

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ СТРОМБЕРГА

К. А. КЕРЯН, А. С. МАРТИРОСЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *karenkeryan@yahoo.com*, *anush.martirosyan@gmail.com*

Аннотация. В работе исследованы полиномиальные всплески Стромберга. Доказана теорема единственности для рядов по этой системе. Для функции Пелли этой системы получена слабая оценка типа (1,1). Приведены некоторые контрпримеры.

MSC2010 number: 42C10.

Ключевые слова: всплеск Стромберга; теорема единственности; мажоранта частных сумм; функция Пелли.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе исследованы полиномиальные всплески Стромберга степени $m \geq 0$, изучение которых началось с работы [1]. Напомним определение этого всплеска: пусть $A_0 = \mathbb{Z}_+ \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z}_-$ и $A_1 = A_0 \cup \{\frac{1}{2}\}$. Обозначим через S_i^m , $i = 0, 1$ пространство функций из $L_2(\mathbb{R}) \cap C^m(\mathbb{R})$, которые на каждом интервале разбиения A_i являются полиномами степени $m+1$. Ясно, что $S_0^m \subset S_1^m$ и коразмерность S_0^m в S_1^m равна единице. Поэтому существует единственная, с точностью знака, функция $\tau \in S_1^m$ такая, что $\tau \perp S_0^m$ и $\|\tau\|_2 = 1$. В работе [1], наряду с другими результатами, получено, что система функций $f_{jk}(x) = 2^{j/2}\tau(2^jx - k)$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$ является полной ортонормированной системой в $L_2(\mathbb{R})$, т.е. τ представляет из себя всплеск.

Эта система имеет похожие свойства с системой Франклина. В частности, в работе [1] получена экспоненциальная оценка для τ :

$$|\tau(x)| \leq C_0 r^{|x|}, \quad 0 < r < 1.$$

Аналогичные оценки для функций системы Франклина известны как экспоненциальные оценки функций Франклина, доказанные З. Чисельским [3]. В последующем изложении мы укажем еще на несколько сходств между этими системами. Однако оказывается, некоторые свойства, которые верны для системы Франклина, и даже для линейных периодических всплесков Стромберга, не верны для полиномиальной системы Стромберга (соответствующие примеры приведены в разделе 5 настоящей работы).

Рассмотрим ряд

$$(1.1) \quad \sum_{j,k} a_{jk} f_{jk}(t).$$

Условимся обозначать коэффициенты через $a_{jk}(f)$, если это ряд Фурье-Стромберга некоторой функции $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, т.е.

$$a_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(t) f(t) dt.$$

Частные суммы ряда (1.1) определим следующим образом:

$$(1.2) \quad S_{JK}(t) = \sum_{(j,k) \leq (J,K)} a_{jk} f_{jk}(t),$$

где $(j, k) \leq (J, K)$ означает $j < J$, $k \in \mathbb{Z}$ или $j = J$, $k \leq K$. В дальнейшем под сходимостью ряда (1.2) будем предполагать что для каждого целого j ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

и для каждого целого j_0 ряд

$$\sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{jk} f_{jk}(x)$$

сходятся. В разделе 2 (см. свойство 2.3) доказывается, что если $a_{jk} = a_{jk}(f)$, $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, то ряд (1.2) абсолютно сходится на $\mathbb{R}$.

Мажоранту частных сумм и функцию Пелли ряда (1.1) обозначим соответственно через

$$S^*(t) = \sup_{J,K} |S_{JK}(t)| \quad \text{и} \quad P(t) = \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2 f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если же речь идет о ряде Фурье-Стромберга некоторой функции f , то будем писать $S^*f(t)$ и $Pf(t)$.

Известно, что для классической системы Франклина (см. [2]) и даже для общей системы Франклина с квазидиадическим и сильно регулярным разбиением (см. [4]) оператор Пелли имеет слабый тип (1.1). В настоящей работе доказывается, что и в случае полиномиального всплеска Стромберга этот оператор имеет слабый тип (1.1) (см. теорему 4.2).

Используя методы работ [4]-[7], можно доказать, что из слабого типа (1.1) оператора Пелли следует, что для $f \in L_1(\mathbb{R})$ справедливо

$$\mu\{t \in \mathbb{R} : Pf(t) > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Напомним, что функция g называется A -интегрируемой на $\mathbb{R}$, если она удовлетворяет условию

$$\mu\{t \in \mathbb{R} : |g(t)| > \lambda\} = o\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

и если существует

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} [g(t)]_{\lambda} dt, \quad \text{где} \quad [g(t)]_{\lambda} = \begin{cases} g(t), & |g(t)| \leq \lambda, \\ 0, & |g(t)| > \lambda. \end{cases}$$

При этом пишут

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} [g(t)]_{\lambda} dt = (A) \int_{\mathbb{R}} g(t) dt.$$

В разделе 4 доказывается следующая теорема:

Теорема 1.1. Пусть $S_{JK}(t)$ п.в. сходится к функции $f(t)$ и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{t \in \mathbb{R} : S^*(t) > \lambda\} = 0.$$

Тогда для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ выполняются

$$a_{jk} = (A) \int_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t) dt.$$

Аналогичная теорема для классической системы Франклина доказана в работе [8]. Теорема верна и для общей системы Франклина в случае сильно регулярного и квазидиадического разбиения (см. [9]).

Условимся обозначать постоянные, зависящие лишь от порядка m , через $C_1, C_2, \dots$.

Если постоянная зависит от некоторого параметра, будем отмечать это в индексе.

Дополнение интервала $I \subset \mathbb{R}$ условимся обозначать через I^c .

2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА И ИЗВЕСТНЫЕ ФАКТЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТРОМБЕРГА

Заметим, что из экспоненциальной оценки функции τ следует, что τ ограниченная функция, т.е. можно обозначить $\max_{x \in \mathbb{R}} |\tau(x)|$ через C_τ . Из той же оценки имеем, что

$$|f_{jk}(x)| \leq C_0 2^{j/2} r^{|2^j x - k|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Исследуем другие свойства этой системы.

Свойство 2.1. [1] В случае $m = 0$ (линейного всплеска Стромберга) имеет место

$$\begin{aligned} \tau(l) &= \tau(1)(\sqrt{3} - 2)^{l-1}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \\ \tau(l) &= \tau(0)(-\sqrt{3} - 2)^{2l}, \quad l = 0, -1/2, -1, \dots, \end{aligned}$$

где $\tau(0)$ и $\tau(1)$ отличны от нуля.

Свойство 2.2. В случае $m = 1$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такая, что $\tau(k) \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное: $\tau(k) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $\{N_l : l \in A_1\}$ базис пространства S_1^1 , состоящий из B -сплайнов. Точки разбиения A_1 обозначим через t_i , $i \in \mathbb{Z}$ в порядке возрастания с $t_0 = 0$. Нам понадобятся следующие известные свойства B -сплайнов (см. [10]):

N1. $\text{supp} N_{t_i} = (t_i, t_{i+3})$,

N2. $N_{t_i}(x) > 0$, $x \in (t_i, t_{i+3})$,

N3. N_{t_i} образуют деление единицы, и поэтому $N_{t_{i-1}}(t_i) + N_{t_{i-2}}(t_i) = 1$,

N4. $N_{t_i}(x + t_i) = N_{t_{i+1}}(x + t_{i+1})$, если $|i| \geq 2$.

