Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 1, 2013, стр. 71-78

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВОПРОСУ ОПИСАНИЯ СПЕЦИФИКАЦИЙ ОДНОТОЧЕЧНЫМИ ПОДСИСТЕМАМИ

Б. С. НАХАПЕТЯН, Г. Т. ОРОМЯН

Институт математики НАН Армении
Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mails: *nahapet@instmath.sci.am*, *Gevorg.horomyan@yahoo.com*

Аннотация. В работе [5] были получены необходимые и достаточные условия (условия согласованности), при которых система одноточечных распределений вероятностей, индексированных бесконечными граничными условиями, является подсистемой некоторой спецификации. В настоящей заметке дана алгебраическая интерпретация указанных условий согласованности. Кроме того, приводится их физическая интерпретация, предложенная Дашяном С. и Нахапетяном Б.С.

MSC2010 number: 60G60

Ключевые слова: Спецификация, одноточечные условные распределения, условия согласованности, алгебраическая интерпретация.

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие спецификации (согласованная система конечномерных распределений с бесконечными граничными условиями) играет основополагающую роль в вопросах описания случайных полей (см., например, [1] - [3]). В работах [1, 2] была поставлена задача (проблема Добрушина) отыскания необходимых и достаточных условий (условия согласованности), при которых система одноточечных вероятностных распределений, индексированных бесконечными граничными условиями, является подсистемой некоторой спецификации.

Данная задача была решена в работах [4, 5], где, в частности, было показано, что найденные условия допускают элементарную вероятностную интерпретацию.

В настоящей заметке раскрывается алгебраический смысл этих условий. Показывается, что рассматриваемая проблема по своей сути является алгебраической и сводится к вопросу существования решения некоторой бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Условия же согласованности обеспечивают ее разрешимость.

Показывается также, что указанная проблема эквивалентна задаче продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ — целочисленная решетка, $W = \left\{V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\right\}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$ и X — некоторое конечное множество.

Для $S \subset \mathbb{Z}^d$ обозначим через X^S совокупность всех конфигураций на S. При $S = \varnothing$ положим $X^{\varnothing} = \{\varnothing\}$, где $\varnothing$ — пустая конфигурация. Для $S, T \subset \mathbb{Z}^d$, таких, что $S \subset T$ и любой конфигурации $x = (x_t, t \in T)$ на T через x_S обозначим сужение конфигурации x на S, определяемое следующим образом $x_S = (x_t, t \in S)$. Для $S, T \subset \mathbb{Z}^d$, таких, что $S \cap T = \varnothing$ и любых конфигураций $x \in X^S$ и $y \in X^T$ обозначим через xy конкатенацию x и y, т.е. такую конфигурацию на $S \cup T$, которая совпадает с x на S и с y на T.

Пусть $Q = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}, V \in W\right\}$ – некоторая спецификация, т.е. совокупность положительных конечномерных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$, согласованная по Добрушину, а именно, для всех $I, V \in W$, $I \subset V$,

$$q_V^{\bar{x}}(xy) = \left(q_V^{\bar{x}}\right)_{V \setminus I}(x)\, q_I^{\bar{x}x}(y), \qquad y \in X^I,$$

где $(q_V^{\bar{x}})_{V \setminus I}$ есть сужение распределения $q_V^{\bar{x}}$ на $V \setminus I$, а именно

$$\left(q_V^{\bar{x}}\right)_{V \setminus I}(x) = \sum_{z \in X^I} q_V^{\bar{x}}(xz), \qquad x \in X^{V \setminus I}.$$

Имеет место следующее утверждение (см. [5])

Теорема 2.1. *Пусть* $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ *– совокупность одноточечных положительных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями. Для того, чтобы совокупность* $Q^{(1)}$ *была подсистемой некоторой спецификации, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия согласованности: для любых* $t, s \in \mathbb{Z}^d$, $x, u \in X^t$, $y, v \in X^s$ *и*

