Известия НАН Армении. Математика, том 48, н. 1, 2013, стр. 53-70.

ПРИНЦИП РАНДОМИЗАЦИИ В ПОСТРОЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Б. С. НАХАПЕТЯН, Л. А. ХАЧАТРЯН

Институт математики НАН Армении
Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mails: *nahapet@instmath.sci.am*, *lindakhim@gmail.com*

Аннотация. Приводится общий способ построения многомерных мартингалов. Полученные результаты позволяют расширить область приложения предельных теорем к случайным полям, в частности, к гиббсовским случайным полям.

MSC2010 number: 60G60
Ключевые слова: Мартингалы, гиббсовские случайные поля, рандомизация, предельные теоремы.

1. Введение

Мартингальный метод является одним из самых востребованных в теории случайных процессов, особенно в вопросах сходимости последовательностей случайных величин и в предельных теоремах для сумм случайных слагаемых (см., например, [1] - [4]). В то же время, данный метод, прекрасно зарекомендовавший себя в одномерных задачах, в применении к многомерным системам (случайные поля) пока еще не столь продуктивен.

Стандартное объяснение состоит в том, что обычное определение мартингала существеннейшим образом опирается на свойство абсолютной упорядоченности прямой, тогда как пространственные структуры этим свойством не обладают. По этой причине, например, один из основных способов построения одномерных мартингалов как суммы случайных величин, центрированных условными математическими ожиданиями, в применении к случайным полям приводит к весьма искусственным конструкциям, полезность которых не совсем очевидна.

Отсюда ясно, что для использования мартингального метода в многомерном случае принципиально важно иметь такое определение мартингала, в рамках которого возможно построение достаточно интересных классов случайных объектов, обладающих мартингальным свойством.

В работах [5, 6] приведены весьма широкие классы случайных полей, у которых суммы компонент по возрастающим множествам образуют мартингал (мартингал-разностные случайные поля). Одним из таких классов является класс случайных полей с симметричным фазовым пространством и четными плотностями. Важным является то, что данный критерий мартингальности вполне приложим к гиббсовским случайным полям: гиббсовские случайные поля с симметричным пространством спинов и четным потенциалом являются мартингал-разностями.

В последнее время вопросы, относящиеся к предельным теоремам для многомерных мартингалов, привлекают все большее внимание (см., например, [5] - [13]). Отметим, что для однородных мартингал-разностных случайных полей Центральная Предельная Теорема (ЦПТ) верна при минимальных условиях: существование второго момента и эргодичность (см. [7]). При тех же условиях верна и функциональная предельная теорема (см. [8]). Что касается ЦПТ для гиббсовских случайных полей, то, поскольку в области единственности эти поля эргодичны, то в этой области для мартингал-разностных гиббсовских случайных полей асимптотическая нормальность имеет место. Таким образом, применение мартингального метода позволяет с новой точки зрения рассматривать вопросы, связанные со сферой приложения ЦПТ к гиббсовским случайным полям.

В настоящей работе посредством метода рандомизации существенно обобщается критерий мартингальности, предложенный в работе [5], что позволяет значительно расширить область справедливости предельных теорем (ЦПТ, функциональная и локальная предельные теоремы) для гиббсовских случайных полей.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Случайные поля. Пусть $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$ — целочисленная решетка и $X \subset \mathbb{R}^1$ — конечное множество, $|X| < \infty$.

Случайным полем, заданным на $\mathbb{Z}^d$, с фазовым пространством X, будем называть совокупность $(\xi_t) = \left(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\right)$ случайных величин, каждая из которых принимает значение в X.

Для $S \subset \mathbb{Z}^d$ обозначим через $X^S = \{(x_t, t \in S)\}$ множество конфигураций на S. Для $S = \emptyset$ предполагается, что $X^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. Для любых $S, T \subset \mathbb{Z}^d$, таких, что $S \cap T = \emptyset$ и любых конфигураций $x \in X^S$ и $y \in X^T$ обозначим через xy конкатенацию x и y, т.е. такую конфигурацию на $S \cup T$, которая совпадает с x на S и с y на T. Для $S \subset T$, $x \in X^T$, обозначим через x_S сужение конфигурации x на S.

Пусть $\Im^{\mathbb{Z}^d}$—σ-алгебра, порожденная цилиндрическими подмножествами $X^{\mathbb{Z}^d}$. Распределением случайного поля (ξ_t) называется вероятностная мера P на $\left(X^{\mathbb{Z}^d}, \Im^{\mathbb{Z}^d}\right)$, такая, что

$$\Pr\left\{\left(\xi_t, t \in \mathbb{Z}^d\right) \in B\right\} = P(B), \qquad B \in \Im^{\mathbb{Z}^d}.$$

Для всех $S \subset \mathbb{Z}^d$ обозначим через $W(S) = \{V \subset S, |V| < \infty\}$ множество всех конечных подмножеств S. При $S = \mathbb{Z}^d$ будем использовать более простое обозначение W. В соответствии с теоремой Колмогорова, задание распределения P случайного поля эквивалентно заданию согласованной системы $\{P_V, V \in W\}$ конечномерных распределений случайного поля, т.е. такой системы, что для всех $I \subset V$, $I, V \in W$

$$\sum_{u \in X^{V \setminus I}} P_V(xu) = P_I(x), \qquad x \in X^I,$$

где

$$P_V\left(x_1, ..., x_{|V|}\right) = \Pr\left\{\xi_{t_1} = x_1, ..., \xi_{t_{|V|}} = x_{|V|}\right\}.$$

