Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 6, 2012, стр. 53 - 70.

О СХОДИМОСТИ В $L^1[0,1]$ ЖАДНОГО АЛГОРИТМА ПО ОБЩЕЙ СИСТЕМЕ ХААРА

А. Х. КОБЕЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *a_kobelyan@ysu.am*

Аннотация. В статье доказано, что для любой полной подсистемы $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ общей системы Хаара и для каждого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0,1]$, с мерой $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$, такое, что для всякой функции $f \in L^1(0,1)$ можно найти функцию $g \in L^1(0,1)$ совпадающую с f на E_ε, такую что жадный алгоритм исправленной функции g по этой подсистеме сходится по $L^1(0,1)$ норме.

MSC2010 number: 42C10,42C20.

Ключевые слова: общая система Хаара; жадный алгоритм; сходимость в L^1.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается сходимость в L^1 жадного алгоритма (гриди алгоритма) интегрируемой функций по общей системе Хаара, после исправления функции на множестве малой меры. Фундаментальные теоремы об исправлении функции на множестве малой меры были получены в 1912г. Н. Н. Лузиным и в 1939г. Д. Е. Меньшовым (см. [1], [2]).

В 1991г. Григоряном была получена следующая теорема (см.[3]):

Теорема 1.1. *(Усиленное L^1 -свойство) Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество E с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1[0,2\pi]$ можно найти функцию $g(x) \in L^1[0,2\pi]$, совпадающую с $f(x)$ на E и такую, что ее ряд Фурье по тригонометрической системе сходится к ней по $L^1[0,2\pi]$ норме.*

Напомним определение жадного алгоритма.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – нормированный базис в банаховом пространстве X, $||\psi_n||_X = 1$. Для каждого элемента $f \in X$ будем иметь разложение

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f, \psi), \psi_k.$$

Пуст $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$ есть некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Положим $\psi_S = \{\psi_k\}_{k \in \mathcal{S}}$. Пусть $\sigma = \{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая перестановка чисел множества $\mathcal{S}$, для которой имеет место

$$|c_{\sigma(n)}(f)| \geq |c_{\sigma(n+1)}(f)| \quad \text{для всех} \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

Множество всех таких перестановок обозначим через $\mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$. Когда в (1.1) имеют место строгие неравенства, то $\mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$ содержит только один элемент.

Для каждого элемента $f \in X$ и для любой перестановки $\sigma = \{\sigma(k)\} \in \mathbf{D}(f, \psi_{\mathcal{S}})$ определим последовательность нелинейных операторов $\{G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}, \sigma)\}_{m=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$G_m(f) = G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}) = G_m(f, \psi_{\mathcal{S}}, \sigma) = \sum_{k=1}^{m} c_{\sigma(k)}(f) \psi_{\sigma(k)}.$$

При $\mathcal{S} = \mathbb{N}$ метод приближения элемента $f \in X$ последовательностью $G_m(f, \psi)$ называется жадным алгоритмом по системе ψ (подробно о жадном алгоритме см. обзорную статью Темлякова [5]). Говорят, что жадный алгоритм элемента f по системе ψ сходится в X, если для всех $\sigma \in \mathbf{D}(f, \psi)$ имеет место

$$\lim_{m \to \infty} ||G_m(f, \psi, \sigma) - f||_X = 0.$$

Сходимость жадного алгоритма в банаховых пространствах изучались Девором [4], Темляковым [5], Конягиным [6], Войтащиком [7],[10] и другими авторами (см. [11]-[14]).

В дальнейшем через χ_E будем обозначать характеристическую функцию множества E, через $|E|$ – Лебегову меру множества E, через $||f||$ – L^1 норму функции f и $||f||_E := \int_E |f(t)|\, dt$.

Прежде, чем перейти к формулировке основных результатов настоящей работы, напомним определение общей системы Хаара, нормированной в L^1. Для начала положим $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $A_1^{(1)} = \Delta_1 = (0, 1)$, $\chi_1(x) = \chi_{(0,1)}$. Далее, выберем любую точку $t_2 \in (0, 1) \setminus \{t_0, t_1\}$, положив $A_1^{(2)} = (0, t_2)$, $A_2^{(2)} = (t_2, 1)$, $\Delta_2 = (0, 1)$,

$\Delta_2^+ = (0, t_2)$, $\Delta_2^- = (t_2, 1)$. Определим $\chi_2(x)$ следующим образом:

$$\chi_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\Delta_2^+|}\ , & \text{при } x \in \Delta_2^+, \\ \frac{-1}{2|\Delta_2^-|}\ , & \text{при } x \in \Delta_2^-. \end{cases}$$

Пусть точки $t_0, t_1, ..., t_n$ уже выбраны, обозначим через $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, ..., A_n^{(n)}$ интервалы, полученные от разделения отрезка [0,1] точками $\{t_k\}_{k=1}^n$. Возьмем любую точку t_{n+1} из $(0,1) \setminus \{t_0, t_1, ...t_n\}$, тогда t_{n+1} будет принадлежать некоторому $A_k^{(n)} = (a, b)$. Положим $\Delta_{n+1} = (a, b)$, $\Delta_{n+1}^+ = (a, t_{n+1})$, $\Delta_{n+1}^- = (t_{n+1}, b)$ и

$$\chi_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2|\Delta_{n+1}^+|}\ , & \text{при } x \in \Delta_{n+1}^+, \\ \frac{-1}{2|\Delta_{n+1}^-|}\ , & \text{при } x \in \Delta_{n+1}^-, \\ 0, & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Выбор системы точек $\mathcal{T} = \{t_k\}_{k=0}^\infty$ произволен, мы лишь потребуем, чтобы эта система была плотна в [0,1], то есть чтобы для множеств $A_k^{(n)}$ имело место следующее:

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{1 \le k \le n} |A_k^{(n)}| = 0, \tag{1.2}$$

Значения функций в точках разрыва для нас несущественны и мы их не приводим. Система функций $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\mathcal{T} = \{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ называется общей системой Хаара нормированной в $L^1(0,1)$.

