathbf{x} \in R \in \mathfrak{R}_{\mathcal{N}}} \frac{1}{|R|} \int_R f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f(\mathbf{x}) \text{ п.в. } .$$

Заметим, что если $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}} \subset \mathfrak{R}_{\mathcal{N}'}$ и $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ дифференцирует интеграл $f \in L^1(Q_d)$, то тоже самое выполняется для $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}'}$. Через $L \log^{d-1} L(Q_d)$ обозначается класс функций, с условием

$$\int_{Q_d} |f|(\log^+ |f|)^{d-1} < \infty.$$

Классическая теорема Йессена-Марцинкевича-Зигмунда [12] утверждает, что любая функция из класса $L \log^{d-1} L(Q_d)$ дифференцируема по базису двоичных прямоугольников $\mathfrak{R}$. Рассмотрим максимальную функцию

$$(4.2) \quad M_{\mathcal{N}}f(\mathbf{x}) = \sup_{R: \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_{\mathcal{N}}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t},$$

соответствующую $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$. Если $\mathcal{N} = \mathbb{N}$, используем обозначение $Mf(\mathbf{x})$ в место $M_{\mathcal{N}}f(\mathbf{x})$. В теории дифференцирования интегралов хорошо известно, что свойства дифференцируемости базиса $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ тесно связана с оценками слабого типа для максимальной функции (4.2). В случае $\mathcal{N} = \mathbb{N}$, наиболее общая оценка (4.2) принадлежит М. Гусману [7], [8]. Точнее, имеет место следующее неравенство слабого типа

$$m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : Mf(\mathbf{x}) > \lambda\} \lesssim \int_{Q_d} \frac{|f(\mathbf{t})|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|f(\mathbf{t})|}{\lambda}\right)^{d-1} d\mathbf{t}, \quad \lambda > 0.$$

Фактически $L \log^{d-1} L$ является наиболее широким Орличевым классом функций, интегралы которых дифференцируемы по $\mathfrak{R}$ (это доказана Саксом в [17] и [18]). Аналогичную задачу а также другие задачи касающиеся общих базисов $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ рассмотрены в работах К. Хейр, А. Стоколос [10], П. Хаглстейн [9] и А. Стоколос [19]. Отметим, что если $\mathcal{N} = \mathbb{N}$, то $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ совпадает с $\mathfrak{R}$, но в общем случае $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ строго содержится в $\mathfrak{R}$ и мы имеем

$$M_{\mathcal{N}}f(\mathbf{x}) \leq Mf(\mathbf{x}).$$

Несмотря на это, базис $\mathfrak{R}_{\mathcal{N}}$ не имеет свойства лучше чем $\mathfrak{R}$, и это доказано А. Стоколосом в [19]. Более того, он доказывает, что для любой последовательности

$\mathcal{N}$ и числа $0 < \lambda < 1$ существует измеримое множество $E \subset Q_d$ такое, что

$$(4.3) \quad m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : M_N \mathbb{I}_E(\mathbf{x}) > \lambda\} \gtrsim \int_{Q_d} \frac{|\mathbb{I}_E(\mathbf{t})|}{\lambda} \left(1 + \log^+ \frac{|\mathbb{I}_E(\mathbf{t})|}{\lambda}\right)^{d-1} d\mathbf{t}.$$

Используя эту оценку легко показать, что класс $L \log^{d-1} L$ снова есть оптимальный класс Орлича функций, имеющие дифференцируемые интегралы по базису $\mathfrak{R}_N$. Конструкция множества E в [19], удовлетворяющее условию (4.3) основано на модифицированной конструкции Бора (см. [8], стр. 89), которая используется также в теореме Сакса.