Случайное поле (ξ_t) называется положительным, если для любого $V \in W$ распределение вероятностей $P_V(x) > 0$ для всех $x \in X^V$, и называется однородным, если для всех $V \in W$ и $a \in \mathbb{Z}^d$ выполняется равенство

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = P(\xi_{t+a} = x_t, t \in V), \qquad x_t \in X, \quad t \in V.$$

Однородное случайное поле (ξ_t) называется эргодическим, если для всех $V, \Lambda \in W$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{k \in I_n} P(\{\xi_t = x_t, t \in V\} \cap \{\xi_{s+k} = u_s, s \in \Lambda\}) =$$

$$= P(\xi_t = x_t, t \in V)\, P(\xi_s = u_s, s \in \Lambda),$$

где I_n – куб со стороной n, а $x_t, u_s \in X$, $t \in V$, $s \in \Lambda$.

Для случайного поля (ξ_t) и любого $V \in W$ условной вероятностью $q_V^{\bar{x}}(x)$, $x \in X^V$ с граничными условиями $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ называется следующий предел

$$q_V^{\bar{x}}(x) = \lim_{\tilde{V} \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus V} \frac{P_{\tilde{V} \cup V}\left(\xi_t = x_t, t \in V, \xi_s = \bar{x}_s, s \in \tilde{V}\right)}{P_{\tilde{V}}\left(\xi_s = \bar{x}_s, s \in \tilde{V}\right)}, \tag{2.1}$$

который существует почти всюду. Следуя Добрушину (см. [14, 15]), совокупность $Q = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}, V \in W\right\}$ будем называть условным распределением случайного поля (ξ_t). Подсистему $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ условного распределения Q случайного поля будем называть его одноточечным условным распределением (см. [16]). Известно (см. [17]), что случайные поля с конечным фазовым пространством имеют по крайней мере одну версию условного распределения Q, для которого пределы (2.1) существуют для всех $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$, $V \in W$. Далее под условным распределением случайного поля мы будем понимать именно такую совокупность пределов (2.1).

Пусть (ξ_t) — случайное поле и $S_V = \sum\limits_{t \in V} \xi_t$, $V \in W$. Пусть для данного поля $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{DS_{V_n}}{n} = \sigma$, $0 < \sigma < \infty$, где V_n — d-мерный куб со стороной n, $n = 1, 2, \ldots$. Скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлива ЦПТ, если

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{S_{V_n} - MS_{V_n}}{\sqrt{DS_{V_n}}} < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du, \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Предположим, что S_V принимает целочисленные значения, и пусть $j \in \mathbb{Z}$. Скажем, что для случайного поля (ξ_t) справедлива Локальная Предельная Теорема (ЛПТ), если

$$\sup_j \left| \sqrt{DS_{V_n}}\, P(S_{V_n} = j) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(S_{V_n} - MS_{V_n})^2}{2DS_{V_n}}\right\} \right| \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Мартингал-разностные случайные поля. Случайное поле (ξ_t) называется мартингал-разностным случайным полем (см. [5]), если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M\,|\xi_t| < \infty \qquad \text{и} \qquad M\left(\xi_t / \xi_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = 0 \text{ (п.н.)}.$$

Здесь $M\left(\xi_t/\xi_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right)$ — условное математическое ожидание ξ_t относительно σ-алгебры, порожденной случайными величинами ξ_s, $s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}$, $t \in \mathbb{Z}^d$.

Мартингал-разностные случайные поля интересны тем, что суммы их компонент S_V образуют мартингал относительно любой возрастающей последовательности конечных множеств решетки $\mathbb{Z}^d$, а ЦПТ для таких полей имеет место при минимальных условиях ([7]).

Теорема 2.1. *Пусть* (ξ_t) — *однородное эргодическое мартингал-разностное случайное поле, такое, что* $M\xi_0^2 > 0$. *Тогда для этого поля справедлива ЦПТ.*

Гиббсовские случайные поля. В основе определения гиббсовских случайных полей обычно лежит понятие потенциала. Совокупность функций

$$\Phi = \left\{\Phi_V(x), x \in X^V, V \in W\right\},$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{J \in W: J \neq \varnothing} \sup_{x \in X^J} |\Phi_J(x)| < \infty,$$

называется потенциалом взаимодействия. Для каждого $V \in W$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ определим потенциальную энергию

$$U_V^{\bar{x}}(x) = \sum_{J \subset V: J \neq \varnothing} \sum_{\bar{J} \in W(\mathbb{Z}^d \setminus V)} \Phi_{J \cup \bar{J}}(x_J \bar{x}_{\bar{J}}).$$

Рассмотрим совокупность конечномерных распределений вероятностей следующего вида

$$q_V^{\bar{x}}(x) = \frac{\exp\left\{-U_V^{\bar{x}}(x)\right\}}{\sum\limits_{z \in X^V} \exp\left\{-U_V^{\bar{x}}(z)\right\}}, \qquad x \in X^V, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}, V \in W,$$

которая называется гиббсовской спецификацией (см. [14, 15]).