Отметим, что когда $\mathcal{T} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, ...\}$, то определенная система совпадает с классической системой Хаара. Коэффициенты Фурье-Хаара $c_n(f, \mathcal{H}_\mathcal{T})$ определяются следующей формулой:

$$c_n(f, \mathcal{H}) = \frac{1}{||\chi_n||_2^2} \int_{\Delta_n} f(t)\chi_n(t)dt \qquad n = 1, 2, ...$$

Обозначим $spec\{f\} = \{k \in \mathbb{N}, c_k \neq 0\}$.

Отметим, что общая система Хаара является базисом во всех $L_p(0,1)$, $1 \le p < \infty$ и безусловным базисом в $L_p(0,1), 1 < p < \infty$ (это следует из работ Д. Л. Буркхолдера [15], [16]).

Вопросу сходимости жадного алгоритма по классической системе Хаара и общей системе Хаара посвящено много работ (см. напр. [17]-[24]) А в работе [7] доказана следующая теорема:

Теорема 1.2. *(Войтащик) Пусть* $\psi = \{\psi_k\}_{l=1}^{\infty}$ *– нормированный базис в банаховом пространстве* X. *Для того, чтобы жадный алгоритм сходился в* X *для всех элементов из* X, *необходимо и достаточно, чтобы существовало* $C > 0$ *такое, что для каждого элемента* $f \in X$ *и для любых* $\sigma \in \mathbf{D}$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *выполнялось бы неравенство*

$$||G_m(f, \psi, \sigma)||_X \leq C||f||_X \ .$$

Отметим, что в работе [8] Т. Тао установил, что существует интегрируемая функция для которой жадный алгоритм по классической системе Хаара п.в. расходится, а в работе [9] Г. Геворкяном и А. Степанян этот результат был обобщен для любого 0-регулярного вейвлет разложения.

В работе Дилворта, Кутцаровой и Войтащика [10] показано, что существует интегрируемая функция для которой жадный алгоритм по классической системе Хаара расходится в $L^1(0,1)$.

В данной статье будут рассмотрены те подсистемы $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_n\}_{n\in\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ общей системы Хаара для которых верно следующее

$$\left|\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\Delta_{n_k}\right| = 1 \ . \tag{1.3}$$

В настоящей работе доказывается следующая теорема:

Теорема 1.3. *Пусть* $\chi_{\mathcal{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *– любая подсистема общей системы Хаара удовлетворяющая условию (1.3). Тогда для любого* $\varepsilon > 0$, *существует измеримое множество* $E_\varepsilon \subset [0,1]$, *с мерой* $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$, *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *можно найти функцию* $g \in L^1(0,1)$ *совпадающую с* f *на* E_ε, *такую, что*

(1) $||G_m(g, \chi_{\mathcal{S}})|| \leq 4||g|| \leq 12||f||$;

(2) $\mathbf{D}(g, \chi_{\mathcal{S}})$ *содержит только один элемент* $\{\sigma(k)\}$, *который является перестановкой всех чисел* $\mathcal{S}$;

(3) $\lim\limits_{m\to\infty} ||G_m(g, \chi_{\mathcal{S}}) - g|| = 0$.

Замечание 1.1. *Отметим, что из теоремы Войтащика и пункта 1 теоремы 1.3 не следует утверждение пункта 3 Теоремы 1.3, так как в теореме Войтащика требуется выполнение неравенства для каждого элемента* $f \in L^1(0,1)$.

Замечание 1.2. *Теорема 1.3 для подсистем классической системы Хаара, в которые входят целые группы, была доказана Григоряном и Гогяном в работе* [20].

В работе Навасардяна и Степанян [21] доказана следующая теорема

Теорема 1.4. *Если для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\chi_n(x)$

$$a_n\chi_n(x) \to 0 \text{ и } \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\chi_n^2(x) = \infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in (0,1)$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1], |E| > 1-\varepsilon$ *такое, что для любой функции* $f \in L^1(0,1)$ *существуют* $g \in L^1(0,1)$ *и числа* $\delta_n = 0$ *или 1 такие, что* $g(x) = f(x)$, $x \in E$, *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n a_n \chi_n(x)$ *сходится к функции* g *по норме* $L^1(0,1)$.

В этой статье доказывается также, что по любой подсистеме общей системы Хаара, удовлетворяющей условию (1.3) можно построить ряд, который универсален в $L^1(E_\varepsilon)$ относительно подрядов, где E_ε-измеримое множество с $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$. А именно, верно следующее утверждение

Теорема 1.5. *Для любой подсистемы* $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *общей системы Хаара, удовлетворяющей условию (1.3) и для любого* $\varepsilon > 0$, *существуют измеримое множество* $E_\varepsilon \subset [0,1]$ *с мерой* $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$ *и ряд вида*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k, \text{ с } \quad b_k \searrow 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

такие, что для каждой $f \in L^1(E_\varepsilon)$ *существуют числа* $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, $(\delta_k = 1$ *или* $0)$ *для которых ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k b_k \varphi_k;$$

сходится к f *по норме* $L^1(E_\varepsilon)$.

2. Доказательство основных лемм

В дальнейшем будем считать, что $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ - некоторая подсистема общей системы Хаара, удовлетворяющей условию (1.3).

Лемма 2.1. *Для любых чисел* $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$ *и неотрицательного полинома* $g(x)$ *по общей системе Хаара, существует полином* $Q(x) = \sum_{i=N_0}^{N} a_k \varphi_i(x)$ *по подсистеме* $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и множество* E *такие, что*

(1) $|a_k| < \delta$, *для любого* $k \in spec\{Q\}$;

(2) $|E| \geq \frac{|G|}{3}$, $\quad E \subset G$, *где* $G = \{x \in (0,1), g(x) > 0\}$;

(3) $Q(x) = \begin{cases} g(x) & \text{если } x \in E \\ 0 & \text{если } x \notin G \end{cases}$, $Q(x) \leq -g(x)$ *если* $x \in G \backslash E$,

(4) *если для некоторых* $n \in [N_0, N]$, $x_0 \in (0,1)$ *и перестановки* $\lambda(k)$ *чисел* $\overline{N_0, N}$ *выполняется* $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda(k)} \varphi_{\lambda(k)}(x_0) > 0$, *то* $x_0 \in E$, *и* $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda(k)} \varphi_{\lambda(k)}(x_0) = g(x_0)$.