Эти проблемы можно рассматривать с точки зрения теории мартингалов. Действительно, рассмотрим последовательности σ -алгебр $\mathcal{A}_n^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, d$, в Q_d порожденные двоичными d -мерными прямоугольниками

$$\left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in Q_d : \frac{i-1}{2^n} \leq x_k < \frac{i}{2^n} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^n.$$

Легко усмотреть, что σ -алгебра $\mathcal{A}_n$, определенная в (1.1), совпадает с σ -алгеброй, порожденной прямоугольниками $\mathcal{R}_n$. Более того, имеем

$$E^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{|R(\mathbf{x})|} \int_{R(\mathbf{x})} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t},$$

где $R(\mathbf{x})$ означает двоичный прямоугольник вида $\mathcal{R}_n$, содержащий $\mathbf{x}$. Отсюда, рассматривая $\mathcal{A}_n = \mathcal{S}(\mathcal{R}_n)$ в теореме 1.2 мы получим эквивалентности между базисами $\mathfrak{R}_N$ и $\mathfrak{R}$ и теорема Стоколоса будет следовать из теоремы 4.2, рассматриваемая внизу. Итак, из теоремы 1.2 следует следующий результат.

Теорема 4.1. *Для любых $N \subset \mathbb{N}$ и $f \in L^1(Q_d)$ существует функция $g \sim f$ такая, что*

$$m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : D_N g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\} = m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : Df(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\}.$$

Теорема 4.2. *Для любых $N \subset \mathbb{N}$ и $f \in L^1(Q_d)$ существует функция $g \sim f$ такая, что*

$$m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : M_N g(x) > \lambda\} = m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : Mf(x) > \lambda\}.$$

Хорошо известно, что $E^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x})$ почти всюду совпадает с n -ой частичной суммой ряда Фурье-Хаара функции $f(\mathbf{x})$. И поэтому эти теоремы можно рассматривать также с точки зрения рядов Хаара.

5. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ

В этом параграфе мы рассматриваем некоторые приложения теоремы 1.1 в некоторых задачах сходимости мартингалов. Будем установить некоторые теоремы, которые показывают, что в задачах сходимости почти всюду общих мартингалов можно рассматривать просто мартингалы Хаара.

Теорема 5.1. Пусть $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ произвольная последовательность, а $\{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ – регулярная последовательность σ -алгебр в Q_d . Тогда для каждой $f \in L^1(Q_d)$ существует функция $g(x) \sim f(x)$ такая, что

$$m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x}) \text{ сходится}\} \geq m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}} g(\mathbf{x}) \text{ сходится}\}.$$

Сделаем некоторое замечание перед доказательством теоремы. Пусть $\{\mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}\}$ есть возрастающая последовательность σ -алгебр в $\mathcal{F}$. Дуб в [4] доказал, что последовательность

$$\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходится п.в. для любой $f \in L^1([0, 1])$. Обобщение теоремы Дуба для кратных последовательностей σ -алгебр $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ сделано Р. Кариоли в [6]. Он доказал, что кратные мартингалы

$$\mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d,$$

сходится п.в. для любой $f \in L \log^{d-1} L(Q_d)$. Простейшими являются мартингалы Хаара, которые соответствуют σ -алгебрам $\mathfrak{R}_{\mathbf{n}}$ по d -мерным двоичным интервалам, определенные в (4.1). Теоремы Дуба и Кариоли являются следствиями теорем дифференцирования Лебега и Йессена-Марцинкевича-Зигмунда соответственно. Отсюда, используя теорему 5.1, теоремы Дуба и Кариоли можно вывести также из вышеупомянутых теорем дифференцирования. Для доказательства теоремы 5.1 нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 5.1. Если $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ есть произвольная кратная последовательность σ -алгебр и $f \in L^1(Q_d)$, то существует регулярная последовательность $\{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ такая, что

$$m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x}) \text{ сходится}\} \geq m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x}) \text{ сходится}\}.$$

Доказательство. Обозначим

$$G = \{ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) \text{ расходится} \},$$

$$G(\delta) = \left\{ \limsup_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) - \liminf_{\mathbf{n} \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) > \delta \right\}.$$

Имеем

$$G = G(0) = \cup_{\delta > 0} G(\delta).$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что

$$m_d(G(\delta)) > m_d(G) - \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность мультииндексов

$$(5.1) \quad \mathbf{n}^{(k)} = (n_1^{(k)}, \dots, n_d^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющее соотношению $\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}$. Рассмотрим множества

$$G^{(k)}(\delta) = \left\{ \sup_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) > \delta \right\}.$$