Согласно Добрушину ([15]), гиббсовским случайным полем, отвечающим потенциалу Φ, называется случайное поле, имеющее версию условного распределения, почти всюду совпадающую с гиббсовской спецификацией, построенной по этому потенциалу.

Приведем условия на потенциал, при которых соответствующее гиббсовское случайное поле является мартингал-разностным (см. [5]).

Теорема 2.2. *Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле с симметричным относительно нуля фазовым пространством X, отвечающее потенциалу Φ. Если Φ—четный потенциал, т.е.*

$$\Phi_V\left(\theta_t x_t, t \in V\right) = \Phi_V\left(x_t, t \in V\right), \qquad V \in W,$$

для всех $\theta_t \in \{1, -1\}$, тогда гиббсовское случайное поле (ξ_t) является мартингал-разностным.

Предельные теоремы для гиббсовских случайных полей играют важнейшую роль в статистической физике, и этой проблематике посвящено большое количество работ (см., например, ([18]–[22]). Следует отметить, что при доказательстве ЦПТ для гиббсовских случайных полей, помимо требования малости нормы потенциала, как правило, накладываются определенные условия и на скорость убывания корреляции. Однако в том случае, когда гиббсовское случайное поле является мартингал-разностным, в этом нет необходимости — для справедливости ЦПТ достаточно, чтобы данное поле обладало эргодическим свойством. Приведем соответствующее утверждение, являющееся следствием теорем 2.1 и 2.2.

Следствие 2.1. *Пусть Φ — четный потенциал, такой, что соответствующее гиббсовское случайное поле (ξ_t) является однородным, эргодическим и $M\xi_0^2 > 0$. Тогда для данного поля справедлива ЦПТ.*

В работе [20] для гиббсовских случайных полей, соответствующих потенциалам с конечным радиусом действия, показано, что ЛПТ следует из ЦПТ. Таким образом, имеет место и следующий факт.

Следствие 2.2. *Пусть Φ — четный потенциал с конечным радиусом действия, такой, что соответствующее гиббсовское случайное поле (ξ_t) является однородным, эргодическим и $M\xi_0^2 > 0$. Тогда для данного поля справедлива ЛПТ.*

В дальнейшем нами также будет использоваться введенное в работе [16] определение гиббсовского случайного поля, не использующее понятие потенциала: случайное поле (ξ_t) с распределением P называется гиббсовским, если оно положительно и для каждого $x \in X$ существует строго положительный равномерный по $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$ предел

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{P_{V \cup \{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)}, \qquad t \in \mathbb{Z}^d.$$

Совокупность $\mathfrak{Q}^{(1)} = \left\{ q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d \right\}$ называется одноточечной канонической спецификацией.

Следующая теорема репрезентации показывает эквивалентность приведенных определений гиббсовского случайного поля.

Теорема 2.3. *Если P — гиббсовское случайное поле, то одноточечная каноническая спецификация допускает гиббсовское представление с помощью равномерно сходящегося потенциала. Обратно, если случайное поле имеет версию условного распределения, которое допускает гиббсовское представление с равномерно сходящимся потенциалом, то поле P — гиббсовское.*

3. Рандомизация случайных полей

Рандомизация. Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}^1$ — конечные множества и $V \in W$. Пусть $\varphi_V : Y^V \to X^V$ — некоторое сюрьективное отображение и $\varphi_V^{-1}(x)$ — прообраз $x \in X^V$ при отображении φ_V.

Обозначим через $R_V^{\varphi} = \{R_V^{\varphi,x}, x \in X^V\}$ — совокупность распределений вероятностей на Y^V, таких, что для каждого $x \in X^V$

$$R_V^{\varphi,x}(y) > 0, \quad y \in \varphi_V^{-1}(x) \qquad \text{и} \qquad R_V^{\varphi,x}(y) = 0, \quad y \notin \varphi_V^{-1}(x).$$

Такую совокупность R_V^{φ} распределений вероятностей будем называть рандомизацией на Y^V. В дальнейшем для R_V^{φ} и $R_V^{\varphi,x}$ также будут использоваться обозначения R_V и R_V^x соответственно.

Пусть $\hat{P}_V$ — некоторое распределение вероятностей на Y^V. Нетрудно проверить, что функция

$$P_V(x) = \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y), \qquad x \in X^V, \tag{3.1}$$

является распределением вероятностей на X^V. Рассмотрим обратную задачу — нахождение такого распределения вероятностей $\hat{P}_V$ на Y^V, которое при заданных распределении вероятностей P_V на X^V и отображении φ_V удовлетворяет соотношению (3.1). Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть P_V — некоторое распределение вероятностей на X^V и R_V^φ — некоторая рандомизация на Y^V. Тогда функция*

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{z \in X^V} R_V^z(y) P_V(z), \qquad y \in Y^V, \tag{3.2}$$

является распределением вероятностей на Y^V, удовлетворяющим при каждом $x \in X^V$ соотношению (3.1).

