

ОЦЕНКИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ И ДЛЯ СИСТЕМЫ РИСА

М. ЗАКАРЯН

Иджеванский филиал Ереванского государственного университета
E-mail: *mzakar@mail.ru*

Аннотация. В этой статье мы обобщаем одну из теорем Харди и Литтлвуда об оценке роста гармонически сопряженной функции. Получены также оценки для системы Рисса в верхнем полупространстве R_+^{n+1} пространства R^{n+1} .

MSC2010 number: 42B35

Ключевые слова: Гармоническая функция, сопряженно гармоническая функция, система Рисса.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим аналитическую функцию $f(re^{i\varphi}) = U(re^{i\varphi}) + iV(re^{i\varphi})$ с $Im f(0) = V(0) = 0$ на открытом единичном круге $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$. Мы интересуемся оценкой роста интеграла

$$I_p(r, V) = \int_{-\pi}^{\pi} |V(re^{i\varphi})|^p d\varphi, \quad 0 \leq r < 1,$$

если известен рост интеграла

$$I_p(r, U) = \int_{-\pi}^{\pi} |U(re^{i\varphi})|^p d\varphi.$$

Для $p > 1$ теорема М. Рисса утверждает, что $I_p(r, V) \leq C_p I_p(r, U)$, где C_p зависит только от p (см. [5], теорема 4.1). Для $0 < p \leq 1$ имеет место классическая теорема Харди и Литтлвуда [7]: если

$$I_p(r, U) \leq \frac{1}{(1-r)^\alpha}$$

с $\alpha > 0$, тогда

$$I_p(r, V) \leq \frac{C_p}{(1-r)^\alpha},$$

¹Работа выполнена при поддержке фонда Александра фон Гумбольдта.

где постоянная C_p зависит только от p .

Различные вариации этого результата были получены в [3], [9] – [11]. Мы рассматриваем более общий рост следующего типа:

$$I_p(r, U) \leq \mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad \text{при} \quad 0 \leq r < 1,$$

где μ удовлетворяет некоторым условиям и изучаем рост интеграла $I_p(r, V)$ при $r \rightarrow 1$. Для $p = 1$ похожие оценки были получены в [15]. В настоящей работе в специальном случае получены оценки роста интеграла $I_p(r, V)$ для $0 < p \leq 1$, используя интегральное представление М. Джрбашяна (см. [3] и [4]). В [15] были получены оценки для потенциала и более низкого роста, а в теореме 1.3 данной статьи мы обобщаем эти результаты на случай любого роста для $0 < p < 1$.

Теорема 1.1 (Харди [8]). *Пусть*

$$I(x) = \int_0^x \exp(\psi(t)) dt, \quad x > 0,$$

где $\psi(t) \in C^2(0, +\infty)$.

i) Если $\psi'(t) = o(1/t)$ при $t \rightarrow +\infty$, тогда $I(x) \sim x \exp(\psi(x))$ при $x \rightarrow +\infty$ и $I(x) \leq x \exp(\psi(x))$.

ii) Если существует конечный предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi''(t)}{(\psi'(t))^2} = L$, тогда

$$I(x) \sim (1-L)^{-1} \frac{\exp(\psi(x))}{\psi'(x)} \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Нам нужно будет следующие разбиение круга с радиусом $R < 1$.

$$(1.1) \quad \Delta_{k,l} := \left\{ z \in \mathbf{D} : R - \frac{R}{2^k} \leq |z| < R - \frac{R}{2^{k+1}}, \quad \frac{\pi l}{2^k} < \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\},$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = -2^k, \dots, 2^k - 1$. Следующий результат был доказан в [12] для единичного шара в $\mathbf{R}^n$. В частном случае $n = 2$ он формулируется так:

Лемма 1.1. Пусть $h \in C(\mathbf{D})$, $U_\rho(w) := \{z \in \mathbf{D} : |z - w| < \rho\}$ и пусть σ - мера Лебега на $\mathbf{D}$. Если

$$h(w) \leq \frac{A}{\pi \rho^2} \int_{U_\rho(w)} |h(\zeta)| d\sigma(\zeta)$$

для всех $\rho \in (0, 1 - |w|)$, тогда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{w \in \Delta_{k,l}} |h(w)| |\Delta_{k,l}| \leq \int_{\mathbf{D}} |h(\zeta)| d\sigma(\zeta),$$

где $\Delta_{k,l}$ определены в (1.1) и $|\Delta_{k,l}| = \sigma(\Delta_{k,l})$.