Доказательство. Пусть $g(x) = \sum_{r=1}^{R} L_r \chi_{\Delta_{l_r}}$, где $L_r > 0$, а Δ_{l_r} – непересекающиеся множества из $\{A_k^{(n)}\}$. Следовательно, $G = \bigcup_{r=1}^{R} \Delta_{l_r}$. Возьмем натуральные числа $N, N_1, (N > N_1 > N_0)$ настолько большими (см.(1.2),(1.3)), что

$$|A_k^{(N_1)}| \leq \min\{\frac{\delta}{2\max_{1\leq r\leq R}\{|L_r|\}}, \min_{1\leq r\leq R}\{|\Delta_{l_r}|\}\} \text{ для всех } k = 1, 2..., N_1; \tag{2.1}$$

$$\left|\bigcup_{k=N_1}^{N} \Delta_{n_k}\right| > 1 - \frac{|G|}{3}.$$

Через $\{\Delta_{m_k}\}_{k=1}^{M}$ обозначим непересекающиеся множества из $\{\Delta_{n_k}\}_{k=N_1}^{N}$, для которых

$$\left|\bigcup_{k=1}^{M} \Delta_{m_k}\right| > 1 - \frac{|G|}{3}. \tag{2.2}$$

Определим полином $Q(x)$ следующим образом:

$$Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} a_n \varphi_n(x), \tag{2.3}$$

где

(2.4)
$$a_n = \begin{cases} 2(-1)^{sgn\left(|\Delta_n^{>}|-|\Delta_n^{+}|\right)} \; |\Delta_n^{>}| \; L_r, & \text{если } n \in \{m_k, k = 1, ..., M\} \text{ и } \Delta_n \subset G, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь через $\Delta_n^{>}$ обозначено то из множеств из $\Delta_n^{+}, \Delta_n^{-}$, чья Лебегова мера больше. Пусть

$$E = \bigcup_{k=1}^{M} (\Delta_{m_k}^{>} \cap G). \tag{2.5}$$

Из определения $\{a_n\}$ и (2.1) вытекает, что

(1)

$$\max_{N_0\le n<N}\{|a_n|\}\le 2\max_{1\le r\le R}\{|L_r|\}\max_{1\le k\le N_1}\{|A_k^{(N_1)}|\}\le\delta.$$

(2) если x_0 принадлежит E, тогда x_0 принадлежит некоторому множеству $\Delta^{>}_{m_r}$ и следовательно,

$$Q(x_0)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x_0)=a_{m_r}\varphi_{m_r}(x_0)=L_r. \tag{2.6}$$

(3) если x_0 принадлежит $G\backslash E$, тогда x_0 принадлежит некоторому множеству $\Delta_{m_r}\setminus\Delta^{>}_{m_r}$ и, следовательно,

$$Q(x_0)=(-1)^{sgn(|\Delta^{>}_{m_r}|-|\Delta^{+}_{m_r}|)}\frac{|\Delta^{>}_{m}|}{|\Delta_{m_r}\setminus\Delta^{>}_{m_r}|}L_r\le -L_r. \tag{2.7}$$

(4) если x_0 не принадлежит множеству G, то

$$Q(x_0)=0. \tag{2.8}$$

Согласно (2.2), (2.4)-(2.8) имеем, что

$$E=\{x:\quad Q(x)=g(x)\}\text{ и }|E|\ge\frac{1}{3}|G|.$$

Теперь докажем утверждение 4) леммы 2.1. Так как в полиноме участвуют φ_{m_k}, для которых Δ_{m_k} не пересекаются, то для любого $N_0<n<N_1$, и любой $\lambda(k)$ перестановки чисел $\overline{N_0,N}$, $\sum_{k=N_0}^{n}a_{\lambda(k)}\chi_{\lambda(k)}(x_0)$ в некоторой точке x_0 либо равен 0, либо равен некоторому $a_k\varphi_k(x_0)$. Следовательно, если

$$\sum_{k=N_0}^{n}a_{\lambda(k)}\varphi_{\lambda(k)}(x_0)>0,\text{ то }x_0\in E\text{ и }\sum_{k=N_0}^{n}a_{\lambda(k)}\varphi_{\lambda(k)}(x_0)=g(x_0).$$

Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2. *Для любых чисел* $N_0\in\mathbb{N}$, $\delta_1>0$, $0<\varepsilon<1$, $L\ne 0$ *и любого множества* Δ *из множеств* $\{A_k^{(n)}\}$ *существует полином по подсистеме* $\chi_{\mathbb{S}}=\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *общей системы Хаара:* $Q(x)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x)$, *множество* $E\subset\Delta$ *и* $\sigma(k)$ *перестановка ненулевых чисел* $\{a_k\}_{k=N_0}^{N}$ *такие, что*

(1) $\delta_1>|a_{\sigma(N_0)}|\ge|a_{\sigma(N_0+1)}|\ge\ldots\ge|a_{\sigma(m)}|>0$,

(2) $|E|>(1-\varepsilon)|\Delta|$,

(3) $Q(x) = \begin{cases} L, \ \textit{если } x \in E, \\ 0, \ \textit{если } x \notin \Delta, \end{cases}$

(4) $|L||\Delta| \le ||Q|| \le 2|L||\Delta|$,

(5) $\max\limits_{N_0 < n \le N} || \sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}|| \le 2|L||\Delta|$.