Обратно, если некоторая функция $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$ при каждом $x \in X^V$ удовлетворяет соотношению (3.1), тогда существует рандомизация R_V^φ на Y^V, такая, что

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{z \in X^V} R_V^z(y) P_V(z), \qquad y \in Y^V,$$

причем

$$R_V^x(y) = \begin{cases} \hat{P}_V(y) \left(\sum\limits_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y) \right)^{-1}, & y \in \varphi_V^{-1}(x), \\ 0, & y \notin \varphi_V^{-1}(x). \end{cases}$$

Доказательство. Легко убедиться, что функция $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$, определяемая соотношением (3.2), есть распределение вероятностей. Покажем, что $\hat{P}_V(y)$ удовлетворяет (3.1). Действительно, для каждого $x \in X^V$ имеем

$$\sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y) = \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \sum_{z \in X^V} R_V^z(y) P_V(z) = \sum_{z \in X^V} P_V(z) \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} R_V^z(y) =$$

$$= P_V(x) \sum_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} R_V^x(y) = P_V(x).$$

Пусть теперь $\hat{P}_V(y)$, $y \in Y^V$ — некоторая функция, удовлетворяющая соотношению (3.1). Тогда для $x \in X^V$ можем написать

$$\hat{P}_V(y) = P_V(x) \cdot \frac{\hat{P}_V(y)}{P_V(x)} = P_V(x) \cdot \frac{\hat{P}_V(y)}{\sum\limits_{y \in \varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)}.$$

Далее, положим $R_V^x(y) = \hat{P}_V(y)\left(\sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} \hat{P}_V(y)\right)^{-1}$ при $y \in \varphi_V^{-1}(x)$ и $R_V^x(y) = 0$ при $y \notin \varphi_V^{-1}(x)$. Тогда

$$\hat{P}_V(y) = P_V(x)\, R_V^x(y) = \sum_{z\in X^V} P_V(z)\, R_V^z(y), \qquad y \in Y^V.$$

Лемма 3.1 доказана. □

В дальнейшем будем использовать отображение $\varphi_S : Y^S \to X^S$ специального вида, которое при заданном отображении $\varphi : Y \to X$ определяется следующим образом:

$$\varphi_S(y) = \varphi_S((y_t, t \in S)) = (\varphi(y_t), t \in S),$$

$y = (y_t, t \in S) \in Y^S$, $S \subset \mathbb{Z}^d$.

Имеет место следующее свойство рандомизаций.

Лемма 3.2. *Пусть для всех $t \in V$ задана рандомизация $R_t = \{R_t^x, x \in X\}$ на $Y^{\{t\}}$ и пусть*

$$R_V^x(y) = \prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t), \tag{3.3}$$

$y = (y_t, t \in V) \in Y^V$, $x = (x_t, t \in V) \in X^V$. Тогда совокупность $R_V = \{R_V^x, x \in X^V\}$ является рандомизацией на Y^V.

Доказательство. Действительно, для всех $x \in X^V$ имеем $R_V^x(y) \ge 0$, $y \in Y^V$ и

$$\sum_{y\in Y^V} R_V^x(y) = \sum_{y\in Y^V}\prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) = \sum_{y_{t_1}\in Y} R_{t_1}^{x_{t_1}}(y_{t_1}) \ldots \sum_{y_{t_{|V|}}\in Y} R_{t_{|V|}}^{x_{t_{|V|}}}(y_{t_{|V|}}) = 1.$$

Далее, поскольку для всех $x_t \in X$ и $t \in \mathbb{Z}^d$, $R_t^{x_t}(y_t) > 0$ при $y_t \in \varphi^{-1}(x_t)$ и $R_t^{x_t}(y_t) = 0$ при $y_t \notin \varphi^{-1}(x_t)$, то для всех $x \in X^V$, $\prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) > 0$ при $y \in \varphi_V^{-1}(x)$ и $\prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) = 0$ при $y \notin \varphi_V^{-1}(x)$. □

Рандомизацию $R_t = \{R_t^x, x \in X\}$ на $Y^{\{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$ будем называть равномерной, если для всех $x \in X$

$$R_t^x(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\varphi^{-1}(x)|}, & y \in \varphi^{-1}(x), \\ 0, & y \notin \varphi^{-1}(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

Совокупность $R = \{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$ рандомизаций R_t на $Y^{\{t\}}$ будем называть однородной, если для всех $t \in \mathbb{Z}^d$

$$R_t^x(y) = R^x(y), \qquad x \in X, y \in Y.$$

Ассоциированные случайные поля. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть задано случайное поле (ξ_t) с фазовым пространством X, множество Y, отображение $\varphi : Y \to X$ и совокупность рандомизаций $R = \{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$. Тогда существует случайное поле (η_t) с фазовым пространством Y, такое, что для всех $V \in W$*

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = P(\varphi(\eta_t) = x_t, t \in V), \qquad x_t \in X, t \in V.$$