Мы воспользуемся леммой 1.1 для $h(z) = |U(z)|^p$ при $p \geq 1$, так как $|U(z)|^p$ есть субгармоническая функция на $\mathbf{D}$. В случае $0 < p \leq 1$ мы можем использовать следующий результат Фефермана и Стейна (см. [6], Лемма 2).

Лемма 1.2. Пусть $U(x)$ - гармоническая функция на $G \subset \mathbf{R}^n$ и $0 < p \leq 1$. Тогда для каждого шара $K(a) \subset G$ с центром $a \in G$,

$$|U(a)|^p \leq \frac{C_p}{|K(a)|} \int_{K(a)} |U(x)|^p d\sigma(x),$$

где постоянная C_p зависит только от p .

Нам понадобятся некоторые обозначения. Пусть

$$\mathbf{R}_+^{n+1} := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x', x_{n+1}) \in \mathbf{R}_+^{n+1} : x_{n+1} > 0 \right\},$$

где $x' = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ есть проекция вектора $x \in \mathbf{R}_+^{n+1}$ на $\mathbf{R}^n$.

Меру Лебега на $\mathbf{R}_+^{n+1}$ обозначим через

$$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n dx_{n+1} = dx' dx_{n+1}.$$

C^1 -векторное поле $U(x) = \{U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x), U_{n+1}(x)\}$ на $\mathbf{R}_+^{n+1}$ называется гармоническим векторным полем или системой Рисса, если оно удовлетворяет обобщенным дифференциальным уравнениям Коши-Римана:

$$(1.2) \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial U_k}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i, k \leq n+1.$$

В частности из (1.2) следует, что существует гармоническая функция H на $\mathbf{R}_+^{n+1}$ такая, что $U = \nabla H$.

Мы будем оценивать следующий интеграл:

$$I_p(x_{n+1}, U_k) := \int_{\mathbf{R}^n} \left| U_k(x', x_{n+1}) \right|^p dx', \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

для $0 < p \leq 1$, если $I_p(x_{n+1}, U_{n+1})$ известно. Аналогичные оценки для $p = 1$ были получены в [15].

Нам понадобится следующий результат, который носит название *разделение Уитни* (см. [14], гл. VI).

Теорема 1.2. *Существует набор замкнутых кубов $\{\Delta_k\}_{k=1}^\infty$ в $\mathbf{R}_+^{n+1}$, с ребрами параллельными координатным осям, такой, что*

1. $\cup_{k=1}^\infty \Delta_k = \mathbf{R}_+^{n+1}$,
2. Внутренности кубов $\{\Delta_k\}_{k=1}^\infty$ попарно не пересекаются,
3. $\text{diam} \Delta_k \leq \text{dist}(\Delta_k, \partial \mathbf{R}_+^{n+1}) \leq 4 \text{diam} \Delta_k$,
4. Если $\varepsilon > 1/4$ и Δ_k^* ($k \geq 1$) - кубы с теми же центрами, что и Δ_k , но растянутый $(1 + \varepsilon)$ раза, то система $\{\Delta_k^*\}_{k=1}^\infty$ образует конечное покрытие $\mathbf{R}_+^{n+1}$.

Доказательство следующего факта можно найти в [3] или в [15].