Используя определение $G(\delta)$, легко заметить, что для подходящей последовательности (5.1) имеем

$$m_d(G^{(k)}(\delta)) > m_d(G(\delta)) - \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда можно найти регулярную последовательность кратных σ -алгебр $\{\mathcal{B}_n, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ такую, что

$$m_d \left\{ \sup_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} |\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) - \mathbf{E}^{\mathcal{B}_n} f(\mathbf{x})| < \frac{\delta}{3} \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & m_d \left\{ \sup_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} \mathbf{E}^{\mathcal{B}_n} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} \mathbf{E}^{\mathcal{B}_n} f(\mathbf{x}) > \frac{\delta}{3} \right\} \\ & \geq m_d G^{(k)}(\delta) \cap \left\{ \sup_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} |\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n} f(\mathbf{x}) - \mathbf{E}^{\mathcal{B}_n} f(\mathbf{x})| < \frac{\delta}{3} \right\} \\ & \geq m_d(G(\delta)) - \frac{2\varepsilon}{2^k} \geq |G| - \frac{\varepsilon}{2^{k-1}} - \varepsilon \end{aligned}$$

и следовательно

$$\begin{aligned} m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{B}_n} f(\mathbf{x}) \text{ diverges}\} & \geq m_d \left(\limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} \mathbf{E}^{\mathcal{B}_n} f(\mathbf{x}) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \inf_{\mathbf{n}^{(k)} \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{n}^{(k+1)}} \mathbf{E}^{\mathcal{B}_n} f(\mathbf{x}) > \frac{\delta}{3} \right\} \right) \geq m_d(G) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку ε -произвольный, мы получим

$$m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{B}_n}f(\mathbf{x}) \text{ расходится} \} \geq m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}f(\mathbf{x}) \text{ расходится} \},$$

которое и завершает доказательство леммы 5.1. $\square$

Доказательство теоремы 5.1. Применив лемму 5.1, в теореме 5.1 можно предположить, что последовательность $\{\mathcal{A}_n\}$ тоже регулярна. Отсюда, применив теорему 1.1, определим MP -преобразование Θ соответствующее $\varepsilon_i = i^{-1}$ со свойствами (1.6)-(1.8). Положим $g(\mathbf{x}) = \Theta f(\mathbf{x})$. Из (1.6) и (1.7) мы получим, что для множества

$$G = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} G_{\mathbf{n}}$$

имеем $m_d(G) = 1$. Согласно (1.8), для любой точки $\mathbf{x} \in G$, можем найти индекс $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ такой, что

$$(\Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}) f(\mathbf{x}) = (\mathbf{E}^{\tilde{\mathcal{B}}_n} \circ \Theta) f(\mathbf{x}), \text{ если } \mathbf{n} \geq \mathbf{n}(\mathbf{x}).$$

Это значит, что последовательности

$$(\Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}) f(\mathbf{x}) \text{ и } (\mathbf{E}^{\tilde{\mathcal{B}}_n} \circ \Theta) f(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^{\tilde{\mathcal{B}}_n} g(\mathbf{x})$$

сходятся одновременно. Следовательно, ввиду того, что $m_d(G) = 1$ и $\tilde{\mathcal{B}}_n$ есть подпоследовательность от $\mathcal{B}_n$, получим

$$\begin{aligned} m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{B}_n}g(\mathbf{x}) \text{ сходится} \} &\leq m_d\{\mathbf{E}^{\tilde{\mathcal{B}}_n}g(\mathbf{x}) \text{ сходится} \} = m_d\{(\Theta \circ \mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}) f(\mathbf{x}) \text{ сходится} \} \\ &= m_d\{\mathbf{E}^{\mathcal{A}_n}f(\mathbf{x}) \text{ сходится} \}. \end{aligned}$$

$\square$

Для данной кратной последовательности σ -алгебр $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_{\mathbf{n}} : \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ рассматриваем максимальную функцию

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}f(x) = \sup_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d} E^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}} |f(x)|$$

Эти максимальные функции играют важную роль в теоремах сходимости мартингалов.