$\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$

$$q_t^{\bar{x}v}(x)\, q_s^{\bar{x}x}(y)\, q_t^{\bar{x}y}(u)\, q_s^{\bar{x}u}(v) = q_s^{\bar{x}u}(y)\, q_t^{\bar{x}y}(x)\, q_s^{\bar{x}x}(v)\, q_t^{\bar{x}v}(u). \tag{2.1}$$

3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАННОСТИ

Пусть $Q = \left\{ q_\Lambda^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}, \Lambda \in W \right\}$ — некоторая спецификация. Пусть $\Lambda \in W$, $t \in \Lambda$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$. Поскольку для Q условия согласованности Добрушина имеют место, можем написать

$$q_\Lambda^{\bar{x}}(xu) = q_t^{\bar{x}u}(x) \sum_{z \in X} q_\Lambda^{\bar{x}}(zu), \tag{3.1}$$

где $x \in X$, $u \in X^{\Lambda \setminus \{t\}}$. Отсюда видно, что проблему Добрушина можно интерпретировать как вопрос разрешимости системы уравнений (3.1), где $q_t^{\bar{x}u}(x)$ — заданные величины, а $q_\Lambda^{\bar{x}}(zu)$, $z \in X$ — неизвестные.

На простом примере покажем, как условия согласованности (2.1) обеспечивают разрешимость системы уравнений (3.1). Пусть $\Lambda = \{t, s\}$, $X = \{0, 1\}$. Для этого случая система (3.1) запишется следующим образом

$$\begin{cases} q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(x, y) = q_t^{\bar{x}y}(x) \sum\limits_{u \in X} q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(u, y) \\ q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(x, y) = q_s^{\bar{x}x}(y) \sum\limits_{u \in X} q_{\{t,s\}}^{\bar{x}}(x, u) \end{cases}$$

Поскольку граничные условия $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t,s\}}$ фиксированы, мы не будем явно отмечать зависимость от них распределений вероятностей, и примем следующую систему обозначений

$$q_{t,s}^{\bar{x}}(x, y) = z_{xy}, \qquad q_t^{\bar{x}y}(x) = a_{xy}, \qquad q_s^{\bar{x}x}(y) = b_{yx}, \qquad x, y \in X.$$

В этих обозначениях система (3.1) будет эквивалентна следующей системе уравнений

$$z_{00} = \frac{a_{00}}{a_{10}} \cdot z_{10}, \qquad z_{01} = \frac{a_{01}}{a_{11}} \cdot z_{11}, \qquad z_{00} = \frac{b_{00}}{b_{10}} \cdot z_{01}, \qquad z_{10} = \frac{b_{01}}{b_{11}} \cdot z_{11},$$

при этом $0 < a_{xy} < 1$, $0 < b_{yx} < 1$, $x, y \in X$ и

$$a_{00} + a_{10} = 1, \qquad a_{01} + a_{11} = 1, \qquad b_{00} + b_{10} = 1, \qquad b_{01} + b_{11} = 1.$$

Для того, чтобы данная однородная система имела ненулевое решение, ее детерминант

$$D = a_{00} b_{10} a_{11} b_{01} - b_{00} a_{01} b_{11} a_{10}$$

должен равняться нулю, а это требование эквивалентно выполнению условия согласованности (2.1).

В общем случае, решение данной задачи сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций.

Пусть $\Lambda \in W$. Рассмотрим следующее функциональное уравнение

$$a(x) = A(x,y)\,a(y)\,, \tag{3.2}$$

где $a(x)$, $x \in X^{\Lambda}$ — искомая функция, а $A(x,y)$, $x,y \in X^{\Lambda}$ — известная функция, определенная на упорядоченных парах конфигураций.

Для того, чтобы уравнение (3.2) имело бы решение, необходимо, чтобы функция $A(x,y)$ удовлетворяла следующим очевидным соотношениям

$$A(x,x) = 1, \qquad A(x,y) = A(x,z)\,A(z,y)\,. \tag{3.3}$$

Эти условия являются также достаточными для существования решения уравнения (3.2).