Лемма 1.3. *Пусть Δ_k куб из коллекции $\{\Delta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в теореме 1.2 и пусть $x^{(k)}$ - его центр. Для любого гармонического векторного поля $U(x)$ на $\mathbf{R}_+^{n+1}$ справедлива следующая оценка*

$$\max_{x \in \Delta_k} |U(x)|^p \left(x_{n+1}^{(k)} \right)^\alpha \leq \frac{C}{|\Delta_k^*|} \int_{\Delta_k^*} |U(y)|^p y_{n+1}^\alpha dy' dy_{n+1}, \quad \alpha \geq -1$$

где $0 < p < +\infty$, а постоянная C зависит только от p и n .

Следующая теорема была доказана в [11].

Теорема 1.3. *Пусть $V(re^{i\theta})$ есть гармонически сопряженная функции $U(re^{i\theta})$ такая, что $V(0) = 0$, и пусть*

$$|U(re^{i\varphi})| \leq \mu \left(\frac{1}{1-r} \right) = \varphi \left(\log \frac{1}{1-r} \right), \quad 0 \leq r < 1$$

где $\varphi(t)$ положительная, возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и $\psi(t) = \log \varphi(t)$.

Предположим, что $\psi(t) \in C^2(0, +\infty)$ и $1/\psi'(t)$ есть выпуклая функция.

1. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = l$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r_\varepsilon \in [0; 1)$ такое, что

$$|V(re^{i\theta})| \leq \frac{2}{\pi} \left[\left(1 + \frac{1}{l}\right)^{l+1} + \varepsilon \right] \mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad \text{при } r \geq r_\varepsilon.$$

2. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} t\psi'(t) = K > 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r_\varepsilon \in [0; 1)$ такое, что

$$|V(re^{i\theta})| \leq \frac{2}{\pi} \frac{K(1+\varepsilon)}{K+1} \mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \left[\psi'\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \right]^{-1} \quad \text{при } r \geq r_\varepsilon.$$

3. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} t\psi'(t) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $r_\varepsilon \in [0; 1)$ такое, что

$$|V(re^{i\theta})| \leq \frac{2+\varepsilon}{\pi} \mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \log \frac{1}{1-r} \quad \text{при } r \geq r_\varepsilon.$$

2. ОЦЕНКИ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

Теорема 2.1. Пусть $V(re^{i\varphi})$ - гармонически сопряженная функция гармонической функции $U(re^{i\varphi})$ такая, что $V(0) = 0$, и пусть для $0 < p \leq 1$,

$$I_p(r, U) \leq \mu\left(\frac{1}{1-r}\right) = \varphi\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \quad \text{при } 0 \leq r < 1,$$

где $\varphi(t)$ положительная, монотонно возрастающая функция на $[0, +\infty)$ и $\psi(t) = \log \varphi(t)$.

Предположим, что $\psi(t) \in C^2(0, +\infty)$ и $1/\psi'(t)$ есть выпуклая функция.

A. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = l$, $0 < l \leq +\infty$, тогда

$$I_p(r, V) \leq C\mu\left(\frac{1}{1-r}\right), \quad \text{при } r \in [0; 1)$$

B. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow +\infty} t\psi'(t) = K > 0$, тогда

$$I_p(r, V) \leq C\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \left[\psi'\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \right]^{-1}, \quad \text{при } r \in [0; 1).$$

C. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} t\psi'(t) = 0$, тогда

$$I_p(r, V) \leq C\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \log \frac{1}{1-r}, \quad \text{при } r \in [0; 1).$$

Доказательство. Функция $f(z) = U(z) + iV(z)$ аналитична в открытом единичном круге $\mathbf{D}$. Для $0 < R < 1$ обозначим $f_R(z) = f(Rz)$. Тогда $f_R(z)$ есть ограниченная аналитическая функция на $\mathbf{D}$. Следуя М. Джрбашяну (см.[4]), функцию $f_R(z)$ можно представить в виде:

$$f_R(z) = \frac{2(\alpha+1)}{\pi} \int_{|\zeta|<1} \left(1 - |\zeta|^2\right)^\alpha \frac{U_R(\zeta)}{(1 - \bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta) - f_R(0),$$