Теорема 5.2. *Для любых двух семейств $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ и $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ регулярных последовательностей кратных σ -алгебр и для любой функции $f \in L^1(X)$ имеем*

$$\sup_{g: g \sim f} m_d\{x \in X : \mathcal{M}_{\mathcal{A}}g(x) > \lambda\} = \sup_{g: g \sim f} m_d\{x \in X : \mathcal{M}_{\mathcal{B}}g(x) > \lambda\}.$$

Доказательство. Применив теорему 1.1, определим MP -преобразование Θ соответствующее $\varepsilon_i = \varepsilon/i$ со свойствами (1.6)-(1.8). Пусть $f(\mathbf{x}) \in L^1(Q_d)$ и $g(\mathbf{x}) = \Theta f(\mathbf{x})$. Так как

$$G_{\mathbf{n}} \supset G_{1,1,\dots,1}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$$

применив (1.8), мы получим

$$(5.2) \quad \mathcal{M}_{\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) = \mathcal{M}_{\tilde{\mathcal{B}}} g(\mathbf{x}) \leq \mathcal{M}_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_{1,1,\dots,1}.$$

Следовательно, ввиду $P(G_{1,1,\dots,1}) > 1 - \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned} m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : \mathcal{M}_{\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) > \lambda\} &\leq m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : \mathcal{M}_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}) > \lambda\} + 1 - m_d(G_{1,1,\dots,1}) \\ &\leq \sup_{g: g \sim f} m_d\{\mathbf{x} \in Q_d : \mathcal{M}_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}) > \lambda\} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как ε -произвольное, то имеем

$$\sup_{g: g \sim f} m_d\{\mathcal{M}_{\mathcal{A}} g(\mathbf{x}) > \lambda\} \leq \sup_{g: g \sim f} m_d\{\mathcal{M}_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}) > \lambda\}.$$

Аналогично можно доказать обратное неравенство и теорема будет доказана. $\square$

Пусть $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ есть возрастающая выпуклая функция. Обозначим через $L^\Phi(Q_d)$ класс функций f на единичном кубе Q_d с $\Phi(|f|) \in L^1(Q_d)$. Если Φ удовлетворяет Δ_2 -условию $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$, то L^Φ есть Банахово пространство с нормой $\|f\|_{L^\Phi} = \|f\|_\Phi$, которая есть минимальное число $c > 0$, для которого имеет место неравенство

$$(5.3) \quad \int_{\mathbb{T}} \Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) \leq 1.$$

Теорема 5.3. Пусть $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ -возрастающая выпуклая функция. Тогда для любых двух семейств $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ и $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ регулярных кратных последовательностей σ -алгебр имеем

$$\sup_{g: g \sim f} \|\mathcal{M}_{\mathcal{A}} g(x)\|_\Phi = \sup_{g: g \sim f} \|\mathcal{M}_{\mathcal{B}} g(x)\|_\Phi.$$

Доказательство. Из неравенства (5.2), полученное в доказательстве теоремы 5.2, следует

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} f(\mathbf{x}) \leq \mathcal{M}_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G = G_{1,1,\dots,1}.$$

Далее имеем

$$(5.4) \quad \|\mathcal{M}_{\mathcal{A}} f(\mathbf{x})\|_\Phi \leq \sup_{g: g \sim f} \|\mathcal{M}_{\mathcal{B}} g(\mathbf{x})\|_\Phi + \|\mathcal{M}_{\mathcal{B}} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbb{I}_G(\mathbf{x})\|_\Phi.$$

Так как норма $\|\cdot\|_\Phi$ абсолютно непрерывна, последний член в (5.4) может быть сколь угодно малым. Отсюда получаем

$$\sup_{g: g \sim f} \|\mathcal{M}_A g(\mathbf{x})\|_\Phi \leq \sup_{g: g \sim f} \|\mathcal{M}_B g(\mathbf{x})\|_\Phi$$

и аналогичным образом—обратное неравенство. Это и завершает доказательство теоремы 5.3. $\square$

Теорема 5.4. Пусть $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ есть произвольная кратная последовательность σ -алгебр и $f \in L^1(Q_d)$. Тогда существует подпоследовательность $\{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ из $\mathcal{A}_{\mathbf{n}}$ такая, что $\mathbf{E}^{\mathcal{B}_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x})$ сходится п.в.