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $L > 0$. Для $g_1(x) = L\chi_\Delta, N_0, \delta_1$ применим лемму 2.1. Тогда существуют полином $Q_1(x) = \sum_{k=N_0}^{N_1-1} a_k^1 \varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ и множество $E_1 \subset \Delta$ такие, что

$$|a_k^1| < \delta_1, \forall k \in spec\{Q_1(x)\}; \tag{2.9}$$

$$|E_1| \ge \frac{|\Delta|}{3}; \tag{2.10}$$

$$Q_1(x) = \begin{cases} L & \text{если } x \in E_1, \\ 0 & \text{если } x \notin \Delta, \end{cases} \quad Q_1(x) \le -L, \quad \text{если } x \in \Delta \backslash E_1, \tag{2.11}$$

если для некоторых $n \in [N_0, N_1 - 1], x_0 \in (0,1)$ и для некоторой $\lambda^1(k)$ перестановки чисел $\overline{N_0, N_1 - 1}$ выполняется $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda^1(k)}^1 \varphi_{\lambda^1(k)}(x) > 0$, то $x_0 \in E_1$ и $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\lambda^1(k)}^1 \varphi_{\lambda^1(k)}(x_0) = g_1(x_0)$.

Из (2.11) и из того, что $Q_1(x)$ полином, получаем

$$g_2(x) = L\chi_\Delta - Q_1(x) = g_1(x) - Q_1(x) = \sum_{r=1}^{R_2} L_r^2 \chi_{\Delta_{l_r^2}},$$

$$g_2(x) = 0 \ \text{ если } x \notin \Delta \setminus E_1, \qquad g_2(x) \ge 2L \ \text{ если } x \in \Delta \setminus E_1.$$

Применим лемму 2.1 для $g_2(x), \ N_1, \ \delta_2 = \min\{\delta_1, \min_{a_k^1 \ne 0}\{|a_k^1|\}\}$ и повторим все, что было сделано для функции g_1.

Таким образом, по очереди применяя лемму 2.1, получим для всех $1 \le \nu < \nu_0 = [\log_{2/3} \varepsilon] + 1$ множества E_ν и полиномы $Q_\nu(x) = \sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu - 1} a_k^\nu \varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что

$$|a_k^\nu| < \delta_\nu, k \in spec\{Q_\nu(x)\}, \ \text{где } \delta_\nu = \min\{\delta_{\nu-1}, \min_{a_k^{\nu-1} \ne 0}\{|a_k^{\nu-1}|\}\}; \tag{2.12}$$

$$|E_\nu| \ge \frac{|\Delta \setminus \bigcup_{k=1}^{\nu-1} E_k|}{3}, \tag{2.13}$$

$$g_{\nu+1}(x) = L\chi_\Delta - \sum_{k=1}^{\nu} Q_k(x) = g_\nu(x) - Q_\nu(x) = \sum_{r=1}^{R_{\nu+1}} L_r^{\nu+1} \chi_{\Delta_{l_r^{\nu+1}}},$$

$$g_{\nu+1}(x)=0 \text{ если } x\notin \Delta\setminus\bigcup_{k=1}^{\nu}E_k,\ g_{\nu+1}(x)\ge 2L \text{ если } x\in \Delta\setminus\bigcup_{k=1}^{\nu}E_k, \tag{2.14}$$

если для некоторых $n\in[N_{\nu-1},N_\nu-1], x_0\in(0,1)$ и для некоторой перестановки $\lambda^\nu(k)$ чисел $\overline{N_{\nu-1},N_\nu-1}$ выполняется следующее: $\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)>0$, то $x_0\in E_\nu$ и $\sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x_0)=g_\nu(x_0)$. Теперь определим полином Q и множество E, полагая

$$E=\bigcup_{\nu=1}^{\nu^0}E_\nu; \tag{2.15}$$

$$Q(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu^0}Q_\nu(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu^0}\sum_{k=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1}a_k^\nu\varphi_k(x)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x). \tag{2.16}$$

Очевидно, что $|a_k|<\delta_1$.

Согласно (2.13) имеем $|\Delta\setminus\bigcup_{\nu=1}^{\nu^0}E_k|\le\frac{(2}{3)^{\nu^0}}|\Delta|<\varepsilon|\Delta|$ и, следовательно,

$$|E|>(1-\varepsilon)|\Delta|.$$

Из (2.14) вытекает, что

$$Q(x)=\begin{cases}L, & \text{если } x\in E,\\ 0, & \text{если } x\notin\Delta,\end{cases}\qquad Q(x)<-L,\ \text{если } x\in\Delta\setminus E.$$

Так как $\int_0^1 Q(t)dt=0$, то $\int_+|Q(t)|dt=\int_-|Q(t)|dt$, (где $\int_\pm|Q(t)|dt$ – интеграл по множествам, где $Q(x)$ соответственно положителен, отрицателен). Следовательно, имеем

$$L|\Delta|\le\int_0^1|Q(t)|dt=\int_+|Q(t)|dt+\int_-|Q(t)|dt=2\int_+|Q(t)|dt\le 2L|\Delta|.$$

Осталось проверить выполнение условия 5). Члены полинома $Q(x)$ переставим так, чтобы

$$|a_{\sigma(N^0)}|\ge|a_{\sigma(N^0+1)}|\ge...\ge|a_{\sigma(N)}|\ge 0.$$

С учетом, (2.12), (2.14) и (2.16) получим

$$\sum_{k=N_0}^{n}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)=\begin{cases}Q(x), & \text{если } \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)=0,\\ L, & \text{если } \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)>0,\end{cases}$$

$$\sum_{k=N_0}^{n}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)<0,\quad\text{если } \sum_{k=N_{\nu-1}}^{n}a^\nu_{\lambda^\nu(k)}\varphi_{\lambda^\nu(k)}(x)<0.$$

Следовательно, сумма $\sum_{k=N_0}^{n} a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)$ либо отрицательна, либо равна L. Из этого сразу вытекают условия 5). Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. *Для любых чисел $N_0 \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ и полинома f(x) по общей системе Хаара существуют функция $g(x) \in L^1(0,1)$, полином $Q(x) = \sum_{k=N_0}^{N} b_k\varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, множество $E \subset (0,1)$ и перестановка $\sigma(k)$ чисел $\overline{N_0, N}$ такие, что*