Отметим, что из (3.3) следует, что для любых двух последовательностей конфигураций $z_1, z_2, ..., z_n$ и $z_1', z_2', ..., z_m'$ выполняется равенство

$$A(x,z_1)\,A(z_1,z_2)\cdot ... \cdot A(z_n,y) = A(x,z'_1)\,A(z'_1,z'_2)\cdot ... \cdot A(z'_m,y)\,. \tag{3.4}$$

Утверждение 3.1. *Пусть условия* (3.3) *имеют место. Тогда для любого* $z_0 \in X^{\Lambda}$ *и постоянной* $C(z_0)$ *функция*

$$a(x) = A(x,z_0)\,C(z_0)$$

является решением уравнения (3.2).

Если функция $a(x)$ *является решением уравнения* (3.2), *тогда* $a(x)$ *с необходимостью имеет следующий вид*

$$a(x) = A(x,z_0)\,a(z_0)\,,$$

где z_0 *— любая конфигурация из* X^{Λ}.

По причине простоты, доказательство этого утверждения опускается.

Пусть $M = X^{\Lambda} \times X^{\Lambda}$ — подмножество пар конфигураций на X^{Λ}, отличающихся только в одной точке. Пусть заданная на M функция $A^*(x,y)$ удовлетворяет условиям (3.3). Приведем условия, при которых функция $A^*(x,y)$ может быть продолжена на все пространство $X^\Lambda \times X^\Lambda$.

Введем оператор $K_t^u : X^\Lambda \to X^\Lambda$, который при действии на конфигурацию $x \in X^\Lambda$ присваивает ее компоненте в точке t значение u, $u \in X$, $t \in \mathbb{Z}^d$.

Теорема 3.1. *Пусть функция $A^*(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям согласованности: для любых $t, s \in \mathbb{Z}^d$ и $u, v \in X$*

(3.5)

$$A^*(x, K_t^u x)\, A^*(K_t^u x, K_s^v K_t^u x) = A^*(x, K_s^v x)\, A^*(K_s^v x, K_t^u K_s^v x), \qquad x \in X^\Lambda.$$

Тогда функция $A^*(x,y)$ имеет продолжение $A(x,y)$ на все пространство $X^\Lambda \times X^\Lambda$, такое, что для $A(x,y)$ выполняются условия (3.3).

Доказательство. Пусть $x, y \in X^\Lambda$ — некоторые конфигурации, отличающиеся в n $(n \le |\Lambda|)$ точках, и пусть $t_1, t_2, ..., t_n$ — их некоторая нумерация. Пусть $u_i = y_{t_i}$, $i = 1, 2, ..., n$. Положим

$$A(x,y) = A^*\left(x, K_{t_1}^{u_1} x\right) A^*\left(K_{t_1}^{u_1} x, K_{t_2}^{u_2} K_{t_1}^{u_1} x\right) \cdot ... \cdot A^*\left(K_{t_n}^{u_n} ... K_{t_1}^{u_1} x, y\right).$$

Покажем, что функция $A(x,y)$ корректно определена, т.е. ее значения не зависят от нумерации точек, в которых отличаются конфигурации x и y. Достаточно показать, что

$$\begin{aligned} &A^*\left(x, K_{t_1}^{u_1} x\right) A^*\left(K_{t_1}^{u_1} x, K_{t_2}^{u_2} K_{t_1}^{u_1} x\right) \cdot ... \cdot A^*\left(K_{t_n}^{u_n} ... K_{t_1}^{u_1} x, y\right) = \\ &= A^*(x, K_1^{u_1} x)\, A^*(K_1^{u_1} x, K_2^{u_2} K_1^{u_1} x) \cdot ... \cdot A^*(K_n^{u_n} ... K_1^{u_1} x, y). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Справедливость же соотношения (3.6) следует из того, что операторы $K_{t_1}^{u_1}$, $K_{t_2}^{u_2}$, ..., $K_{t_n}^{u_n}$ коммутируют, а переход от перестановки $t_1, t_2, ..., t_n$ к перестановке 1,2, ...,n осуществляется посредством определенного количества транспозиций, при этом, благодаря условию (3.5), значение функции $A(x,y)$ не изменяется. Остается заметить, что из (3.4) непосредственно следует выполнимость условий (3.3) для функции $A(x,y)$. □