где $\alpha > -1$ и $U_R(z) = \operatorname{Re} f_R(z)$. Так как $|f_R(0)| \leq C$, мы находим, что

$$\begin{aligned} |f_R(z)| &\leq C \int_{|\zeta|<1} \left(1 - |\zeta|^2\right)^\alpha \frac{|U_R(\zeta)|}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta) \\ &= C \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \int_{\Delta_{k,l}} \left(1 - |\zeta|^2\right)^\alpha \frac{|U_R(\zeta)|}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Используя неравенство $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ для $a \geq 0, b \geq 0, 0 < p \leq 1$ и разбиение Уитни, получим

$$|f_R(z)|^p \leq C \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \left(\int_{\Delta_{k,l}} \left(1 - |\zeta|^2\right)^\alpha \frac{|U_R(\zeta)|}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta) \right)^p.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f_R(z)|^p d\varphi &\leq C \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\Delta_{k,l}} \left(1 - |\zeta|^2\right)^\alpha \frac{|U_R(\zeta)|}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\alpha+2}} d\sigma(\zeta) \right)^p d\varphi \\ (2.1) \quad &\leq C \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\zeta \in \Delta_{k,l}} \left(1 - |\zeta|^2\right)^{p\alpha} |U_R(\zeta)|^p \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\int_{\Delta_{k,l}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1 - \bar{\zeta}z|^{\alpha+2}} \right)^p. \end{aligned}$$

Теперь оценим интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\int_{\Delta_{k,l}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha+2}} \right)^p = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \int_{\alpha_{kl}}^{\alpha_{kl+1}} \frac{\rho d\rho d\theta}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha+2}} \right)^p,$$

где $\rho_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, $\alpha_{kl} = \frac{\pi l}{2^k}$, $k = 0, 1, \dots$, $l = -2^k, \dots, 2^k - 1$. Последний интеграл равен

$$\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{\alpha_{kl}} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \int_{\alpha_{kl}}^{\alpha_{kl+1}} \frac{\rho d\rho d\theta}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha+2}} \right)^p d\varphi \\ &+ \int_{\alpha_{kl}}^{\alpha_{kl+1}} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \int_{\alpha_{kl}}^{\alpha_{kl+1}} \frac{\rho d\rho d\theta}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha+2}} \right)^p d\varphi \\ &+ \int_{\alpha_{kl+1}}^{\pi} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \int_{\alpha_{kl}}^{\alpha_{kl+1}} \frac{\rho d\rho d\theta}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha+2}} \right)^p d\varphi := I_{kl}^1 + I_{kl}^2 + I_{kl}^3. \end{aligned}$$

Оценим каждый интеграл по отдельности. Предположим, что $k \geq 2$, $\rho_k \leq \rho \leq \rho_{k+1}$, $|z| \geq 1/2$ и $-\pi \leq \varphi \leq \alpha_{kl}$. Используя оценку

$$\left| 1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)} \right| \geq C \left| 1 - r\rho_{k+1} e^{i(\varphi-\theta)} \right| \geq C \left| 1 - r\rho_{k+1} e^{i(\varphi-\alpha_{kl})} \right|,$$

получим

$$\begin{aligned} |I_{kl}^1| &\leq \int_{-\pi}^{\alpha_{kl}} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \int_{\alpha_{kl}}^{\alpha_{kl+1}} \frac{\rho d\rho d\theta}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)}|^{\alpha+2}} \right)^p d\varphi \leq \\ &\leq C \left[\int_{-\pi}^{\alpha_{kl}} \frac{1}{|1 - r\rho_{k+1} e^{i(\varphi-\alpha_{kl})}|^{(2+\alpha)p}} \left(\int_{\Delta_{kl}} d\sigma(z) \right)^p d\varphi \right] \\ &= C \int_{-\pi}^{\alpha_{kl}} \frac{(|\Delta_{kl}|)^p d\varphi}{|1 - r\rho_{k+1} e^{i(\varphi-\alpha_{kl})}|^{(2+\alpha)p}} \\ &\leq C \frac{(|\Delta_{kl}|)^p}{(1 - r\rho_{k+1})^{(2+\alpha)p-1}} \approx \frac{C |\Delta_{kl}|}{(1 - r\rho)^{(2+\alpha)p-1} (1 - \rho^2)^{2(1-p)}}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали следующее неравенство:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{|1 - r\rho e^{i(\varphi-\theta)}|^l} \leq \frac{C}{(1 - r\rho)^{l-1}}$$