N5. $N_{t_i}(x + t_i) = N_{t_i}(t_{i+3} - x)$, если $i \neq 0, 1$.

Заметим, что из свойств **N3**, **N4** и **N5** следует

N6. $N_{t_i}(t_{i+1}) = N_{t_i}(t_{i+2}) = \frac{1}{2}$ если $i \neq 0, 1$.

Из $\tau \in S_1^1$ имеем

$$(2.1) \quad \tau(x) = \sum_{l \in A_1} a_l N_l(x), \quad a_l \in \mathbb{R}.$$

Итак, с учетом предположения и свойства **N6**, для $k \geq 3$, получим

$$0 = \tau(k) = \sum_{l \in A_1} a_l N_l(k) = a_{k-1} N_{k-1}(k) + a_{k-2} N_{k-2}(k) = \frac{1}{2} a_{k-1} + \frac{1}{2} a_{k-2}.$$

Откуда следует, что $a_k = -a_{k+1}$, $k \geq 1$. Учитывая, что $a_k \rightarrow 0$, когда $k \rightarrow +\infty$ (см. [11], доказательство леммы 2.2), получим $a_k = 0$, $k \geq 1$.

Положим в (2.1) значения $x = 2$ и $x = 1$ получим

$$0 = \tau(2) = a_1 N_1(2) + a_{\frac{1}{2}} N_{\frac{1}{2}}(2) = a_{\frac{1}{2}} N_{\frac{1}{2}}(2)$$

$$0 = \tau(1) = a_{\frac{1}{2}} N_{\frac{1}{2}}(1) + a_0 N_0(1) = a_0 N_0(1).$$

Учитывая **N2** получим $a_{1/2} = a_0 = 0$.

Положив в (2.1) $x = 0$ и учитывая **N6**, получим

$$0 = \tau(0) = a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(0) + a_{-1} N_{-1}(0) = \frac{1}{2} a_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_{-1},$$

т.е. $a_{-\frac{1}{2}} = -a_{-1}$. Ясно, что из (2.1) и из $a_{t_i} = 0$, $i \geq 0$, имеем

$$\tau(x) = 0, x \geq 1,$$

$$\tau(x) = a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x), x \in [\frac{1}{2}, 1] \text{ и}$$

$$\tau(x) = a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x) + a_{-1} N_{-1}(x), x \in [0, \frac{1}{2}].$$

Пусть $\tilde{N}_0(x)$ B -сплайн с узлами $\{0, 1, 2, 3\}$. Тогда $\tilde{N}_0(x) = \frac{1}{2}x^2$, $x \in [0, 1]$. Так как $\tau \perp S_0^1$ и $\tilde{N}_0(x) \in S_0^1$, то

$$\begin{aligned} (2.2) \quad 0 &= 2 \int_{\mathbb{R}} \tau(x) \tilde{N}_0(x) dx = \int_0^1 x^2 \tau(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 (a_{-1} N_{-1}(x) + a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x)) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 a_{-1} N_{-1}(x) dx + \int_0^1 x^2 a_{-\frac{1}{2}} N_{-\frac{1}{2}}(x) dx. \end{aligned}$$

Учитывая, что $a_{-\frac{1}{2}} = -a_{-1}$ и

$$N_{-\frac{1}{2}}(x) = 2(1-x)^2 - 6(\frac{1}{2}-x)^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$N_{-\frac{1}{2}}(x) = 2(1-x)^2, \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$N_{-1}(x) = 2(\frac{1}{2}-x)^2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

из (2.2) получим

$$0 = a_{-1} \left(8 \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 dx - 2 \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx \right) = -\frac{7}{4} a_{-1} \int_0^1 x^2 (1-x)^2 dx.$$

Поэтому a_{-1} , а вместе с ним и $a_{-\frac{1}{2}}$ равны нулю.

Итак, получили $a_{t_i} = 0$, $i \geq -2$, откуда и из (2.1) следует, что $\tau(x) = 0$, $x \geq 0$. А это невозможно, ибо в таком случае τ принадлежала бы S_0^1 , но по построению $\tau \perp S_0^1$. Следовательно наше предположение неверно. Свойство доказано. $\square$

Свойство 2.3. Если $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, то для любого целого j_0 существует постоянная $C_{j_0 p}$, зависящая только от j_0 и p , такая, что

$$\sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{jk}(f)| |f_{jk}(x)| \leq C_{j_0 p} \|f\|_p.$$

Доказательство. Для $p = 1$ из

$$|a_{jk}(f)| \leq \|f_{jk}\|_\infty \|f\|_1 \leq C_\tau 2^{j/2} \|f\|_1,$$

получим

$$|a_{jk}(f)| |f_{jk}(x)| \leq C_1 2^j \|f\|_1 r^{2^j x - k}.$$

Пусть теперь $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|f_{jk}\|_q^q &= \int_{\mathbb{R}} |f_{jk}(t)|^q dt \leq C_0 2^{jq/2} \int_{\mathbb{R}} r^{2^j q |t - k/2^j|} dt \\ &= C_0 \frac{2^{jq/2}}{2^j q} \int_{\mathbb{R}} r^{|t|} dt \leq C_{2p} 2^{j(q/2-1)}. \end{aligned}$$

Поэтому, для $p > 1$ имеем

$$\begin{aligned} |a_{jk}(f)| |f_{jk}(x)| &\leq \|f_{jk}\|_q \|f\|_p |f_{jk}(x)| \\ &\leq C_{3p} \|f\|_p 2^{j(1/2-1/q)} 2^{j/2} r^{2^j x - k} = C_{3p} \|f\|_p 2^{j/p} r^{2^j x - k}. \end{aligned}$$

Итак, для $p \geq 1$ получили

$$|a_{jk}(f)| |f_{jk}(x)| \leq C_{4p} \|f\|_p 2^{j/p} r^{2^j x - k},$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{jk}(f)| |f_{jk}(x)| &\leq C_{4p} \|f\|_p \sum_{j \leq j_0} 2^{j/p} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{2^j x - k} \\ &\leq 2C_{4p} \|f\|_p \sum_{j \leq j_0} 2^{j/p} \sum_{k \geq 0} r^k \leq C_{5p} \|f\|_p \sum_{j \leq j_0} 2^{j/p} = C_{6p} 2^{j_0/p} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Свойство доказано. $\square$

Замечание 2.1. В разделе 5 для $m = 0$ и $m = 1$ приведен пример функции из пространства $L_\infty(\mathbb{R})$, для которой утверждение свойства 2.3 не верно (см. пример 1).

Рангом двоичного интервала $I = \left(\frac{i}{2^j}, \frac{i+1}{2^j}\right)$ назовем число j . Обозначим через $\{j, k\}$ интервал $\left(\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right)$. Приведем еще две леммы, которые нам понадобятся при доказательстве основных теорем.