Покажем, что теорема 2.1 является прямым следствием теоремы 3.1. Пусть $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ — совокупность одноточечных распределений вероятностей, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1. Для $t \in \Lambda$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \Lambda}$ определим

$$A^*(x,y) = \frac{q_t^{\bar{x}z}(x_t)}{q_t^{\bar{x}z}(y_t)},$$

где $x = x_t z$, $y = y_t z$, $x_t, y_t \in X^{\{t\}}$, $z \in X^{\Lambda \setminus \{t\}}$. Функция $A^*(x,y)$ очевидным образом удовлетворяет условиям теоремы 3.1, следовательно, она может быть продолжена на все $X^\Lambda \times X^\Lambda$, причем

$$A(x,y) = \frac{q_t^{\bar{x} y_{(t_2,\ldots,t_n)}}(x_{t_1})\, q_t^{\bar{x} x_{t_1} y_{(t_3,\ldots,t_n)}}(x_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_t^{\bar{x} x_{(t_1,\ldots,t_{n-1})}}(x_{t_n})}{q_t^{\bar{x} y_{(t_2,\ldots,t_n)}}(y_{t_1})\, q_t^{\bar{x} x_{t_1} y_{(t_3,\ldots,t_n)}}(y_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_t^{\bar{x} x_{(t_1,\ldots,t_{n-1})}}(y_{t_n})}, \qquad x, y \in X^\Lambda,$$

а решение уравнения

$$a(x) = A(x,y)\, a(y), \qquad x, y \in X^\Lambda,$$

удовлетворяющее требованию

$$\sum_{x \in X^\Lambda} a(x) = 1$$

единственно и имеет вид

$$a(x) = \frac{A(x,y)}{\sum\limits_{z \in X^\Lambda} A(z,y)}, \qquad x \in X^\Lambda,$$

который совпадает с формулой восстановления спецификации, полученной в работе [5].

Заметим, что имеется также и физическая интерпретация условий согласованности (2.1), предложенная Дашяном С. и Нахапетяном Б.С.

4. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ УСЛОВИЙ СОГЛАСОВАННОСТИ

Пусть совокупность функций

$$\Delta = \left\{ \Delta_t^{\bar{x}}(x,u) : x, u \in X, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

такова, что ее элементы связаны соотношением

$$\Delta_t^{\bar{x}}(x,u) = \Delta_t^{\bar{x}}(x,z) + \Delta_t^{\bar{x}}(z,u). \tag{4.1}$$

Понятно, что $\Delta_t^{\bar{x}}(x,x) = 0$. Величину $\Delta_t^{\bar{x}}(x,u)$ можно трактовать как энергию (при граничных условиях $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$), необходимую для перехода частицы, находящейся в точке t, из состояния x в состояние u. Тогда соотношение (4.1) будет представлять собой уравнение баланса.

Обозначим через $\Delta_{\{t,s\}}^{\bar{x}}((x,u);(y,v))$ энергию (при граничных условиях $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t,s\}}$), необходимую для перехода частицы, находящейся в точке t, из состояния x в состояние u, и частицы, находящейся в точке s, из состояния y в состояние v. Понятно, что должно быть

$$\Delta^{\bar{x}}_{\{t,s\}}\left((x,u);(y,v)\right)=\Delta^{\bar{x}y}_{t}(x,u)+\Delta^{\bar{x}u}_{s}(y,v)$$

и

$$\Delta^{\bar{x}}_{\{t,s\}}\left((x,u);(y,v)\right)=\Delta^{\bar{x}x}_{s}(y,v)+\Delta^{\bar{x}v}_{t}(x,u).$$

Таким образом, элементы совокупности Δ должны быть связаны следующим соотношением

$$\Delta^{\bar{x}y}_{t}(x,u)+\Delta^{\bar{x}u}_{s}(y,v)=\Delta^{\bar{x}x}_{s}(y,v)+\Delta^{\bar{x}v}_{t}(x,u) \tag{4.2}$$

для любых $t,s\in\mathbb{Z}^d$ и $x,u,y,v\in X$.