и эквивалентность $|\Delta_{kl}| \approx (1 - \rho^2)^2$, которые справедливы благодаря выбору α .

Аналогичным образом получим оценки для I_{kl}^2 и I_{kl}^3 . Подставляя эти оценки в (2.1) и используя леммы 1.1 и 1.2, получаем

$$\begin{aligned} I_p(r, f_R) &= \int_{-\pi}^{\pi} |f_R(re^{i\varphi})|^p d\varphi \\ &\leq C \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\rho e^{i\theta} \in \Delta_{k,l}} \frac{(1 - \rho^2)^{p\alpha} |U_R(\rho e^{i\theta})|^p}{(1 - r\rho)^{p(\alpha+2)-1} (1 - \rho^2)^{2(1-p)}} |\Delta_{k,l}|. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} I_p(r, f_R) &= \int_{-\pi}^{\pi} |f_R(re^{i\varphi})|^p d\varphi \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{\rho e^{i\theta} \in \Delta_{k,l}} \frac{(1 - \rho^2)^{p\alpha} |U_R(\rho e^{i\theta})|^p}{(1 - r\rho)^{p(\alpha+2)-1} (1 - \rho^2)^{2(1-p)}} |\Delta_{k,l}| \\ &\leq \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \rho^2)^{p(\alpha+2)-2}}{(1 - r\rho)^{p(\alpha+2)-1}} |U_R(\rho e^{i\theta})|^p d\rho d\theta, \end{aligned}$$

(здесь достаточно выбрать $\alpha > \frac{2(1-p)}{p}$), то получаем

$$I_p(r, f_R) \leq C \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1 - \rho^2)^{p(\alpha+2)-2}}{(1 - r\rho)^{p(\alpha+2)-1}} |U_R(\rho e^{i\theta})|^p d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= C \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^{p(\alpha+2)-2}}{(1-r\rho)^{p(\alpha+2)-1}} d\rho \int_{-\pi}^{\pi} |U_R(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \\
&\leq C \int_0^1 \frac{(1-\rho^2)^{p(\alpha+2)-2}}{(1-r\rho)^{p(\alpha+2)-1}} \mu\left(\frac{1}{1-R\rho}\right) d\rho \leq C \int_0^r \frac{\mu\left(\frac{1}{1-h}\right)}{1-h} dh.
\end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $x = \log \frac{1}{1-h}$, учитывая, что

$$\mu\left(\frac{1}{1-h}\right) = e^{\psi(\log \frac{1}{1-h})} = e^{\psi(x)}$$

и

$$I_p(r, V_r) \leq I_p(r, f_r),$$

получим следующую оценку:

$$I_p(r, V_r) \leq C \int_0^{\log \frac{1}{1-r}} e^{\psi(x)} dx.$$

Отсюда легко следуют утверждения теоремы 2.1. □

Замечание 2.1. В случае $\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) \leq \frac{C}{(1-r)^\alpha}$, $\alpha > 0$ мы получаем известную теорему Харди-Литтлвуда.

Ниже приведены простые примеры для единичного круга:

- A. $\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) = C \exp\left(\frac{1}{(1-r)^\alpha}\right) \log^\beta\left(\frac{1}{1-r}\right) (1-r)^{-\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, $C > 0$.
- B. $\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) = C \left(\log \log \frac{1}{1-r}\right)^\alpha \log\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $\alpha \geq 0$, $C > 0$.
- C. $\mu\left(\frac{1}{1-r}\right) = C \left(\log \log \frac{1}{1-r}\right)^\alpha \log \log\left(\frac{1}{1-r}\right)$, $\alpha \geq 0$, $C > 0$.