(1) $0 < |b_{k_1}| < \delta$, *и* $|b_{k_1}| \neq |b_{k_2}|$, *если* $k_1, k_2 \in \overline{N_0, N}, k_1 \neq k_2$;
(2) $|E| > (1-\varepsilon)$;
(3) $g(x) = f(x)$ *для всех* $x \in E$;
(4) $||f|| \leq ||g|| \leq 2||f||$;
(5) $||g - Q|| < \delta$;
(6) $|b_{\sigma(N_0)}| > |b_{\sigma(N_0+1)}| > |b_{\sigma(N_0+2)}| > ... > |b_{\sigma(N)}| > 0$;
(7) $\max_{N_0 < n \leq N} ||\sum_{k=N_0}^{n} b_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}|| < 3||f||$.

Доказательство. Пусть $f(x) = \sum_{r=1}^{R} L_r\chi_{\Delta_{l_r}}$, где $L_r \neq 0$ и $\Delta_{l_r}, r = 1,2,...,R$ - непересекающиеся множества из множеств $\{A_k^{(n)}\}$.

Последовательно применяя Лемму 2.2, можно определить множества $E_r \subset \Delta_{l_r}$, полином $Q_r(x) = \sum_{k=N_{r-1}}^{N_r-1} a_k^r\varphi_k(x)$ по подсистеме $\chi_{\mathbb{S}} = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие что

(2.17)
$$|a_k^r| < \delta_r, \quad \text{где } \delta_r = \begin{cases} \frac{\delta}{2} & \text{при} \quad r=1 \\ \min\{\frac{\delta}{2},\ \min_{N_{r-2} \leq n < N_{r-1}}\{|a_n^{r-1}| : a_n^{r-1} \neq 0\}\ \} & \text{при } r > 1, \end{cases}$$

для любого $k \in spec\{Q_1(x)\}$.

$$|E_r| > (1-\varepsilon)|\Delta_{l_r}|; \tag{2.18}$$

$$Q_r(x) = \begin{cases} L_r, \text{ если } x \in E_r, \\ 0, \text{ если } x \notin \Delta_{l_r}, \end{cases} ; \tag{2.19}$$

$$|L_r||\Delta_{l_r}| \leq ||Q_r|| \leq 2|L_r||\Delta_{l_r}|. \tag{2.20}$$

Пусть $\sigma_r(k)$ – такая перестановка ненулевых чисел $\{a_k^r\}_{k=N_{r-1}}^{N_r}$, что $|a_{\sigma_r(k)}^r| \geq |a_{\sigma_r(k+1)}^r|$ для всех $N_{r-1} \leq k < N_r - 1$. Тогда верно следующее

$$\max_{N_{r-1} < n < N_r} ||\sum_{k=N_{r-1}}^{n} a_{\sigma_r(k)}^r\chi_{\sigma_r(k)}|| \leq 2|L_r||\Delta_{l_r}|. \tag{2.21}$$

Обозначим $E=\bigcup_{r=1}^{R}E_r$ и

$$g(x)=\sum_{r=1}^{R}Q_r(x)=\sum_{r=1}^{R}\sum_{k=N_{r-1}}^{N_r-1}a_k^r\varphi_k(x)=\sum_{k=N_0}^{N}a_k\varphi_k(x), \tag{2.22}$$

где $N=N_R-1$.

Учитывая (2.18)-(2.20), получаем, что пункты 2–4 леммы 2.3 уже выполнены. Возьмем

$$0<\alpha<\min\left\{\frac{\delta}{2},\ ||f||,\ \frac{1}{3}\min_{|a_{k_1}|\neq|a_{k_2}|}\{||a_{k_1}|-|a_{k_2}||\},\ \frac{\delta}{||\sum_{k=N_0}^{N}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}||},\right.$$

$$\left.\frac{||f||}{2\max_{N_0\le n\le N}||\sum_{k=N_0}^{n}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}||}\right\}, \tag{2.23}$$

и для него рассмотрим следующий полином

$$Q(x)=\sum_{k=N_0}^{N}b_k\varphi_k(x),\quad \text{где}\ \ b_k=a_k+\frac{\alpha}{2^k},\quad k\in[N_0,N], \tag{2.24}$$

Учитывая (2.17) и (2.22)-(2.24), получим

$$0<|b_{k_1}|\neq|b_{k_2}|<\delta \text{ для всех } k_1,k_2\in[N_0,N],k_1\neq k_2.$$

$$||g-Q||=\alpha||\sum_{k=N_0}^{N}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}||<\delta.$$

Пусть $\sigma(k)$ такая перестановка чисел $\overline{N_0,N}$, что

$$|b_{\sigma(N_0)}|>|b_{\sigma(N_0+1)}|>|b_{\sigma(N_0+2)}|>...>|b_{\sigma(N)}|>0.$$

Из (2.23),(2.24) вытекает, что

$$|a_{\sigma(N_0)}|\ge|a_{\sigma(N_0+1)}|\ge|a_{\sigma(N_0+2)}|\ge...\ge|a_{\sigma(N^*)}|>0.$$

Здесь неравенство написано до некоторого N^*, поскольку некоторые a_k могут равняться 0.