Конечномерные распределения вероятностей случайного поля (η_t) имеют вид

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R_t^{\varphi(y_t)}(y_t) \cdot P(\xi_t = \varphi(y_t), t \in V), \qquad y_t \in Y,$$

или, что эквивалентно,

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V), \qquad y_t \in \varphi^{-1}(x_t),$$

$x_t \in X,\ t \in V.$

Доказательство. Пусть $\{P_V, V \in W\}$ — совокупность конечномерных распределений случайного поля (ξ_t). Для всех $V \in W$ обозначим

$$R_V^x(y) = \prod_{t \in V} R_t^{x_t}(y_t),$$

$y = (y_t, t \in V) \in Y^V$, $x = (x_t, t \in V) \in X^V$. В соответствии с леммой 3.2, совокупность $R_V = \{R_V^x, x \in X^V\}$ является множеством рандомизаций на Y^V. Для каждого $V \in W$ определим функцию

$$\hat{P}_V(y) = \sum_{x \in X^V} R_V^x(y) P_V(x), \qquad y \in Y^V,$$

которая, в силу леммы 3.1, является распределением вероятностей на Y^V. Покажем, что совокупность конечномерных распределений вероятностей $\{\hat{P}_V, V \in W\}$

согласована по Колмогорову. С учетом согласованности $\{P_V, V \in W\}$, можем написать

$$\sum_{w\in Y^{V\setminus I}} \hat{P}_V(yw) = \sum_{w\in Y^{V\setminus I}} \sum_{x\in X^I, u\in X^{V\setminus I}} R_V^{xu}(yw)\, P_V(xu) =$$

$$= \sum_{x\in X^I} \sum_{u\in X^{V\setminus I}} P_V(xu) \sum_{w\in Y^{V\setminus I}} \prod_{t\in I} R_t^{x_t}(y_t) \cdot \prod_{t\in V\setminus I} R_t^{u_t}(w_t) =$$

$$= \sum_{x\in X^I} R_I^x(y) \sum_{u\in X^{V\setminus I}} P_V(xu) \sum_{w\in Y^{V\setminus I}} R_{V\setminus I}^u(w) = \sum_{x\in X^I} R_I^x(y)\, P_I(x) = \hat{P}_I(y).$$

Следовательно, в силу теоремы Колмогорова, существует случайное поле (η_t), для которого $\left\{\hat{P}_V, V \in W\right\}$ является совокупностью конечномерных распределений вероятностей, причем для всех $x \in X^V$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \hat{P}_V(y) = \sum_{x\in X^V} R_V^x(y)\, P_V(x) = \sum_{x\in X^V} R_V^x(y)\, P(\xi_t = x_t, t \in V),$$

$y \in Y^V$. Тогда для $y \in \varphi_V^{-1}(x)$

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = R_V^x(y)\, P(\xi_t = x_t, t \in V) = \prod_{t\in V} R_t^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V).$$

Далее, в силу Леммы 3.1, для всех $V \in W$ можем написать

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = \sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} P(\eta_t = y_t, t \in V), \qquad x \in X^V.$$

С другой стороны, для любого $x \in X^V$ имеем

$$\sum_{y\in\varphi_V^{-1}(x)} P(\eta_t = y_t, t \in V) = P\left(\eta_t \in \varphi^{-1}(x_t), t \in V\right) = P(\varphi(\eta_t) = x_t, t \in V).$$

Следовательно, для всех $x \in X^V$

$$P(\xi_t = x_t, t \in V) = P(\varphi(\eta_t) = x_t, t \in V).$$

Теорема 3.1 доказана. □

Случайное поле (η_t) назовем ассоциированным со случайным полем (ξ_t) (посредством отображения φ и совокупности рандомизаций R).

В дальнейшем нам понадобится формула связи условных одноточечных распределений заданного и ассоциированного с ним случайных полей.

Теорема 3.2. *Пусть* $Q_\xi^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ *— одноточечное условное распределение случайного поля* (ξ_t), *и* $\hat{Q}_\eta^{(1)} = \left\{\hat{q}_t^{\bar{y}}, \bar{y} \in Y^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ *— одноточечное условное распределение случайного поля* (η_t), *ассоциированного с полем* (ξ_t) *посредством отображения* φ *и совокупности рандомизаций* R. *Тогда*

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot q_t^{\bar{x}}(\varphi(y)), \qquad y \in Y, \tag{3.5}$$

$\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Используя теорему 3.1, для всех $y \in Y$ можем написать

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = \lim_{V\uparrow\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}} \frac{P_{V\cup\{t\}}(\eta_t = y; \eta_s = \bar{y}_s, s \in V)}{P_V(\eta_s = \bar{y}_s, s \in V)} =$$

$$= \lim_{V\uparrow\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}} \frac{R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot \prod\limits_{s\in V} R_s^{\varphi(\bar{y}_s)}(\bar{y}_s) \cdot P_{V\cup\{t\}}(\xi_t = \varphi(y), \xi_s = \bar{x}_s, s \in V)}{\prod\limits_{s\in V} R_s^{\varphi(\bar{y}_s)}(\bar{y}_s) \cdot P_V(\xi_s = \bar{x}_s, s \in V)} =$$

$$= R_t^{\varphi(y)}(y) \cdot q_t^{\bar{x}}(\varphi(y)),$$

при $\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. □

Однородность и эргодичность ассоциированного случайного поля. Приведем условия, при которых ассоциированное случайное поле будет однородным эргодическим полем.