Лемма 2.1. [11] Пусть $I = \left[\frac{\alpha}{2^{j_0}}, \frac{\beta}{2^{j_0}}\right]$, $\alpha, \beta, j_0 \in \mathbb{Z}$ и

$$F_{j,I}(x) = \sum_{k: \{j,k\} \subset I} a_{jk} f_{jk}(x).$$

Тогда существует постоянная $C_m > 0$ такая, что для $j \geq j_0$

$$\begin{aligned} |F_{j,I}(x)| &\leq C_m r^{2^j d(x,I)} \max_{t \in \left[\frac{\beta}{2^{j_0}}, \frac{\beta+m+2}{2^{j_0}}\right]} |F_{j,I}(t)|, \quad x \geq \max I, \\ |F_{j,I}(x)| &\leq C_m r^{2^j d(x,I)} \max_{t \in \left[\frac{\alpha-m-2}{2^{j_0}}, \frac{\alpha}{2^{j_0}}\right]} |F_{j,I}(t)| \quad x \leq \min I, \end{aligned}$$

где $d(x, I) = \inf\{|x - y|, y \in I\}$.

Лемма 2.2. [12] Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \delta \leq 1$ существует постоянная $C_{n,\delta}$ такая, что для любого полинома $P(x)$ степени n и подмножества $A \subset [a, b]$ с условием $\mu(A) \geq \delta(b - a)$, справедливо

$$\max_{x \in [a,b]} |P(x)| \leq C_{n,\delta} \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

3. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть $Mf(x)$ есть максимальная функция Харди-Литтлвуда:

$$Mf(x) = \sup_{I: x \in I} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt,$$

Известно, что она удовлетворяет следующему неравенству

$$(3.1) \quad \mu\{x : Mf(x) > y\} \leq \frac{5}{y} \|f\|_1, \quad y > 0, \quad f \in L_1.$$

Обозначим

$$(3.2) \quad E_\lambda = \{t \in \mathbb{R} : S^*(t) > \lambda\}, \quad B_\lambda = \left\{t \in \mathbb{R} : M\chi_{E_\lambda}(t) > \frac{1}{3(m+2)}\right\}.$$

Ясно, что $E_{\lambda_1} \supset E_{\lambda_2}$, $B_{\lambda_1} \supset B_{\lambda_2}$, при $\lambda_1 < \lambda_2$, а также $\mu(E_\lambda \setminus B_\lambda) = 0$, $\mu(B_\lambda) \leq 15(m+2)\mu(E_\lambda)$. По условию теоремы 1.1 имеем $\lambda\mu(E_\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$, поэтому

начиная с некоторого места $\mu(E_\lambda)$, а следовательно и $\mu(B_\lambda)$, конечны. В последующем будем считать λ настолько большим, что $\mu(B_\lambda) < \infty$.

Лемма 3.1. *Существует постоянная C_7 такая, что для любого ряда (1.1) и $\lambda > 0$ имеет место*

$$\int_{B_\lambda^c} \sup_{J,K} \left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (J,K) \\ \{j,k\} \subset B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| dt \leq C_7 \lambda \mu(E_\lambda).$$

Лемма 3.2. *Существует постоянная C_8 такая, что для любого ряда (1.1) и $\lambda > 0$ имеет место*

$$\int_{B_\lambda} \sup_{J,K} \left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (J,K) \\ \{j,k\} \not\subset B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| \leq C_8 \lambda \mu(E_\lambda).$$

Лемма 3.3. *Ряд*

$$\sum_{\{j,k\} \not\subset B_\lambda} a_{jk} f_{jk}(x)$$

является рядом Фурье некоторой функции $f \in L_1(\mathbb{R}) \oplus L_\infty(\mathbb{R})$.

Множество B_λ с точностью до множества меры нуль можно представить в виде объединения интервалов $B_q^{(\lambda)}$ не имеющих общих концов. Зафиксируем некоторый $B_q^{(\lambda)}$. Пусть $\{j_q, k_q\}$ самый большой двоичный интервал входящий в $B_q^{(\lambda)}$. Ясно, что тогда

$$2^{-j_q} \leq |B_q^{(\lambda)}| \leq 4 \cdot 2^{-j_q}.$$

Для $j \geq j_q$ обозначим через $I_q^{(j)}$ интервал вида $[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_2}{2^j}]$ наибольшей длины, содержащийся в $B_q^{(\lambda)}$. Заметим, что для $i = 1, 2, \dots, m+2$ имеют место

$$(3.3) \quad \left| \left[\frac{k_1 - i}{2^j}, \frac{k_1 - i + 1}{2^j} \right] \cap E_\lambda^c \right| > \frac{1}{3 \cdot 2^{j-1}} \quad \text{и}$$

$$(3.4) \quad \left| \left[\frac{k_2 + i - 1}{2^j}, \frac{k_2 + i}{2^j} \right] \cap E_\lambda^c \right| > \frac{1}{3 \cdot 2^{j-1}}.$$

Действительно, если бы не выполнялось (3.3), то хотя бы для одного $i = 1, 2, \dots, m+2$ было бы справедливо следующее:

$$\left| \left[\frac{k_1 - i}{2^j}, \frac{k_1 - i + 1}{2^j} \right] \cap E_\lambda \right| \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^j},$$

следовательно,

$$\left| \left[\frac{k_1 - m - 2}{2^j}, \frac{k_1}{2^j} \right] \cap E_\lambda \right| \geq \frac{1}{3 \cdot 2^j},$$

а это значит, что $\left[\frac{k_1 - m - 2}{2^j}, \frac{k_1}{2^j} \right] \subset B_\lambda$, что невозможно по определению интервала $I_q^{(j)}$. Следовательно, (3.3) выполняется для всех $i = 1, 2, \dots, m + 2$. Неравенство (3.4) доказывается аналогично.

Обозначим

$$S_{q,l}^{(j)}(t) = \sum_{\substack{k:k \leq l \\ \{j,k\} \subset I_q^{(j)}}} a_{jk} f_{jk}(t).$$

Ясно, что $|S_{q,l}^{(j)}(t)| \leq 2\lambda$, $t \in E_\lambda^c$, учитывая также (3.3), (3.4) и леммы 2.1, 2.2, получим

$$|S_{q,l}^{(j)}(t)| \leq C_9 \lambda r^{2^j d(t, I_q^{(j)})}, \quad t \notin I_q^{(j)}.$$