Учитывая вышесказанное и (2.17), (2.20), (2.21), (2.23), (2.24), получаем, что для любого $N_0\le n\le N$ существует r_0 такое, что $N_{r_0-1}\le n<N_{r_0}$ и

$$\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{n}b_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx=\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{n}a_{\sigma(k)}\varphi_{\sigma(k)}(x)\right|dx+$$

$$\alpha\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{n}\frac{\varphi_{\sigma(k)}(x)}{2^k}\right|dx\le 3||f||.$$

Лемма 2.3 доказана. □

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1.1. Пусть заданы $0 < \varepsilon < 1$ и $\{\varphi_k\} = \chi_{\mathbb{S}}$ (см.(1.3)). Обозначим через

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.1}$$

последовательность полиномов по общей системе Хаара с рациональными коэффициентами и последовательно применим Лемму 2.3. Тогда получим последовательности функций $\{\overline{g}_n\}$, множества E_n, полиномы

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{k=N_{n-1}}^{N_n-1} b_k\varphi_k(x),\ N_0 = 1, \tag{3.2}$$

и перестановки $\{\sigma_n(k)\}$ чисел $\overline{N_{n-1}, N_n - 1}$ такие, что

$$|E_n| > (1 - \varepsilon 2^{-n}); \tag{3.3}$$

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x) \text{ для всех } x \in E_n; \tag{3.4}$$

$$||f_n|| \le ||\overline{g}_n|| \le 2||f_n||; \tag{3.5}$$

$$||\overline{g}_n - \overline{Q}_n|| < \delta_n = \min\{\ 4^{-6(n+1)},\ \min_{k<N_{n-1}} \{|b_k|\}\ \}; \tag{3.6}$$

$$0 < |b_{k_1}| < \delta_n,\ \text{и } |b_{k_1}| \ne |b_{k_2}| \text{ если } k_1, k_2 \in \overline{N_{n-1}, N_n - 1}, k_1 \ne k_2; \tag{3.7}$$

$$|b_{\sigma_n(N_{n-1})}| > |b_{\sigma_n(N_{n-1}+1)}| > |b_{\sigma_n(N_{n-1}+2)}| > ... > |b_{\sigma_n(N_n-1)}| > 0; \tag{3.8}$$

$$\max_{N_{n-1}<m<N_n} ||\sum_{k=N_{n-1}}^{m} b_{\sigma_n(k)}\varphi_{\sigma_n(k)}|| < 3||f_n||. \tag{3.9}$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \text{ (из (3.3) следует, что } |E| > 1 - \varepsilon). \tag{3.10}$$

Пусть $f \in L^1(0,1)$ и $\overline{\varepsilon} = \min\{\frac{\varepsilon}{2},\ \int_E |f(x)|dx\}$. Нетрудно видеть, что из последовательности (3.1) можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\delta_{n_1} < \overline{\varepsilon} \cdot 4^{-12}$

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{N} f_{n_k}(x) - f(x)\right| dx = 0\ ; \tag{3.11}$$

$$\int_0^1 |f_{n_k}(x)|\,dx \le \overline{\varepsilon}\cdot 4^{-4(k+2)}, \quad k\ge 2. \tag{3.12}$$

Очевидно, что

$$||f - f_{n_1}|| < \frac{\overline{\varepsilon}}{4}. \tag{3.13}$$

Положим $\nu_1 = n_1$, $g_1 = \overline{g}_{n_1}$ и

$$Q_1 = \overline{Q}_{n_1} + \sum_{k=1}^{N_{n_1-1}-1} \frac{\alpha_1}{2^k}\varphi_k(x) = \sum_{k=N_{n_1-1}}^{N_{n_1}-1} b_k\varphi_k(x) + \sum_{k=1}^{N_{n_1-1}-1} \frac{\alpha_1}{2^k}\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{N_{n_1}-1} a_k\varphi_k(x)$$

где

$$0 < \alpha_1 < \min\left\{\min_{N_{n_1-1}\le k< N_{n_1}} |b_k|, \overline{\varepsilon}\ 4^{-12},\ \frac{||f_{n_1}||}{2}\right\}. \tag{3.14}$$

Пусть $\{\omega_1(k)\}$ – такая перестановка чисел $\overline{1, N_{n_1}-1}$, что

$$|a_{\omega_1(1)}| > |a_{\omega_1(2)}| > \ \ ... > |a_{\omega_1(N_{n_1}-1)}| > 0.$$

Тогда

$$\max_{1\le m< N_{n_1}} \int_0^1 |\sum_{k=1}^{m} a_{\omega_1(k)}\varphi_{\omega_1(k)}(x)| < 3.5||f_{n_1}||. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.11) и (3.14), будем иметь

$$||Q_1 - g_1|| \le ||\overline{g}_{n_1} - \overline{Q}_{n_1}|| + \alpha_1 \left\|\sum_{k=1}^{N_{n_1-1}-1}\frac{\varphi_k(x)}{2^k}\right\| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-10}.$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_{q-1}$, функции $g_p(x), f_{\nu_p}(x)$ и полиномы

$$Q_p(x) = \sum_{k=N_{\nu_{p-1}}}^{N_{\nu_p}-1} a_k\varphi_k(x), \qquad 1\le p< q,$$

удовлетворяющие условиям

$$g_p(x) = f_{n_p}(x), \qquad x\in E_{\nu_p}, \quad 1\le p<q, \tag{3.16}$$

$$\int_0^1 |g_p(x)|dx \le \overline{\varepsilon}\ 4^{-4p}, \quad 1<p<q,$$

$$0 < |a_k| < \min_{t< N_{\nu_{p-1}}}\{|a_t|\}, \qquad 1<p<q, \quad N_{\nu_{p-1}}\le k < N_{\nu_p}, \tag{3.17}$$

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{p}(Q_k(x) - g_k(x))\right| dx \le \overline{\varepsilon}\ 4^{-5(p+1)}, \qquad 1\le p<q. \tag{3.18}$$

Если $\omega_p(k)$ – такая перестановка чисел $\overline{N_{\nu_{p-1}}, N_{\nu_p}-1}$, что $|a_{\omega_p(N_{\nu_{p-1}})}| > |a_{\omega_p(N_{\nu_{p-1}}+1)}| > ... > |a_{\omega_p(N_{\nu_p}-1)}| > 0$, то

$$\max_{N_{\nu_{p-1}} \le m < N_{\nu_p}} \int_0^1 |\sum_{k=N_{\nu_{p-1}}}^{m} a_{\omega_p(k)}\varphi_{\omega_p(k)}(x)| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-4p}, \qquad 1 < p < q\ .$$