Теорема 3.3. *Пусть* (ξ_t) *— однородное эргодическое случайное поле и* (η_t) *— случайное поле, ассоциированное с* (ξ_t) *посредством однородной совокупности рандомизаций* R. *Тогда ассоциированное случайное поле* (η_t) *является однородным эргодическим случайным полем.*

Доказательство. Покажем, что (η_t) является однородным случайным полем. Используя результаты теоремы 3.1 и однородность совокупности рандомизаций R, для всех $V \subset \mathbb{Z}^d$ и $a \in \mathbb{Z}^d$ можем написать

$$P(\eta_t = y_t, t \in V) = \prod_{t\in V} R^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_t = x_t, t \in V) =$$

$$= \prod_{t\in V} R^{x_t}(y_t) \cdot P(\xi_{t+a} = x_t, t \in V) = P(\eta_{t+a} = x_t, t \in V),$$

где $x_t \in X$, $y_t \in Y$, $t \in V$. Далее, с учетом эргодичности случайного поля (ξ_t), для всех $V, \Lambda \in W$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{k\in I_n} P\left(\{\eta_t = y_t, t \in V\} \cap \{\eta_{s+k} = w_s, s \in \Lambda\}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|I_n|} \sum_{k\in I_n} \prod_{t\in V} R^{\varphi(y_t)}(y_t) \times$$

$$\times \prod_{s\in\Lambda} R^{\varphi(w_s)}(w_s) P\left(\{\xi_t = \varphi(y_t), t \in V\} \cap \{\xi_{s+k} = \varphi(w_s), s \in \Lambda\}\right) =$$

$$= \prod_{t\in V} R^{\varphi(y_t)}(y_t) P\left(\xi_t = \varphi(y_t), t \in V\right) \prod_{s\in\Lambda} R^{\varphi(w_s)}(w_s) P\left(\xi_s = \varphi(w_s), s \in \Lambda\right) =$$

$$= P\left(\eta_t = y_t, t \in V\right) P\left(\eta_s = w_s, s \in \Lambda\right),$$

где I_n – куб со стороной n и $y_t, w_s \in Y$, $t \in V$, $s \in \Lambda$. □

Ассоциированные мартингал-разностные случайные поля. Приведем условия, при которых ассоциированное случайное поле будет мартингал-разностным.

Теорема 3.4. *Пусть (ξ_t) – случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) – случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с полем (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности рандомизаций R. Если для всех $x \in X$ и $t \in \mathbb{Z}^d$*

$$\sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^x(y) = 0, \tag{3.6}$$

тогда случайное поле (η_t) является мартингал-разностным случайным полем.

Доказательство. Пусть $Q_\xi^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ – одноточечное условное распределение случайного поля (ξ_t). Поскольку случайное поле (η_t) ассоциировано со случайным полем (ξ_t), то, в силу теоремы 3.2, его одноточечные условные вероятности имеют вид

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = R_t^x(y)\, q_t^{\bar{x}}(x), \qquad y \in \varphi^{-1}(x), x \in X,$$

$\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Вычислим условное математическое ожидание случайного поля (η_t). Имеем

$$M\left(\eta_t/\eta_s = \bar{y}_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = \sum_{y\in Y} y \cdot \hat{q}_t^{\bar{y}}(y) =$$

$$= \sum_{x\in X} \sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^{\varphi(y)}(y)\, q_t^{\varphi(\bar{y})}(\varphi(y)) = \sum_{x\in X} q_t^{\bar{x}}(x) \sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y \cdot R_t^{x}(y) = 0,$$

для всех $\bar{y} \in \varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Следовательно,

$$M\left(\eta_t/\eta_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = 0.$$

Теорема 3.4 доказана. □

В случае совокупности равномерных рандомизаций, условие (3.6) упрощается.

Следствие 3.1. *Пусть (ξ_t) — случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с полем (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций. Если отображение φ и множество Y таковы, что*

$$\sum_{y\in\varphi^{-1}(x)} y = 0, \qquad \text{для всех } x \in X, \tag{3.7}$$

тогда случайное поле (η_t) является мартингал-разностным случайным полем.

Отметим, что совокупность равномерных рандомизаций, определяемых по (3.4), удовлетворяет условиям теоремы 3.3. Таким образом, для ассоциированных случайных полей можно сформулировать следующее следствие из ЦПТ.

Следствие 3.2. *Пусть (ξ_t) — однородное эргодическое случайное поле с фазовым пространством X, (η_t) — случайное поле с фазовым пространством Y, ассоциированное с (ξ_t) посредством отображения φ и совокупности R равномерных рандомизаций. Если отображение φ и множество Y удовлетворяют условию (3.7), тогда для (η_t) справедлива ЦПТ.*

Ассоциированные гиббсовские мартингал-разностные случайные поля. Применим полученные результаты к гиббсовским случайным полям. Прежде всего покажем, что случайное поле, ассоциированное с гиббсовским случайным полем, также является гиббсовским.