Обозначим

$$\Phi_q^{(\lambda)}(t) = \begin{cases} 0, & t \in \{j_q, k_q\}, \\ \sum_{j=j_q}^{h-1} \max_l |S_{q,l}^{(j)}(t)|, & t \in I_q^{(h)} \setminus I_q^{(h-1)}, h > j_q, \\ \sum_{j=j_q}^{\infty} \max_l |S_{q,l}^{(j)}(t)|, & t \notin B_q^{(\lambda)}. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi_q^{(\lambda)}(t) dt &= \sum_{j=j_q}^{\infty} \int_{(I_q^{(j)})^c} \max_l |S_{q,l}^{(j)}(t)| dt \leq C_{10} \lambda \sum_{j=j_q}^{\infty} \int_{(I_q^{(j)})^c} r^{2^j d(t, I_q^{(j)})} dt = \\ &= 2C_{10} \lambda \sum_{j=j_q}^{\infty} \int_0^{\infty} r^{2^j t} dt \leq C_{11} \lambda \sum_{j=j_q}^{\infty} 2^{-j} \leq C_{12} \lambda 2^{-j_q} \leq C_{12} \lambda |B_q^{(\lambda)}|. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$(3.6) \quad \sup_{J,K} \left| \sum_{\substack{\{j,k\} \subset B_\lambda \\ (j,k) \leq (J,K)}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| \leq \sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t), \quad t \notin B_\lambda.$$

Из последних двух неравенств и $\mu(B_\lambda) \leq 15(m+2)\mu(E_\lambda)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_\lambda^c} \sup_{J,K} \left| \sum_{\substack{\{j,k\} \subset B_\lambda \\ (j,k) \leq (J,K)}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| dt &\leq C_{12} \lambda \sum_q |B_q^{(\lambda)}| \\ &= C_{12} \lambda \mu(B_\lambda) \leq 15C_{12}(m+2)\lambda\mu(E_\lambda), \end{aligned}$$

и лемма 3.1 доказана.

Докажем, что существует постоянная C_{13} такая, что

$$(3.7) \quad |a_{jk}f_{jk}(t)| \leq C_{13}\lambda r^{2^j|t-\frac{k}{2^j}|}, \quad \{j, k\} \notin B_\lambda.$$

Аналогично доказательству соотношений (3.3), (3.4) можно убедиться, что из $\{j, k\} \notin B_\lambda$ следует

$$(3.8) \quad |\{j, k+i\} \cap E_\lambda^c| \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^j}, \quad i = -m-1, -m, \dots, m+1.$$

Так как $|a_{jk}f_{jk}(t)| \leq 2\lambda$ на E_λ^c , а $f_{jk}(x)$ полином степени $m+1$ хотя бы на каждой половине $\{j, k+i\}$, для всех $i = -m-1, -m, \dots, m+1$, из леммы 2.2 и (3.8) будем иметь, что

$$|a_{jk}f_{jk}(x)| < C_{14}\lambda, \quad x \in \{j, k+i\}.$$

Осталось заметить, что (3.7) следует из леммы 2.1.

Обозначим через $\mathcal{J}_\lambda$ множество максимальных двоичных интервалов входящих в B_λ , т.е. $I \in \mathcal{J}_\lambda$ если I -двоичный интервал, $I \subset B_\lambda$ и каждый двоичный интервал $I' \supset I$ не содержится в B_λ : $I' \not\subset B_\lambda$. Ясно, что с точностью до множества меры нуль справедливо представление

$$B_\lambda = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_\lambda} I.$$

Рассмотрим некоторый $I \in \mathcal{J}_\lambda$. Пусть ранг I равен j_I и I' двоичный интервал ранга $j_I - 1$, который содержит I . Из определения $\mathcal{J}_\lambda$ следует, что $I' \notin \mathcal{J}_\lambda$. Следовательно

$$\frac{1}{|I'|} \int_{I'} \chi_{E_\lambda}(t) dt \leq \frac{1}{3(m+2)},$$

откуда получим

$$(3.9) \quad \frac{|I \cap E_\lambda|}{|I|} \leq \frac{2}{3} \frac{1}{m+2}, \quad I \in \mathcal{J}_\lambda.$$

Пусть $t \in I$. Тогда, учитывая (3.7) будем иметь

$$\sum_{j \geq j_I, \{j, k\} \notin B_\lambda} |a_{jk}f_{jk}(t)| \leq C_{15}\lambda \sum_{j \geq j_I} \sum_{k: \{j, k\} \notin B_\lambda} r^{2^j|t-\frac{k}{2^j}|} \leq C_{16}\lambda \sum_{j \geq j_I} r^{2^j d(t, I^c)}.$$

Интегрируя по I получим

$$\begin{aligned}
 (3.10) \quad \int_I \sum_{j \geq j_I, \{j,k\} \notin B_\lambda} |a_{jk} f_{jk}(t)| dt &\leq C_{16} \lambda \sum_{j \geq j_I} \int_I r^{2^j d(t, I^c)} dt \\
 &= 2C_{16} \lambda \sum_{j \geq j_I} \int_0^\infty r^{2^j t} dt \leq C_{17} \lambda \sum_{j \geq j_I} 2^{-j} \leq C_{18} \lambda |I|.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi_{\lambda,1}(t) = \begin{cases} \sum_{\substack{j \geq j_I, \\ \{j,k\} \notin B_\lambda}} |a_{jk} f_{jk}(t)|, & t \in I \in \mathcal{I}_\lambda, \\ 0, & t \notin B_\lambda. \end{cases}$$

Из (3.10) имеем

$$(3.11) \quad \int_{\mathbb{R}} \Phi_{\lambda,1}(t) dt \leq C_{18} \lambda \sum_{I \in \mathcal{I}_\lambda} |I| = C_{18} \lambda \mu(B_\lambda).$$

Ясно, что для любой пары целых чисел (j_0, k_0) справедливо

$$(3.12) \quad \left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (j_0, k_0) \\ \{j,k\} \notin B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| \leq \left| \sum_{(j,k) \leq (j_0, k_0)} a_{jk} f_{jk}(t) \right| + \left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (j_0, k_0) \\ \{j,k\} \in B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right|.$$

Пусть $t \notin B_\lambda$. Тогда из (3.12) и (3.6) получим

$$(3.13) \quad \left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (j_0, k_0) \\ \{j,k\} \notin B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| \leq \lambda + \sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t), \text{ для п.в. } t \notin B_\lambda.$$

Пусть $t \in I \in \mathcal{I}_\lambda$ и ранг I равен j_I . Если $j_0 < j_I$, то вторая сумма в (3.12) является полиномом степени $m+1$ на I , и поэтому, из (3.9) и леммы 2.2 получим, что она по модулю не превосходит $C_{19} \lambda$, а второе слагаемое не превосходит $\sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t)$.

Если же $j_0 \geq j_I$, то для $t \in I$ имеем

$$\left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (j_0, k_0) \\ \{j,k\} \notin B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| \leq \left| \sum_{\substack{j \leq j_I \\ k \in \mathbb{Z}}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| + \left| \sum_{\substack{j \leq j_I \\ \{j,k\} \in B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| + \left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (j_0, k_0) \\ j > j_I, \{j,k\} \notin B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right|.$$

Здесь используя вышесказанное имеем, что первое слагаемое не превосходит $C_{19} \lambda$, второе меньше $\sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t)$. Третье слагаемое меньше $\Phi_{\lambda,1}(t)$. Итак, для п.в. $t \in B_\lambda$ получим

$$(3.14) \quad \left| \sum_{\substack{(j,k) \leq (j_0, k_0) \\ \{j,k\} \notin B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| \leq C_{19} \lambda + \Phi_{\lambda,1}(t) + \sum_q \Phi_q^{(\lambda)}(t),$$

откуда, учитывая (3.5) и (3.11), получим

$$\int_{B_\lambda} \sup_{(j_0, k_0)} \left| \sum_{\substack{(j, k) \leq (j_0, k_0) \\ \{j, k\} \notin B_\lambda}} a_{jk} f_{jk}(t) \right| dt \leq C_{20} \lambda \mu(B_\lambda),$$

и этим доказательство леммы 3.2 завершено.