3. Оценки для система Рисса в $\mathbf{R}_+^{n+1}$

Главным результатом этого параграфа является следующая теорема, которая обобщает теорему 1.3. Здесь мы рассматриваем всевозможные типы роста.

Теорема 3.1. Пусть $U(x) = \{U_1(x), \dots, U_n(x), U_{n+1}(x)\}$ система Рисса в $\mathbf{R}_+^{n+1}$ такая, что

$$\lim_{x_{n+1} \rightarrow +\infty} U_k(x', x_{n+1}) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

Предположим, что для некоторого $\alpha > 1$

$$I_p(x_{n+1}, U_{n+1}) \leq \mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right), \quad \mu\left(\frac{1}{t}\right) = o\left(\frac{1}{\log^\alpha t}\right) \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

и пусть $\mu(t) = \varphi(\log(1+t))$, где $\varphi(t)$ монотонно возрастающая на $[0; \infty)$.

Предположим также, что $\psi(t) = \log \varphi(t) \in C^2(0; +\infty)$ и $1/\psi'(t)$ вогнутая функция.

A. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = l > 0$, тогда

$$I_p(x_{n+1}, U_k) \leq C\mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

B. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t) = 0$, но $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t)t = K > 0$, тогда

$$I_p(x_{n+1}, U_k) \leq C\mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)\psi'\left(\log\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

C. Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} \psi'(t)t = 0$, тогда

$$I_p(x_{n+1}, U_k) \leq C\mu\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Пусть $U_{n+1}(x', x_{n+1})$ гармоническая функция на $\mathbf{R}_+^{n+1}$. Обозначим $U_{n+1}^a(x', x_{n+1}) = U_{n+1}(x', x_{n+1} + a)$ для $a > 0$ и определим остальные n функций следующим образом:

$$U_j^a(x', x_{n+1}) = \int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} y_{n+1}^m Q_j^{(m)}(x, y) U_{n+1}(y', y_{n+1} + a) dy' dy_{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

где $m > \frac{\alpha+1+n}{p} - n - 1$ и

$$Q_j^{(m)}(x, y) = C_m \frac{\partial^m}{\partial x_{n+1}^{m+1}} \left\{ \frac{x_j - y_j}{(|x' - y'|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2)^{\frac{n+1}{2}}} \right\},$$

где C_m постоянная, зависящая только от m . Тогда мы имеем гармоническое векторное поле $U^a(x) = \{U_1^a(x), \dots, U_n^a(x), U_{n+1}^a(x)\}$. Применив разбиение Уитни для $x_{n+1} > \delta \geq 0$ и используя неравенство $(a+b)^p \leq a^p + b^p$, для $a, b \geq 0$, $0 < p \leq 1$, получаем

$$\begin{aligned} \left| U_j^a(x', x_{n+1}) \right|^p &\leq \left[\int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} y_{n+1}^m |Q_j^{(m)}(x, y)| \cdot |U_{n+1}(y', y_{n+1} + a)| dy' dy_{n+1} \right]^p \\ &\leq \sum_k \left(\int_{\Delta_k} y_{n+1}^m |Q_j^{(m)}(x, y)| \cdot |U_{n+1}(y', y_{n+1} + a)| dy' dy_{n+1} \right)^p \\ &\leq C \sum_k \left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{mp} \left| Q_j^{(m)}(x, y_n^{(k)}) \right|^p \max_{y \in \Delta_k} |U_{n+1}(y', y_{n+1} + a)|^p |\Delta_k|^p, \end{aligned}$$