Теорема 3.5. *Пусть (ξ_t) — гиббсовское случайное поле. Тогда ассоциированное с ним случайное поле (η_t) также является гиббсовским случайным полем.*

Доказательство. Пусть P — распределение случайного поля (ξ_t), компоненты которого принимают значения в множестве X. Тогда, по определению гиббсовского случайного поля, его канонические одноточечные условные вероятности имеют вид

$$q_t^{\bar{x}}(x) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)}, \tag{3.8}$$

причем $q_t^{\bar{x}}(x) > 0$, $x \in X$ и сходимость в (3.8) равномерна по $\bar{x}$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое $V_0 \in W$, такое, что

$$\sup_{\bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| < \varepsilon,$$

для всех V, таких, что $V_0 \subset V$.

Пусть компоненты случайного поля (η_t), ассоциированного с (ξ_t) посредством совокупности рандомизаций $R = \{R_t, t \in \mathbb{Z}^d\}$, принимают значения в множестве Y. Покажем, что (η_t) также является гиббсовским случайным полем. Понятно, что если поле (ξ_t) — положительно, тогда и ассоциированное с ним случайное поле (η_t) также будет положительным. Далее покажем, что пределы

$$\hat{q}_t^{\bar{y}}(y) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}} \frac{\hat{P}_{V\cup\{t\}}(y\bar{y}_V)}{\hat{P}_V(\bar{y}_V)}, \qquad y \in Y, t \in \mathbb{Z}^d,$$

сходятся равномерно по $\bar{y}$, $\bar{y} \in Y^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}$. Воспользовавшись теоремой 3.1 и соотношением (3.5), можем записать

$$\sup_{\bar{y}\in Y^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}} \left| \hat{q}_t^{\bar{y}}(y) - \frac{\hat{P}_{V\cup\{t\}}(y\bar{y}_V)}{\hat{P}_V(\bar{y}_V)} \right| =$$

$$= \sup_{\bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}} \sup_{\bar{y}\in\varphi^{-1}_{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}(\bar{x})} \left| R_t^{\varphi(y)}(y)\cdot q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{R_t^{\varphi(y)}(y)\, R_V^{\varphi(\bar{y}_V)}(\bar{y}_V)\, P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{R_V^{\varphi(\bar{y}_V)}(\bar{y}_V)\, P_V(\bar{x}_V)} \right| =$$

$$= R_t^{\varphi(y)}(y)\cdot \sup_{\bar{x}\in X^{\mathbb{Z}^d\setminus\{t\}}} \left| q_t^{\bar{x}}(x) - \frac{P_{V\cup\{t\}}(x\bar{x}_V)}{P_V(\bar{x}_V)} \right| < \varepsilon,$$

где $x = \varphi(y)$, $y \in Y$ и $t \in \mathbb{Z}^d$. □

Приведем условия на потенциал, при которых гиббсовское случайное поле, отвечающее этому потенциалу, будет мартингал-разностным.

Теорема 3.6. *Пусть гиббсовское случайное поле* (η_t) *с фазовым пространством* Y *задается потенциалом* Φ. *Пусть существует разбиение* Π *множества* Y $(Y = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Y_k,\ Y_i \cap Y_j = \varnothing,\ i \neq j)$, *такое, что*

$$\sum_{y \in Y_k} y = 0, \qquad k = \overline{1,n}. \tag{3.9}$$

Если потенциал Φ *принимает постоянные значения на элементах разбиения* Π, *т.е. для всех* $V \in W$

$$\Phi_{V \cup \{t\}}\left(y_t y_V\right) = \Phi_k\left(y_V\right), \qquad y_t \in Y_k, t \in \mathbb{Z}^d, k = \overline{1,n}, \tag{3.10}$$

тогда гиббсовское случайное поле (η_t) *является мартингал-разностным случайным полем.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что при данных условиях потенциальная энергия принимает постоянные значения на элементах разбиения Π. Действительно, пусть $y \in Y_k$. Тогда

$$U_t^{\bar{y}}(y) = \sum_{V \in W(\mathbb{Z}^d \setminus \{t\})} \Phi_{V \cup \{t\}}\left(y_t y_V\right) = \sum_{V \in W(\mathbb{Z}^d \setminus \{t\})} \Phi_k\left(y_V\right) = U_{t,k}^{\bar{y}},$$

для всех $k = \overline{1,n}$, $\bar{y} \in Y^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$. Далее, для всех $y \in Y_k$ можем написать

$$q_t^{\bar{y}}(y) = \frac{\exp\left\{U_t^{\bar{y}}(y)\right\}}{\sum\limits_{z \in Y} \exp\left\{U_t^{\bar{y}}(z)\right\}} = \frac{\exp\left\{U_{t,k}^{\bar{y}}\right\}}{\sum\limits_{z \in Y} \exp\left\{U_t^{\bar{y}}(z)\right\}} = q_{t,k}^{\bar{y}}, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Тогда для всех $\bar{y} \in Y^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}$, $t \in \mathbb{Z}^d$

$$M\left(\eta_t / \eta_s = \bar{y}_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = \sum_{y \in Y} y \cdot q_t^{\bar{y}}(y) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{y \in Y_k} y \cdot q_t^{\bar{y}}(y) = \sum_{k=1}^{n} q_{t,k}^{\bar{y}} \sum_{y \in Y_k} y = 0.$$

Следовательно,

$$M\left(\eta_t / \eta_s, s \in \mathbb{Z}^d \setminus \{t\}\right) = 0.$$

Теорема 3.6 доказана. □

Нетрудно проверить, что гиббсовские случайные поля с симметричным относительно нуля фазовым пространством и четным потенциалом удовлетворяют условиям теоремы 3.6.