Перед тем как перейти к доказательству леммы 3.3, убедимся, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Если $S^*(t) \in L_1(\mathbb{R}) \oplus L_\infty(\mathbb{R})$, то существует функция $f \in L_1(\mathbb{R}) \oplus L_\infty(\mathbb{R})$ такая, что $a_{jk} = \int_{\mathbb{R}} f(t) f_{jk}(t) dt$.*

Доказательство. Имеем $S^*(t) \leq C + \phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in L_1(\mathbb{R})$. Обозначим

$$F_m(x) = \sum_{(-m, 0) \leq (j', k') < (m, 0)} a_{j'k'} f_{j'k'}(x),$$

$$\varphi_m(x) = \int_0^x F_m(t) dt.$$

Имеем $|F_m(t)| \leq 2(C + \phi(t))$, $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in L_1(\mathbb{R})$. Заметим, что на каждом конечном интервале $[a, b]$ функция φ_m ограничена и имеет ограниченную вариацию, причем

$$\sup_{x \in [a, b]} |\varphi_m(x)| \leq 2C(b - a) + 2 \int_a^b |\phi(t)| dt,$$

$$\bigvee_a^b \varphi_m(x) \leq 2C(b - a) + 2 \int_a^b |\phi(t)| dt.$$

В силу теоремы Хелли существует подпоследовательность φ_{m_l} , которая сходится на $[a, b]$ к некоторой функции ограниченной вариации. Итак, рассмотрим интервал $[-1, 1]$. Из вышесказанных рассуждений следует, что существует подпоследовательность $\varphi_{m_l}^{(1)}$ последовательности φ_m , которая сходится на $[-1, 1]$. Теперь рассмотрим последовательность $\varphi_{m_l}^{(1)}$ на интервале $[-2, 2]$. Аналогично, используя теорему Хелли получим, что существует подпоследовательность $\varphi_{m_l}^{(2)}$, которая сходится на $[-2, 2]$, причем заметим, что на $[-1, 1]$ предельная функция совпадает с пределом $\varphi_{m_l}^{(1)}$. Продолжая этот процесс, на i -ом шагу получим последовательность $\varphi_{m_l}^{(i)}$, которая сходится на $[-i, i]$. Рассмотрим диагональную

последовательность $\varphi_{m_l}^{(l)}$. Эта последовательность по построению будет сходиться на $\mathbb{R}$. Исследуем предельную функцию $\varphi(x)$. Ясно, что

$$|\varphi_{m_l}^{(l)}(x) - \varphi_{m_l}^{(l)}(y)| \leq 2C|x - y| + 2 \int_x^y |\phi(t)| dt,$$

поэтому

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2C|x - y| + 2 \int_x^y |\phi(t)| dt.$$

Следовательно, $\varphi(x)$ представляет собой абсолютно непрерывную функцию на $\mathbb{R}$, причем

$$(3.15) \quad |\varphi'(x)| \leq 2C + 2|\phi(x)|, \text{ для почти всех } x \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $f(x) = \varphi'(x)$. Из (3.15) становится ясно, что $f \in L_1(\mathbb{R}) \oplus L_\infty(\mathbb{R})$.

Докажем, что имеет место равенство

$$(3.16) \quad \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) f(x) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) d\varphi_{m_l}^{(l)}(x).$$

Действительно, возьмем произвольный $\varepsilon > 0$ и пусть $A > 0$ некоторое действительное число. Используя (3.15) получим

$$\begin{aligned} \left| \int_A^\infty f_{jk}(x) f(x) dx \right| &\leq \int_A^\infty |f_{jk}(x)| |\varphi'(x)| dx \\ &\leq \int_A^\infty |f_{jk}(x)| (2C + 2|\phi(x)|) dx \leq 2C \int_A^\infty |f_{jk}(x)| dx + 2C' \int_A^\infty |\phi(x)| dx. \end{aligned}$$

Учитывая, что $f_{jk}, \phi \in L_1(\mathbb{R})$, можно выбрать число A настолько большим, чтобы обе слагаемые были меньше ε . Аналогичные оценки верны и для интегралов

$$\int_A^\infty f_{jk}(x) d\varphi_{m_l}^{(l)}(x), \quad \int_{-\infty}^{-A} f_{jk}(x) d\varphi(x), \quad \int_{-\infty}^{-A} f_{jk}(x) d\varphi_{m_l}^{(l)}(x).$$

С другой стороны для любого конечного A по теореме Хелли имеем

$$\int_{-A}^A f_{jk}(x) d\varphi(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f_{jk}(x) d\varphi_{m_l}^{(l)}(x),$$

следовательно

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) d\varphi(x) - \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) d\varphi_{m_l}^{(l)}(x) \right| \leq 8\varepsilon.$$

Откуда, используя произвольность ε , получим равенство (3.16).

Остается доказать, что

$$(3.17) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) d\varphi_{m_l}^{(l)}(x) = a_{jk}.$$

Так как

$$|\sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{j'k'} f_{j'k'}(x)| \leq 2S^*(x) \quad \text{и} \quad S^*(x) f_{jk}(x) \in L_1(\mathbb{R}),$$

то

$$\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{j'k'} f_{j'k'}(x) dx = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} a_{j'k'} \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) f_{j'k'}(x) dx.$$

Аналогично получим, что при $m > |j|$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) F_m(x) dx = \sum_{(-m,0) \leq (j',k') < (m,0)} a_{j'k'} \int_{\mathbb{R}} f_{jk}(x) f_{j'k'}(x) dx = a_{jk},$$

откуда и следует равенство (3.17). Лемма 3.4 доказана. $\square$

Лемма 3.3 следует из леммы 3.4 учитывая оценки (3.13), (3.14) и интегрируемость функций $\Phi_{\lambda,1}(t)$ и $\Phi_q^{(\lambda)}(t)$ на $\mathbb{R}$ (см. (3.5) и (3.11)).

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Мы докажем следующую теорему, откуда непосредственно следует справедливость теоремы 1.1.

Теорема 4.1. Пусть $S_{JK}(t)$ п.в. сходится к функции $f(t)$ и для некоторой последовательности $\lambda_i \uparrow \infty$ выполняется равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i \mu\{t \in \mathbb{R} : S^*(t) > \lambda_i\} = 0.$$

Тогда для всех $j, k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$a_{jk} = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{jk}(t)]_{\Lambda_i} dt,$$

где $\Lambda_i = 2^{j/2} C_\tau \cdot \lambda_i$.