Будем говорить, что кратная последовательность функций $f_{\mathbf{n}}(x)$, $x \in Q_d$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, сильно сходится к $f(x)$ по мере, если

$$(5.5) \quad \lim_{\min_{i \in A_1} n_i \rightarrow \infty} \lim_{\min_{i \in A_2} n_i \rightarrow \infty} \dots \lim_{\min_{i \in A_k} n_i \rightarrow \infty} f_{\mathbf{n}}(x) = f(x)$$

для любого разбиения $A_1, A_2, \dots, A_k$ множества $\{1, 2, \dots, d\}$, где последовательные пределы рассматриваются в смысле сходимости по мере. Хорошо известно, что для любой функции $f \in L^1(Q_d)$ и для любой последовательности $\{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d\}$ кратная последовательность $\mathbf{E}^{\mathcal{A}_{\mathbf{n}}} f(\mathbf{x})$ сильно сходится по мере. Поэтому теорема 5.4 немедленно следует из следующей леммы.

Лемма 5.2. Если кратная последовательность функций $f_{\mathbf{n}}(x)$, $x \in Q_d$, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, сильно сходится к $f(x)$ по мере, то существует множество $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$, такая, что подпоследовательность $f_{\mathbf{n}}(x)$, $\mathbf{n} \in \mathcal{N}^d$, сходится почти всюду к $f(x)$.

Доказательство. Избегая громоздких обозначений и ради лучшего понимания, мы докажем лемму для $d = 2$. Итак рассмотрим последовательность $f_{n_1, n_2}(x)$, которая сильно сходится по мере к $f(x)$. Согласно (5.5) имеем

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \lim_{n_1 \rightarrow \infty} f_{n_1, n_2}(x) &= f_{\infty, n_2}(x), \\ \lim_{n_2 \rightarrow \infty} f_{n_1, n_2}(x) &= f_{n_1, \infty}(x), \\ \lim_{n_2 \rightarrow \infty} f_{\infty, n_2}(x) &= f(x), \\ \lim_{n_1 \rightarrow \infty} f_{n_1, \infty}(x) &= f(x), \\ \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} f_{n_1, n_2}(x) &= f(x). \end{aligned}$$

где все пределы рассматриваются по мере. Предположим, что последовательность $\mathcal{N} = \{l_1, l_2, \dots, l_k, \dots\}$ уже выбрана. Тогда обозначим

$$\begin{aligned} G_k &= \{|f_{l_k, l_i}(x) - f_{\infty, l_i}(x)| < 2^{-k}, i = 1, 2, \dots, k-1\} \\ &\cap \{|f_{l_i, l_k}(x) - f_{l_i, \infty}(x)| < 2^{-k}, i = 1, 2, \dots, k-1\} \\ &\cap \{|f_{l_k, \infty}(x) - f(x)| < 2^{-k}\} \cap \{|f_{\infty, l_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}\} \cap \{|f_{l_k, l_k}(x) - f(x)| < 2^{-k}\}. \end{aligned}$$

Используя (5.6), можно выбрать последовательность $\mathcal{N}$ такая, что

$$m_d(G_k) > 1 - \frac{1}{2^k}.$$

Подставив

$$G = \cup_{n \in \mathbb{N}} \cap_{k \geq n} G_k,$$

будем иметь $m_d(G) = 1$. Отсюда, достаточно доказать сходимост $f_{l_n, l_m}(x)$ в каждой точке $x \in G$, при $n, m \rightarrow \infty$. Если $x \in G$, то

$$x \in G_k, \quad k > k(x).$$

Выберем произвольные натуральные числа $n, m > k(x)$. Если $n = m$, то согласно определению G_k , имеем

$$|f_{l_n, l_m}(x) - f(x)| = |f_{l_n, l_n}(x) - f(x)| < 2^{-n}.$$

Если $n < m$, то получим

$$\begin{aligned} |f_{l_n, l_m}(x) - f_{\infty, l_m}(x)| &< 2^{-n}, \\ |f_{\infty, l_m}(x) - f(x)| &< 2^{-n} \end{aligned}$$