Теперь можно сформулировать следствия из теоремы 2.1 для гиббсовских мартингал-разностных полей при более общих условиях на потенциал.

Следствие 3.3. *Пусть* (η_t) — *однородное эргодическое гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* Y, *отвечающее потенциалу* Φ, *причем* $M\eta_0^2 > 0$. *Если существует разбиение* Π *множества* Y, *удовлетворяющее условию* (3.9), *а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (3.10), *тогда для данного поля справедлива ЦПТ.*

Следствие 3.4. *Пусть* (η_t) — *однородное эргодическое гиббсовское случайное поле с фазовым пространством* Y, *отвечающее потенциалу* Φ *с конечным радиусом действия такое, что* $M\eta_0^2 > 0$. *Если существует разбиение* Π *множества* Y, *удовлетворяющее условию* (3.9), *а потенциал* Φ *удовлетворяет условию* (3.10), *тогда для данного поля справедлива ЛПТ.*

Abstract. A general approach to the construction of multidimensional martingales is developed. The obtained results allow considerably extend the range of applicability of the martingale method to the theory of random fields, especially to the theory of limiting distributions of Gibbs random fields.

Список литературы

[1] Doob J. L., Stochastic processes. New York, Wiley, 1953
[2] Hall P., Heyde C.C., Martingale limit theory and its applications. Academic Press, New York-London, 1980
[3] Мейер П. А., Вероятность и потенциал. Москва, Мир, 1973
[4] Ширяев А.Н., Вероятность. Москва, Наука, 1989
[5] Nahapetyan, B.S., Petrosyan, A.N., Martingale-difference Gibbs random fields and central limit theorem. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Math., Vol. 17, 105–110, 1992
[6] Nahapetyan, B.S., Petrosyan, A.N. Martingale-difference random fields. Limit theorems and some applications. E. Shrödinger Intern. Inst., Vienna. Preprint ESI 283, 1995
[7] B. Nahapetian, Billingsley-Ibragimov Theorem for martingale-difference random fields and its applications to some models of classical statistical physics. C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 320, 1539–1544, 1995
[8] Pogosyan S., Roelly S., Invariance principle for martingale-difference random fields. Statist. Probab. Lett. 38 (3), 235–245, 1998
[9] Dedecer J., A central limit theorem for stationary random fields, Probab. Theory Relat. Fields 110, no. 3, 397–426, 1998
[10] Illig A., Troung-Van B., Conditional Lindeberg central limit theorem for strong lattice martingales. http://www.mathpreprints.com/statistics/0304010/, 2003
[11] El Machkouri M., Volný D., Wu W.B., A central limit theorem for stationary random fields. http://arxiv.org/abs/1109.0838, 2011

[12] Gordin M., Peligrad M., On the functional central limit theorem via martingale approximation. Bernoulli, 17(1), 424–440, 2011

[13] Banys P., CLT for linear random fields with stationary martingale-difference innovations. Lith. Math. J., 303–309, 2011

[14] Добрушин Р.Л., Описание случайных полей при помощи условных вероятностей и условия его регулярности. Теор. вер. и ее примен., 113, 2, 201–229, 1968

[15] Добрушин Р.Л., Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с попарным взаимодействием. Функц. анализ и его приложения, т.2, 4, 31–43, 1968

[16] Dachian S., Nahapetian B.S., On Gibbsiannes of Random Fields, Markov Processes and Related Fields. Vol 15, 81–104, 2009

[17] Goldstein S., A note on specifications. Z. Wahrsch. verw. Geb. 46, 45–51, 1978

[18] Minlos R.A., Halfina A.M., Central limit theorem for the energy and the number of particles in lattice systems of gas. Izv. Akad. Nauk SSSR, 34, 1173–1191, 1970

[19] Malyshev V.A., The central limit theorem for Gibbsian random fields. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 16, 1141–1154, 1975

[20] Dobrushin R.L., Tirozzi B., The Central Limit Theorem and the Problem of Equivalence of Ensembles. Commun. math. Phys. 54, 173–192, 1977

[21] Nahapetian B.S., The central limit theorem for random fields with mixing property. Multicomponent random systems, Dobrushin R.L., Sinai Ya.G. (eds.), Dekker, Ney York, Basel, 1980

[22] Nahapetian B.S., Limit theorems and some applications in statistical physics. Teubner-Text zur Mathematik 123 (B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart.Leipzig), 1991

Поступила 4 марта 2012