Доказательство. Пусть E_{λ_i} и B_{λ_i} множества определенные в (3.2). Фиксируем некоторый $\{j_0, k_0\}$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0 k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \int_{B_{\lambda_i}} [f(t) f_{j_0 k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt + \int_{B_{\lambda_i}^c} [f(t) f_{j_0 k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt.$$

Первое слагаемое по модулю не превосходит

$$\Lambda_i \mu(B_{\lambda_i}) = 2^{j_0/2} C_\tau \cdot \lambda_i \mu(B_{\lambda_i}) \rightarrow 0, \quad \text{когда } i \rightarrow \infty,$$

а второе слагаемое равно

$$\int_{B_{\lambda_i}^c} f(t) f_{j_0 k_0}(t) dt$$

так как $|f(t)| < \lambda_i$, когда $t \in B_{\lambda_i}^c$ и

$$|f_{j_0 k_0}(t)| \leq C_\tau 2^{j_0/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\tilde{I}_p^{(j)}$ составляющие интервалы $\mathbb{R} \setminus \sum_q I_q^{(j)}$ (см. раздел 3). Заметим, что для каждого $j \in \mathbb{Z}$ число интервалов $I_q^{(j)}$, а значит и число $\tilde{I}_p^{(j)}$ конечно (так как $\mu(B_{\lambda_i})$ конечно), следовательно, можно считать, что эти интервалы пронумерованы в порядке возрастания. Пусть

$$S_q^{(j)}(x) = \sum_{\{j,k\} \subset I_q^{(j)}} a_{jk} f_{jk}(x) \quad \text{и} \quad \tilde{S}_p^{(j)}(x) = \sum_{\{j,k\} \subset \tilde{I}_p^{(j)}} a_{jk} f_{jk}(x).$$

Ясно, что

$$\sum_j \sum_q |S_q^{(j)}(t)| \leq \sum_q \Phi_q^{(\lambda_i)}(t) \in L_1(\mathbb{R}),$$

следовательно ряд $\sum_j \sum_q |S_q^{(j)}(t)|$ почти всюду сходится. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0 k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt &= \int_{B_{\lambda_i}^c} f_{j_0 k_0}(t) f(t) dt + o(1) \\ &= \int_{B_{\lambda_i}^c} f_{j_0 k_0}(t) \left(\sum_j \sum_q S_q^{(j)}(t) + \sum_j \sum_p \tilde{S}_p^{(j)}(t) \right) dt + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом леммы 3.1, получим

$$\int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0 k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \int_{B_{\lambda_i}^c} f_{j_0 k_0}(t) \sum_j \sum_p \tilde{S}_p^{(j)}(t) dt + o(1).$$

Откуда, применяя лемму 3.2 и учитывая ограниченность функции $f_{j_0 k_0}(t)$, получим

$$\int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0 k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \int_{\mathbb{R}} f_{j_0 k_0}(t) \sum_j \sum_p \tilde{S}_p^{(j)}(t) dt + o(1).$$

Ясно, что для каждого двоичного интервала $\{j, k\}$ начиная с некоторого i имеет место $\{j, k\} \not\subset B_{\lambda_i}$, следовательно, применяя лемму 3.3, получим

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} [f(t) f_{j_0 k_0}(t)]_{\Lambda_i} dt = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_{j_0 k_0}(t) \sum_j \sum_p \tilde{S}_p^{(j)}(t) dt = a_{j_0 k_0}.$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 4.2. *Существует постоянная C_{21} такая, что для любого $g \in L_1(\mathbb{R})$ и $y > 0$ имеет место*

$$\mu \{t \in \mathbb{R} : Pg(t) > y\} \leq \frac{C_{21}}{y} \|g\|_1.$$

Доказательство. Заметим, что если $g = g' + g''$, то $Pg(t) \leq Pg'(t) + Pg''(t)$.

Поэтому

$$\mu\{t \in \mathbb{R} : Pg(t) > y\} \leq \mu\left\{t : Pg'(t) > \frac{y}{2}\right\} + \mu\left\{t : Pg''(t) > \frac{y}{2}\right\}.$$

Отсюда следует, что без ограничения общности можем считать $g(t) \geq 0$.

Обозначим $G_y = \{x \in \mathbb{R} : Mg(x) > y\}$. Из (3.1) имеем

$$(4.1) \quad |G_y| \leq \frac{5}{y} \|g\|_1.$$

Пусть $\mathcal{J}_y$ множество максимальных двоичных интервалов входящих в G_y , т.е. двоичный интервал I принадлежит $\mathcal{J}_y$ если $I \subset G_y$ и $I' \not\subset G_y$ для каждого двоичного интервала $I' \supset I$. Ясно, что $G_y = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_y} I$.

Рассмотрим $I \in \mathcal{J}_y$. Пусть ранг I равен j_I , а I' двоичный интервал ранга $j_I - 1$ содержащий I . Поскольку $I' \not\subset G_y$, то

$$(4.2) \quad \frac{1}{|I'|} \int_{I'} g(t) dt \leq y.$$

Ясно, что $|I'| = 2|I|$. Учитывая неотрицательность функции $g(t)$, получим

$$\frac{1}{2|I|} \int_I g(t) dt \leq \frac{1}{|I'|} \int_{I'} g(t) dt.$$

Отсюда, учитывая определение $\mathcal{J}_y$ и неравенство (4.2), получим

$$(4.3) \quad \frac{1}{|I|} \int_I g(t) dt \leq 2y, \quad I \in \mathcal{J}_y.$$

Определим функцию $g_1(t)$ следующим образом:

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t), & t \notin G_y, \\ L_I(t), & t \in I \in \mathcal{J}_y. \end{cases}$$

где $L_I(t)$, $t \in I$, проекция функции $g(t)$, $t \in I$, на пространство полиномов степени $m + 1$ на I . Поскольку норма такого проектора в L_1 ограничена числом C_m , то $\|L_I\|_{L_1(I)} \leq C_m \cdot \|g\|_{L_1(I)}$. Отсюда и из (4.3) имеем, что $\|L_I\|_{L_1(I)} \leq 2C_m y |I|$. Поэтому, в силу неравенства Чебышева, будем иметь

$$\mu\{t \in I : |L_I(t)| > 4C_m y\} \leq \frac{1}{4C_m y} \|L_I\|_{L_1(I)} \leq \frac{1}{2} |I|.$$

Откуда, используя лемму 2.2 и учитывая, что функция $L_I(t)$ является полиномом на I , получим $|L_I(t)| \leq C_{22} y$, $t \in I$. Следовательно $|g_1(x)| \leq C_{22} y$, когда $x \in G_y$.