где $y^{(k)}$ является центром куба Δ_k и $y_{n+1}^{(k)}$ его $(n+1)$ -ая координата. Из последнего неравенства следует:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} \left| U_j^a(x', x_{n+1}) \right|^p dx' \leq \\ & C \int_{\mathbf{R}^n} \left(\sum_k \left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{mp} \left| Q_j^{(m)}(x, y_n^{(k)}) \right|^p \max_{y \in \overline{\Delta_k}} \left| U_{n+1}(y', y_{n+1} + a) \right|^p |\Delta_k|^p \right) dx' \\ & = C \sum_k \left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{mp} \max_{y \in \overline{\Delta_k}} \left| U_{n+1}(y', y_{n+1} + a) \right|^p |\Delta_k|^p \int_{\mathbf{R}^n} \left| Q_j^{(m)}(x, y_n^{(k)}) \right|^p dx'. \end{aligned}$$

Пользуясь нижеследующей оценкой

$$|Q_j^{(m)}(x, y)| \leq C \left(\left| x' - y' \right|^2 + (x_{n+1} + y_{n+1})^2 \right)^{-\frac{n+1+m}{2}}$$

(см. [3], [16]) получим

$$\begin{aligned} I_p^a(x_{n+1}, U_j) & \leq C \sum_k \frac{\left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{mp} \max_{y \in \overline{\Delta_k}} \left| U_{n+1}(y', y_{n+1} + a) \right|^p |\Delta_k|^p}{\left(x_{n+1} + y_{n+1}^{(k)} \right)^{(n+1+m)p-n}} \\ & \leq C \sum_k \frac{\max_{y \in \overline{\Delta_k}} \left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{mp} \left| U_{n+1}^a(y) \right|^p |\Delta_k|^p}{\left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{(n+1+m)p-n}}, \end{aligned}$$

если взять m таким, что $(n+1+m)p > n+1$.

Так как $|\Delta_k| \approx \left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{n+1}$ то мы получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} I_p^a(x_{n+1}, U_j) & \leq C \sum_k \frac{\max_{y \in \overline{\Delta_k}} \left| U_{n+1}^a(y) \right|^p |\Delta_k|^{p-1} |\Delta_k|}{\left(y_{n+1}^{(k)} \right)^{(n+1)p-(n+1)} \cdot y_{n+1}^{(k)}} \\ & \approx C \sum_k \frac{\max_{y \in \overline{\Delta_k}} \left| U_{n+1}^a(y) \right|^p}{y_{n+1}^{(k)}} |\Delta_k| \leq C \int_{\mathbf{R}_+^{n+1}} \frac{\left| U_{n+1}(y', y_{n+1} + a) \right|^p}{y_{n+1}} dy' \leq \\ & C \int_{x_{n+1}}^{\infty} \frac{1}{y_{n+1}} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \left| U_{n+1}(y', y_{n+1} + a) \right|^p \right) dy_{n+1} \\ & \leq C \int_{x_{n+1}}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{1}{y_{n+1}+a}\right)}{y_{n+1}} dy_{n+1} \leq C \int_{x_{n+1}}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{1}{y_{n+1}}\right)}{y_{n+1}} dy_{n+1}, \end{aligned}$$

при достаточно маленьких a . Таким образом,

$$I_p(x_{n+1}, U_j) \leq C \int_{x_{n+1}}^{\infty} \frac{\mu\left(\frac{1}{t}\right)}{t} dt.$$

Последний интеграл конечен в силу условий $\mu\left(\frac{1}{t}\right) = o\left(\frac{1}{\log^\alpha t}\right)$ при $t \rightarrow \infty$, $\alpha > 1$,

Сделаем замену переменной $x = \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ и учитывая, что

$$\mu\left(\frac{1}{t}\right) = \varphi\left(\log\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) = e^{\psi \log\left(1 + \frac{1}{t}\right)} = e^{\psi(x)},$$

$t = (e^x - 1)^{-1}$, $dt = -\frac{e^x dx}{(e^x - 1)^2}$, получаем

$$I_p(x_{n+1}, U_j) \leq C \int_0^{\log\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)} \frac{e^{\psi(x)} e^x dx}{e^x - 1} \approx C \int_0^{\log\left(1 + \frac{1}{x_{n+1}}\right)} e^{\psi(x)} dx.$$

Последний переход возможен, так как $\mu\left(\frac{1}{t}\right) = o\left(\frac{1}{\log^\alpha t}\right)$ $\alpha > 1$ при $t \rightarrow \infty$.