и следовательно имеем

$$|f_{l_n, l_m}(x) - f(x)| < 2 \cdot 2^{-n}.$$

Лемма доказана. □

6. СУММЫ РИМАНА

В этом параграфе приведем некоторое применение теоремы мартингалов к суммам Римана, которые определяются

$$(6.1) \quad R_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right), \quad x \in \mathbb{T},$$

где $f(x)$ есть интегрируемая функция на торе $\mathbb{T} = [0, 1] = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Это будут важным дополнением работе автора [13]. Легко видеть, что если f –непрерывна, то эти суммы сходятся к интегралу f равномерно и они сходятся в метрике $L^1(\mathbb{T})$

если f интегрируема по Лебегу. Мы рассматриваем задачу сходимости почти всюду сумм Римана по подпоследовательностям (6.1). Б. Йессен [11] доказал сходимость почти всюду подпоследовательностей $R_{2^k}f(x)$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$. У. Рудин [16] построил пример функции $L^\infty(\mathbb{T})$ такой, что $R_n f(x)$ всюду расходится. Эти результаты представляют две фундаментальные теоремы в теории Римановых сумм. Задача сходимости почти всюду $R_{l_k}f(x)$ для данной последовательности $D = \{1 \leq l_1 < l_2 < \dots\}$ исследован многими авторами ([3], [5], [1], [2], [14], [15]). Из одного примера Рудином [16] видно, что свойства сходимости $R_{l_k}f(x)$ строго зависят от арифметических свойств D . Л. Е. Дубинс и Дж. Питман в [5] доказали, что

$$(6.2) \quad D = \{n \in \mathbb{N} : n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_d^{k_d}, \quad k_1, k_2, \dots, k_d \in \mathbb{N}\}$$

где $p_1, p_2, \dots, p_d$ есть фиксированные простые числа, то для любой $f \in L \log^{d-1} L$ подпоследовательность $R_{l_k}f(x)$, соответствующее (6.2), сходится почти всюду. Далее, Ю.Бежо and М. Вебер в [3] доказали, что класс $L \log^{d-1} L$ почти точен.

Теорема 6.1 (Вежо, Вебер). *Если последовательность $D = \{l_k, k = 1, 2, \dots\}$ определена в (6.2) и $0 < \varepsilon < 1$, то существует функция $f \in L \log^{d-1-\varepsilon} L(\mathbb{T})$ такая, что $R_{l_k}f(x)$ почти всюду расходится.*

Доказательство теорем основано на метод Р.К.Вейкера [1], где автор установил слабую версию этой теоремы. Окончательную поправку в последней теореме сделан автором в [13].

Теорема 6.2 (Карагулян). *Пусть l_k есть последовательность из (6.2), а $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ — возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\phi(x)}{x \ln^{d-1} x} = 0.$$

Тогда существует функция $f(x) \in L^\phi$, т.е.

$$\int_0^1 \phi(|f(x)|) dx < \infty,$$

такая, что последовательность $R_{l_k}f(x)$ всюду расходится.

Мы доказываем эту теорему, установив прямую связь между максимальными функциями Римана и обычными максимальными функциями в $\mathbb{R}^d$. Мы связываем с множеством натуральных чисел (6.2) семейство d -мерных прямоугольников

$$\left\{ x \in Q_d : \frac{t_i - 1}{p_i^{s_i}} \leq x_k < \frac{t_i}{p_i^{s_i}}, k = 1, 2, \dots, d \right\},$$

$$0 \leq t_i < p_i^{s_i}, \quad s_i = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

и обозначим его через $\mathfrak{R}_D$. Рассмотрим две максимальные функции

$$\mathcal{R}_D g(x) = \sup_{n \in D} R_n |g(x)|, \quad x \in \mathbb{T},$$

и

$$M_D f(\mathbf{x}) = \sup_{R: \mathbf{x} \in \mathfrak{R}_D} \frac{1}{|R|} \int_R |f(\mathbf{t})| d\mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in Q_d.$$

В работе [13] доказывается, что

$$(6.3) \quad \sup_{\|g\|_\Phi \leq 1} m_d \left\{ x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D g(x) > \lambda \right\} = \sup_{\|f\|_\Phi \leq 1} m_d \left\{ x \in Q_d : M_D f(x) > \lambda \right\},$$