С другой стороны в точках Лебега множества $G_y^c = \{x \in \mathbb{R} : M(g, x) \leq y\}$ имеет место $|g_1(x)| \leq y$. Итак

$$(4.4) \quad |g_1(x)| \leq C_{23}y \quad \text{п.в. на } \mathbb{R}.$$

Заметим, что из (4.4) и (4.1) следует

$$\int_{\mathbb{R}} g_1^2(t) dt = \int_{G_y^c} g^2(t) dt + \int_{G_y} g_1^2(t) dt \leq y \int_{\mathbb{R}} g(t) dt + C_{23}^2 y^2 |G_y| \leq C_{24} y \|g\|_1.$$

Поэтому

$$|\{t \in \mathbb{R} : Pg_1(t) > y\}| = |\{t \in \mathbb{R} : (Pg_1(t))^2 > y^2\}| \leq \frac{\|g_1\|_2^2}{y^2} \leq C_{24} \frac{\|g\|_1}{y}.$$

Нам остается доказать, что существует постоянная C_{25} такая, что для функции $g_2 = g - g_1$ имеет место

$$\left| \left\{ t \in \mathbb{R} : \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} > y \right\} \right| \leq \frac{C_{25}}{y} \|g\|_1.$$

Обозначим через $\tilde{I}$ концентрический интервал с интервалом I , который имеет длину $3|I|$ и пусть $\tilde{G}_y = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_y} \tilde{I}$. Из (4.1) получим

$$|\tilde{G}_y| \leq \frac{15}{y} \|g\|_1.$$

Поэтому, достаточно доказать, что

$$(4.5) \quad \mu \left\{ t \notin \tilde{G}_y : \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} > y \right\} \leq \frac{C_{25}}{y} \|g\|_1.$$

Обозначим $g_I = g_2 \cdot \chi_I$, $I \in \mathcal{J}_y$ и допустим, что выполняется

$$(4.6) \quad \int_{\tilde{I}^c} \sum_{j,k} |a_{jk}(g_I)| |f_{jk}(t)| dt \leq C_{26} \|g_I\|_1.$$

Убедимся, что из (4.6) следует (4.5). Действительно, учитывая, что $\text{supp } g_I \subset I$, из (4.3) и (4.4) получим

$$\|g_I\|_1 = \int_I |g_2(t)| dt \leq \int_I |g(t)| dt + \int_I |g_1(t)| dt \leq C_{27} y |I|.$$

Отсюда и из неравенства $|a_{jk}(g_2)| \leq \sum_{I \in \mathcal{J}_y} |a_{jk}(g_I)|$ следует, что (см. (4.1))

$$(4.7) \quad \int_{\tilde{G}_y^c} \sum_{j,k} |a_{jk}(g_2)| |f_{jk}(t)| dt \leq \sum_{I \in \mathcal{J}_y} \int_{\tilde{I}^c} \sum_{j,k} |a_{jk}(g_I)| |f_{jk}(t)| dt \\ \leq C_{28} y \sum_{I \in \mathcal{J}_y} |I| = C_{28} y |G_y| \leq C_{29} \|g\|_1.$$

Учитывая, что $\left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j,k} |a_{jk}(g_2)| |f_{jk}(t)|$, из (4.7) получим

$$\mu \left\{ t \notin \tilde{G}_y : \left(\sum_{j,k} a_{jk}^2(g_2) f_{jk}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} > y \right\} \\ \leq \mu \left\{ t \notin \tilde{G}_y : \sum_{j,k} |a_{jk}(g_2)| |f_{jk}(t)| > y \right\} \leq \frac{C_{29}}{y} \|g\|_1.$$

Итак, займемся доказательством (4.6). Фиксируем некоторый $I \in \mathcal{J}_y$ и исследуем функцию g_I . Пусть ранг I равен j_I . Из определения функции g_I имеем, что для произвольного полинома $p(t)$ степени $m+1$ справедливо

$$\int_I g_I(t) p(t) dt = 0.$$

Поэтому, учитывая, что функция $f_{jk}(x)$ на двоичных интервалах ранга больше чем j есть полином степени $m+1$, выводим, что $a_{jk}(g_I) = 0$, если $j < j_I$. Следовательно, в сумме (4.6) участвуют только слагаемые с $j \geq j_I$. Обозначим

$$N_1 = \{(j, k) : j \geq j_I, \{j, k\} \subset I\}, \\ N_2 = \{(j, k) : j \geq j_I, \{j, k\} \subset \mathbb{R} \setminus \tilde{I}\}, \\ N_3 = \{(j, k) : j \geq j_I, \{j, k\} \subset \tilde{I} \setminus I\}.$$

Ясно, что достаточно доказать (4.6) с суммами по N_1 , N_2 и N_3 отдельно.

Рассмотрим (4.6) с суммой по N_1 . Пусть $j \geq j_I$. Обозначим через J_i , $i = 1, 2, \dots, 2^{j-j_I}$ составляющие интервалы ранга j интервала I , а соответствующие интегралы через $\sigma_i^{(j)}$:

$$\sigma_i^{(j)} = \int_{J_i} |g_I(t)| dt, \quad i = 1, 2, \dots, 2^{j-j_I}.$$

Имеем

$$|a_{jk}(g_I)| \leq \sum_i \int_{J_i} |g_I(t) f_{jk}(t)| dt \leq 2^{j/2} C \sum_i \sigma_i^{(j)} r^{2^j d(J_i, \frac{k}{2^j})},$$

$$\int_{\tilde{I}^c} |f_{jk}(t)| dt \leq C r^{2^{j-j_I}} 2^{-j/2}.$$

Из последних двух неравенств следует

$$\begin{aligned} \sum_{k: (j,k) \in N_1} |a_{jk}(g_I)| \int_{\tilde{I}^c} |f_{jk}(t)| dt &\leq C_{30} r^{2^{j-j_I}} \sum_i \sigma_i^{(j)} \sum_{k: (j,k) \in N_1} r^{2^j d(J_i, \frac{k}{2^j})} \\ &\leq C_{31} r^{2^{j-j_I}} \sum_i \sigma_i^{(j)} = C_{31} r^{2^{j-j_I}} \|g_I\|_1. \end{aligned}$$

Суммируя последнее по $j \geq j_I$ получим

$$\sum_{(j,k) \in N_1} \int_{\tilde{I}^c} |a_{jk}(g_I)| |f_{jk}(t)| dt \leq C_{32} \|g_I\|_1.$$

Перейдем к оценке суммы по N_2 . Пусть $N_2^- = \{(j, k) \in N_2 : \{j, k\} \text{ левее } I\}$, $N_2^+ = \{(j, k) \in N_2 : \{j, k\} \text{ правее } I\}$. Так как эти суммы оцениваются аналогично, мы ограничимся исследованием суммы по N_2^- . Пусть $j \geq j_I$. Для $(j, k) \in N_2^-$ имеем

$$|a_{jk}(g_I)| \leq C_0 2^{j/2} r^{2^{j-j_I} + 2^j d(\tilde{I}, \frac{k}{2^j})} \|g_I\|_1 \quad \text{и} \quad \int_{\tilde{I}^c} |f_{jk}(t)| dt \leq C_0 2^{-j/2}.$$