Возьмем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (3.1) такую, что $\nu_q > \nu_{q-1}$, $\delta_{\nu_q} < \overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+2)}$,

$$\left\| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{n_q} - \sum_{k=1}^{q-1}(Q_k(x) - g_k(x)) \right) \right\| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-8(q+1)}, \tag{3.19}$$

и (см. (3.7))

$$|b_k| < \min_{t<N_{\nu_{q-1}}} \{|a_t|\},\ \ N_{\nu_q-1} \le k < N_{\nu_q}. \tag{3.20}$$

Из (3.12),(3.18) и вышесказанного следует, что

$$\int_0^1 |f_{\nu_q}(x)|dx < \overline{\varepsilon}\ 4^{-4(q+1)}. \tag{3.21}$$

Обозначим

$$Q_q = \overline{Q}_{\nu_q} + \sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{N_{\nu_{q-1}}-1} \frac{\alpha_q}{2^k}\varphi_k(x) = \sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{N_{\nu_q}-1} a_k\varphi_k(x) \tag{3.22}$$

где

$$0 < \alpha_q < \min\left\{ \min_{N_{\nu_q-1} \le k < N_{\nu_q}} |b_k|,\ \overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+3)} \right\}. \tag{3.23}$$

Положим

$$g_q(x) = f_{n_q}(x) - (f_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)). \tag{3.24}$$

Очевидно, что

$$g_q(x) = f_{n_q}(x), \qquad x \in E_{\nu_q}. \tag{3.25}$$

Из (3.7), (3.17), (3.20) и (3.23) вытекает, что

$$0 < |a_k| < \min_{t<N_{\nu_{q-1}}} \{|a_t|\}, \qquad N_{\nu_{q-1}} \le k < N_{\nu_q}. \tag{3.26}$$

Учитывая (3.5), (3.18), (3.19), (3.21) и (3.24), получим, что

$$\int_0^1 |g_q(x)|dx \le \left\| f_{\nu_q} - (f_{n_q} - \sum_{k=1}^{q-1}(Q_k - g_k)) \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{q-1}(Q_k - g_k)) \right\| + ||\overline{g}_{\nu_q}|| < \overline{\varepsilon}\ 4^{-4q}. \tag{3.27}$$

В силу (3.6), (3.19), (3.22) – (3.24) будем иметь

$$\left\|\sum_{k=1}^{q}(Q_k-g_k)\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{q-1}(Q_k-g_k)-f_{n_q}+f_{\nu_q}+Q_q-\overline{g}_{\nu_q}\right\|<\overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+1)}. \tag{3.28}$$

Пусть $\{\omega_q(k)\}$ – такая перестановка чисел $\overline{N_{\nu_{q-1}},N_{n_q}-1}$, что

$$|a_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}})}|>|a_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}}+1)}|>...>|a_{\omega_q(N_{\nu_q}-1)}|>0. \tag{3.29}$$

Тогда $|b_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}})}|>|b_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}}+1)}|>...>|b_{\omega_q(N_{\nu_{(q-1)}}+N_{\nu_q}-N_{\nu_q-1})}|>0,$

Следовательно из (3.8), (3.9), (3.22) и (3.23) получаем

$$\max_{N_{\nu_{q-1}}\le m<N_{\nu_q}}||\sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{m}a_{\omega_q(k)}\varphi_{\omega_q(k)}||<\max_{N_{\nu_{q-1}}\le n<N_{\nu_q}}||\sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{m}b_{\omega_q(k)}\varphi_{\omega_q(k)}||+$$

$$+\alpha_q<3||f_{\nu_q}||+\overline{\varepsilon}\ 4^{-5(q+3)}<\overline{\varepsilon}\ 4^{-4q}. \tag{3.30}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q\}_{q=1}^{\infty}$, числа $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$ и полиномы $\{Q_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ удовлетворяющие условиям (3.25)-(3.30) для всех $q\ge 2$. Определим функцию $g(x)$ и ряд $Q(x)$ следующим образом:

$$g(x)=\sum_{q=1}^{\infty}g_q(x), \tag{3.31}$$

$$Q(x)=\sum_{q=1}^{\infty}Q_q(x)=\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{N_{\nu_q}-1}a_k\varphi_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x). \tag{3.32}$$

Отсюда и из условий (3.5), (3.11), (3.15), (3.25) и (3.27) вытекает:

$$g\in L^1(0,1),\qquad g(x)=f(x),\ \text{при}\ x\in E,$$

$$||g||\le||\overline{g}_{n_1}||+\sum_{k=2}^{\infty}||g_k||\le 2||f_{n_1}||+\overline{\varepsilon}\ 4^{-4}<2||f||+\overline{\varepsilon}\le 3||f||; \tag{3.33}$$

$$||g||\ge||\overline{g}_{n_1}||-\sum_{k=2}^{\infty}||g_k||\ge||f_{n_1}||-\overline{\varepsilon}\ 4^{-4}\ge||f||-\overline{\varepsilon}\ 2^{-1}\ge\frac{||f||}{2}. \tag{3.34}$$

Пусть $\sigma(k)$ – такая перестановка натуральных чисел, что

$$|a_{\sigma(1)}|>|a_{\sigma(2)}|>...>|a_{\sigma(k)}|>...,$$

Учитывая (3.26) и (3.29) получим, что $\sigma(k)$ определяется однозначно.