Используя теорему 1.3, получим утверждения теоремы 3.1. $\square$

Abstract. In this paper we generalize a theorem of Hardy and Littlewood concerning the growth of conjugate harmonic functions. Moreover, we obtain an estimate for Riesz systems in the upper half-space R_+^{n+1} of R^{n+1} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Axler, Bergman spaces and their operators, Surveys of Some Results in the Operator Theory, vol. 1, (J.B. Conway and B.B. Morrel, editors), Pitman Res. Notes Math. Ser. vol. 171, 1 – 50 (1988).
- [2] M. L. Cartwright, “On analytic functions regular in the unit circle”, Quart. J. Math. Oxford, ser. 6, 94 – 105 (1935).
- [3] A. E. Djrbashyan, “The classes A_α^p of harmonic functions in the half-spaces and an analogous of the Theorem of M. Riesz”, Izvestia NAN Armenii, ser. Matematika, **22**, no. 4, 386 – 398 (1987).
- [4] M. M. Djrbashyan, “On the representational problem of analytic functions [in Russian]”, Soobsh. Inst. Math. and Mech. A.N. of Armenia, **2**, 3 – 40 (1948).
- [5] P. L. Duren, Theory of H^p spaces, (Dover Publications, Mineola, New York (2000).
- [6] C. L. Fefferman and E. M. Stein, “ H^p spaces of several variables”, Acta Math., **129**, 137 – 193 (1972).
- [7] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “Some properties of conjugate functions”, J. Rein Angew. Math., **167**, 405 – 423 (1932).
- [8] G. H. Hardy, Orders of Infinity, Cambridge Tracts in Math. and Math. Physics, No. 12 (Second edition, Cambridge 1924).
- [9] C. N. Linden, “The minimum modules of functions regular and of finite order in the unit circle”, Quart. Math., Oxford, ser.(2)7, 196 – 216 (1956).
- [10] V. I. Macaev, “A method of estimation for resolvent of non self-adjoint operators”, [in Russian], Dokl. Akad. Nauk USSR, **154**, 1034 – 1037 (1964).
- [11] N. K. Nikolskii, “Selected problem of weighted approximation and spectral analysis”, Trudy math. Inst. Steklov, **120**, 1 – 270 (1974).
- [12] F. A. Shamoian and M. A. Zakaryan, “Some problems of representation in weighted spaces of functions harmonic in a ball”, Dokl. Akad. Nauk Armenii, **94**, no. 4, 210 – 216 (1993).
- [13] F. A. Shamoian, “Diagonal mapping and problems of representation in anisotropic spaces of functions that are holomorphic in a polydisk” [in Russian], Sibirsk. Math. Zh., **31**, no. 2, 197 – 215 (1990); translation in Siberian Math. J. **31**, no. 2, 350 – 365 (1990).

- [14] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton (1970).
- [15] M. A. Zakaryan, "A generalization of the Hardy-Littlewood Theorem and estimates for the Riesz system in R_+^{n+1} ", Izvestia NAN Armenii, ser. Matematika, **34**, no. 1, 72 – 82 (1999), translation in J. Contemp. Math. Anal. **34**, no. 1, 69 – 80 (1999).
- [16] M. A. Zakaryan, "Parametric representations and duality of weighted spaces of functions harmonic in a half- space", Izvestia NAN Armenii, ser. Matematika, **32**, no. 5, 76 – 88 (1997); translation in J. Cont. Math. Anal., **32**, no. 5, 69 – 80 (1997).

Поступила 28 сентября 2010