Совокупность Δ, удовлетворяющую соотношениям (4.1) и (4.2) будем называть энергетическим полем на решетке $\mathbb{Z}^d$.

Пусть $U^{\bar{x}}_t(x)$ — потенциальная энергия частицы, находящейся в точке t в состоянии x при граничных условиях $\bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$. Ясно, что

$$\Delta^{\bar{x}}_{t}(x,u)=U^{\bar{x}}_t(x)-U^{\bar{x}}_t(u).$$

Из условия (4.2) следует справедливость следующего соотношения

$$U^{\bar{x}y}_t(x)-U^{\bar{x}y}_t(u)+U^{\bar{x}u}_s(y)-U^{\bar{x}u}_s(v)=U^{\bar{x}v}_t(x)-U^{\bar{x}v}_t(u)+U^{\bar{x}x}_s(y)-U^{\bar{x}x}_s(v) \tag{4.3}$$

для любых $t,s\in\mathbb{Z}^d$ и $x,u,y,v\in X$.

Согласно принципу максимума энтропии, гиббсовское распределение, отвечающее энергетическому полю Δ будет иметь вид

$$q^{\bar{x}}_t(x)=\frac{\exp\left\{-\Delta^{\bar{x}}_t(x,\alpha)\right\}}{\sum\limits_{z\in X}\exp\left\{-\Delta^{\bar{x}}_t(z,\alpha)\right\}}=\frac{\exp\left\{-U^{\bar{x}}_t(x)\right\}}{\sum\limits_{z\in X}\exp\left\{-U^{\bar{x}}_t(z)\right\}}.$$

Из условия (4.3) непосредственно следует, что элементы совокупности

$$\left\{q^{\bar{x}}_t(x),x\in X,\bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}},t\in\mathbb{Z}^d\right\}$$

удовлетворяют условиям согласованности (2.1).

Семейство функций $U=\left\{U^{\bar{x}}_t,t\in\mathbb{Z}^d\right\}$, удовлетворяющих условию (4.3), имеет фундаментальное значение при построении гиббсовской теории, поскольку предположения, определяющие различные классы гиббсовских случайных полей (например, квазилокальность, трансляционная инвариантность, ограниченность радиуса взаимодействия и т.д.), могут быть сформулированы исключительно в терминах свойств функции $U^{\bar{x}}_t,t\in\mathbb{Z}^d$.

Abstract. In the paper [5] necessary and sufficient conditions (consistency conditions) under which the system of one-point probability distributions indexed by infinite boundary conditions is a subsystem of some specification were found. In this note we give an algebraic interpretation of the above consistency conditions, as well as present their physical interpretation introduced by Dachian and Nahapetian.

Список литературы

[1] Р. Л. Добрушин, "Описание случайных полей при помощи условных вероятностей и условия его регулярности", Теор. вер. и ее примен., **113**, no. 2, 201 – 229 (1968).
[2] R. L. Dobrushin, "Prescribing a system of random variables by conditional distributions", Theory Probab. Appl., **15**, 458 – 486 (1970).
[3] H. O. Georii, "Gibbs measures and phase transitions", Studies in Math., no. 9, De Gruter (1988).
[4] S. Dachian, B. S. Nahapetian, "Description of random fields by means of one - point conditional distributions and some applications", Markov Processes and Related Fields, **7**, 193 – 214 (2001).
[5] S. Dachian, B. S. Nahapetian, "Description of specifications by means of probability distributions in small volumes under condition of very week positivity", Journal of Statistical Physics, **117**, No. 1 – 2, 281 – 300 (2004).

Поступила 4 марта 2012