В силу (3.27)-(3.32) для любого m существует q ($N_{\nu_{q-1}} \le m < N_{\nu_q}$) такое, что

$$||G_m(g)-g|| \le \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{q-1}(Q_k(x)-g_k(x))\right| dx + \int_0^1 \left|\sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{m} a^{(q)}_{\omega_q(k)}\varphi_{\omega_q(k)}(x)\right| dx+$$

$$+\int_0^1 |\sum_{k=q}^{\infty} g_k(x)|dx < \overline{\varepsilon}\ 4^{-3q}.$$

Из вышесказанного, (3.5),(3.13),(3.33) и (3.34) следует, что

$$||G_m(g)|| \le 3||\overline{g}_{\nu_1}|| + \overline{\varepsilon}\ 4^{-3q} < 4||f|| < 4||g|| < 12||f||,$$

и

$$\lim_{m\to\infty} ||G_m(g)-g|| = 0.$$

Теорема 1.1 доказана. □

Доказательство теоремы 1.2. Определим числа $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ и множество E следующим образом

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \overline{Q}_q(x) = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{k=N_{q-1}}^{N_q-1} b_k^{(q)}\varphi_k(x),$$

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

где $\{\overline{Q}_q(x)\}_{q=1}^{\infty}$ и E_n определены в доказательстве теоремы 1.1 (см. (3.2), (3.3), (3.10)).

Используя рассуждения при доказательстве Теоремы 1, для любой функции $f \in L^1(0,1)$ можно выбрать последовательность натуральных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{m\to\infty} \int_E |f(x) - \sum_{k=1}^{m} \overline{Q}_{\nu_k}(x)|dx = 0.$$

Тогда для полученного ряда $\{\overline{Q}_{\nu_k}(x)\}$ существуют числа $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$, ($\delta_k = 1$ или 0) такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{Q}_{\nu_k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k b_k \varphi_k(x).$$

Теорема 1.2 доказана. □

Автор выражает благодарность профессору М. Г. Григоряну за руководство работой.

Abstract. We prove that for any subsystem $\chi_{\mathbb{S}} = \{\chi_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ of general Haar system with $|\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty}\Delta_{n_k}| = 1$, where $\Delta_n = \{x \in [0,1], \chi_n(x) \neq 0\}$ and for each $\varepsilon > 0$ there exists a measurable set $E_\varepsilon \subset [0,1]$, with measure $|E_\varepsilon| > 1-\varepsilon$, such that for every integrable function $f \in L^1(0,1)$ one can find a function $g \in L^1(0,1)$,which coincides with f in E_ε, such that Greedy algorithm for modified function with respect to subsystem of general Haar system converges in $L^1(0,1)$ norm.

Список литературы

[1] Н. Н. Лузин, “К основной теореме интегрального исчесления”, Мат. сборник, **28**, no. 2, 266 – 294 (1912).

[2] Д. Е. Меньшов, “О равномерной сходимости рядов Фурье”, Мат. сборник, **53**, no. 2, 67 – 96 (1942).

[3] M. G. Grigoryan, “On the convergence of Fourier series in the metric of L^1”, Analysis Mathematica, **17**, 211 – 237 (1991).

[4] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, “Some remarks on greedy algorithms”, Advances in Computational Math., **5**, 173 – 187 (1996).

[5] V. N. Temlyakov, “Nonlinear methods of approximation”, Found comput. Math., **3**:1, 33 – 107 (2003).

[6] S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, “A remark on Greedy approximation in Banach spaces”, East Journal on Approx., **5**:1, 1 – 15(1999).

[7] P. Wojtaszczyk, “Greedy Algorithm for General Biorthogonal Systems”, Journal of Approximation Theory, **107**, 293 – 314 (2000).

[8] T. Tao, “On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods”, Applied and Comput. Harm. Anal., 384 – 387 1996.

[9] Г. Г. Геворкян, А. А. Степанян, “О почти всюду расходимости одного метода суммирования для вейвлет разложений”, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **39**, no. 2, 27 – 32 (2004).

[10] S. J. Dilworth, D. Kutzarova and P. Wojtaszczyk, “On approximate l_1 systems in Banach spaces”, Journal of Approx. Theory, **114**, 214 – 241 (2002).

[11] M. G. Grigorian and R. E. Zink, “Greedy approximation with respect to certain subsystems of the Walsh orthonormal system”, Proc. of the Amer. Mat. Soc., **134**:12, 3495 – 3505 (2006).

[12] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, “Two remarks on quasi-greedy bases in the space”, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **40**, no. 1, 2 – 14 (2005).

[13] S. A. Episkoposian, “On the system which is not Quasi-Greedy basis, Isaac International Conference”, Yerevan, Armenia, p. 19 (2002).

[14] M. G. Grigoyan, A. A. Sargsyan, “Non-linear approximation of continuous functions by the Faber-Schauder system”, Sbornik: Mathematics, **199**:5, 629 – 653 (2008).

[15] D. L. Burkholder, “Martingale transforms”, Ann. Math. Statist, **37**, 1494 – 1504 (1966).

[16] D. L. Burkholder, “Boundary value problems and sharp inequalities for martingale trasforms”, Ann. Probab., **12**, 647 – 702 (1984).

[17] A. Kamont, “General Haar system and greedy approximation”, Studia Math., **145**, no. 2, 165 – 184 (2001).

[18] П. Л.Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, Мат. сб., **63**, no. 3, 356 – 391 (1964).

[19] М. Г. Григорян и С. Л. Гогян, “О переставленных рядах по системе Хаара”, Изв. НАН Армении, серия Математика, **42**, no. 2, 44 – 64 (2007).

[20] М. Г. Григорян и С. Л. Гогян, “Нелинейная аппроксимация по системе Хаара и модификации функций”, Анал. Мат., **32**, 49 – 80 (2006).

[21] К. А. Навасардян и А. А. Степанян, “О рядох по системе Хаара”, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **42**, no 4, 53 – 66 (2007).

[22] С. Л. Гогян, “О жадном алгоритме в $L^1(0,1)$ по регулярной системе Хаара”, Изв. НАН Армении, сер. Математика, **46**, no. 1, 3 – 16 (2011).

[23] S. Gogyan, “Greedy algorithm with regard to Haar subsystems”, East J. Approx., **11**:2, 221 – 236 (2005).

[24] A. Kh. Kobelyan, “On the Fourier-Haar coefficients of functions from L_p”, International Conference Harmonic Analysis and Approximations IV, 73 – 74 (2008).

Поступила 16 июня 2011