для любого $\lambda > 0$, где $\|\cdot\|_\Phi$ есть норма Орлича, определенная в (5.3). Используя теорему 5.2 имеем

$$(6.4) \quad \sup_{f \sim g} m_d \left\{ x \in Q_d : M_D f(x) > \lambda \right\} = \sup_{f \sim g} m_d \left\{ x \in Q_d : M f(x) > \lambda \right\}.$$

Так как норма $\|\cdot\|_\Phi$ инвариантна относительно перестановки, учитывая (6.3) и (6.4), получим

Теорема 6.3. *Если D есть множество индексов в (6.2), то*

$$\sup_{\|g\|_\Phi \leq 1} m_d \left\{ x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D g(x) > \lambda \right\} = \sup_{\|f\|_\Phi \leq 1} m_d \left\{ x \in Q_d : M f(x) > \lambda \right\},$$

где $M f(x)$ есть максимальная функция по базису двоичных прямоугольников, определенные в параграфе 4.

Abstract. We study some almost everywhere convergence problems for martingales. We establish various equivalency theorems, which show that in some problems of martingales theory the general martingales can be replaced by Haar martingales. Some applications of the obtained results to the theory of differentiation of integrals and convergence of Riemann sums are also discussed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. C. Baker, “Riemann sums and Lebesgue integrals”, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, **27**, 191 – 198 (1976).
- [2] J. Bourgain, “Almost sure convergence and bounded entropy”, *Israel J. Math.*, **62**, 79 – 97 (1988).
- [3] Y. Bugeaud and M. Weber, “Examples and counterexamples for Riemann sums”, *Indag. Math. (NS)* **9**, No. 1, 11 – 13 (1998).
- [4] J. L. Doob, *Stochastic processes*, J. Wiley & Sons, Chapman & Hall (1953).
- [5] L. E. Dubins and J. Pitman. “A pointwise ergodic theorem for the group of rational rotations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **251**, 299 – 308 (1979).
- [6] R. Cairoli, “Une inégalité pour martingales à indices multiples et ses applications, Séminaire de Probabilités IV”, *Lecture Notes in Mathematics*, **124**, Springer-Verlag, 1 - 27 (1970).
- [7] M. de Guzman, “An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to the product of differentiation bases”, *Studia Math.* **42**, 265 – 286 (1972).
- [8] М. Гусман, *Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$* , Мир, Москва (1978).
- [9] P. A. Hagelstein, A note on rare maximal functions. *Colloq. Math.*, **95**, No. 1, 49 – 51 (2003).
- [10] K. Hare and A. Stokolos, A. On weak type inequalities for rare maximal functions. *Colloq. Math.*, **83**, No. 2, 173 – 182 (2000).
- [11] B. Jessen, “On the approximation of Lebesgue integrals by Riemann sums”, *Annals of Math.*, **35**, 248 – 251 (1934).
- [12] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, and A. Zygmund, “Note on the differentiability of multiple integrals”, *Fund. Math.* **25**, 217 – 234 (1935).
- [13] Г. А. Карагулян, “Суммы Римана и максимальные функции в $\mathbb{R}^n$ ”, *Мат. сборник*, **200**, No 4, 53 – 82 (2009).
- [14] R. Nair, “On Riemann Sums and Lebesgue Integrals”, *Monatsh. Math.*, **120**, 49 – 54 (1995).
- [15] J. J. Ruch and M. Weber, “On Riemann sums, *Note di Matematica*”, **26**, No. 2, 1150 (2006).
- [16] W. Rudin, “An arithmetic property of Riemann sums”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**, 321 – 324 (1964).
- [17] S. Saks, “Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral”, *Fund. Math.*, **22**, 257 – 261, 1934.
- [18] S. Saks, “On the strong derivatives of functions of intervals”, *Fund. Math.* **25**, 235 – 252 (1935).
- [19] A. Stokolos, “On weak type inequalities for rare maximal function in $\mathbb{R}^n$ ”, *Colloq. Math.*, **104**, No. 2, 311 – 315 (2006).

Поступила 14 декабря 2011