Следовательно имеет место

$$\sum_{k: (j,k) \in N_2^-} |a_{jk}(g_I)| \int_{\tilde{I}^c} |f_{jk}(t)| dt \leq C_{33} r^{2^{j-j_I}} \|g_I\|_1 \sum_{k: (j,k) \in N_2^-} r^{2^j d(\tilde{I}, \frac{k}{2^j})} \leq C_{34} r^{2^{j-j_I}} \|g_I\|_1.$$

Суммируя последнее по $j \geq j_I$ получим

$$\sum_{(j,k) \in N_2^-} \int_{\tilde{I}^c} |a_{jk}(g_I)| |f_{jk}(t)| dt \leq C_{35} \|g_I\|_1.$$

Итак, осталось оценить сумму по N_3 . Эту сумму тоже разобьем на две части – N_3^- и N_3^+ состоящие из тех $\{j, k\}$, которые соответственно левее и правее I . Эти суммы оцениваются аналогично, поэтому рассмотрим только сумму по N_3^- . В этом случае имеем

$$|a_{jk}(g_I)| \leq C_0 2^{j/2} r^{2^j d(I, \frac{k}{2^j})} \|g_I\|_1 \quad \text{и} \quad \int_{\tilde{I}^c} |f_{jk}(t)| dt \leq C_0 2^{-j/2} r^{2^j d(\tilde{I}^c, \frac{k}{2^j})}.$$

Отсюда, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k: (j,k) \in N_3^-} |a_{jk}(g_I)| \int_{\tilde{I}^c} |f_{jk}(t)| dt &\leq C_{36} \|g_I\|_1 \sum_{k: (j,k) \in N_3^-} r^{2^j d(I, \frac{k}{2^j}) + d(\tilde{I}^c, \frac{k}{2^j})} \\ &= C_{36} \|g_I\|_1 r^{2^{j-j_I}} \sum_{k: (j,k) \in N_3^-} 1 = C_{36} \|g_I\|_1 2^{j-j_I} r^{2^{j-j_I}}. \end{aligned}$$

Суммируя последнее по $j \geq j_I$ получим

$$\sum_{(j,k) \in N_3^-} \int_{\tilde{I}^c} |a_{jk}(g_I)| |f_{jk}(t)| dt \leq C_{37} \|g_I\|_1$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

5. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Если порядок всплеска Стромберга $m = 0$ или $m = 1$, то существует ограниченная функция f такая, что

1. функция Пелли $Pf(x) = \infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$,
2. для произвольного $j_0 \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_{jk}(f) f_{jk}(x)| = \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Из свойств 2.1 и 2.2 следует, что в случаях $m = 0$ и $m = 1$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $\tau(-k_0) \neq 0$. Без ограничения общности можем считать, что $\tau(-k_0) > 0$. Тогда для некоторого $0 < \delta < 1$ выполняется

$$\int_{-k_0+\delta/2}^{-k_0+\delta} \tau(x) dx = 2c_\tau > 0.$$

Предположим, что имеем последовательность целых чисел $j_1, j_2, \dots$ стремящаяся к $-\infty$. Построим точки $x_1, x_2, \dots$ следующим образом:

$$x_{2l-1} = \delta/2 \cdot 2^{-j_l} \quad \text{и} \quad x_{2l} = \delta \cdot 2^{-j_l}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Если число $k_0 \leq 0$, то ясно, что взяв $j_{l+1} < j_l - 1$ получим $x_{2l} < x_{2l+1}$, $l = 1, 2, \dots$, причем в этом случае $x_l \uparrow \infty$. Определим функцию f следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ 1, & x \in (x_{2l-1}, x_{2l}), \quad l = 1, 2, \dots, \\ 0, & x \in [x_{2l}, x_{2l+1}], \quad l = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Убедимся, что можно выбрать числа j_l так, чтобы выполнялось

$$(5.1) \quad a_{j_l k_0}(f) \geq c_\tau 2^{-j_l/2}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Из определения точек x_l следует

$$\int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} f_{j_l k_0}(x) dx = 2c_\tau 2^{-j_l/2}, \quad l = 1, 2, \dots$$

Действительно

$$\int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} f_{j_l k_0}(x) dx = 2^{j_l/2} \int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} \tau(2^{j_l} x - k_0) dx = 2^{-j_l/2} \int_{-k_0+\delta/2}^{-k_0+\delta} \tau(x) dx = 2c_\tau 2^{-j_l/2}.$$

Пусть j_1 произвольное отрицательное целое число. Выберем $j_2 < j_1 - 1$ так, чтобы

$$(5.2) \quad \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{j_1-j_2}}^{\infty} |\tau(x)| dx < c_\tau,$$

$$(5.3) \quad C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_2-j_1} < \frac{1}{2} c_\tau.$$

Из (5.2) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_3}^{\infty} f(x) f_{j_1 k_0}(x) dx \right| &\leq 2^{j_1/2} \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{-j_2}}^{\infty} |\tau(2^{j_1} x - k_0)| dx \\ &= 2^{-j_1/2} \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{j_1-j_2}-k_0}^{\infty} |\tau(x)| dx \leq 2^{-j_1/2} \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{j_1-j_2}}^{\infty} |\tau(x)| dx \leq c_\tau 2^{-j_1/2}. \end{aligned}$$

Тогда из определения f , (5.2) и из последней оценки получим

$$a_{j_1 k_0} = \int_{x_1}^{x_2} f_{j_1 k_0}(x) dx + \int_{x_3}^{\infty} f(x) f_{j_1 k_0}(x) dx \geq c_\tau 2^{-j_1/2}.$$

Выберем $j_3 < j_2 - 1$ так, чтобы

$$(5.4) \quad \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{j_2-j_3}}^{\infty} |\tau(x)| dx < \frac{1}{2} c_\tau,$$

$$(5.5) \quad C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_3-j_2} < \frac{1}{3} c_\tau.$$

Из (5.4) следует, что

$$\left| \int_{x_5}^{\infty} f(x) f_{j_2 k_0}(x) dx \right| \leq 2^{-j_2/2} \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{j_2-j_3}}^{\infty} |\tau(x)| dx \leq \frac{1}{2} c_\tau 2^{-j_2/2},$$

а из (5.3) следует, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} f_{j_2 k_0}(x) dx \right| &\leq 2^{-j_2/2} \int_{2^{j_2} x_1 - k_0}^{2^{j_2} x_2 - k_0} |\tau(x)| dx \\ &\leq 2^{-j_2/2} C_\tau 2^{j_2} |x_2 - x_1| \leq 2^{-j_2/2} C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_2-j_1} \leq \frac{1}{2} c_\tau 2^{-j_2/2}. \end{aligned}$$

Тогда из определения f , (5.2) и из последних оценок получим

$$\begin{aligned} a_{j_2 k_0} &= \int_{x_1}^{x_2} f_{j_2 k_0}(x) dx + \int_{x_3}^{x_4} f_{j_2 k_0}(x) dx \\ &\quad + \int_{x_5}^{\infty} f(x) f_{j_2 k_0}(x) dx \geq c_\tau 2^{-j_2/2}. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс на l -ом шагу выберем $j_{l+1} < j_l - 1$ так, чтобы

$$(5.6) \quad \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{j_l - j_{l+1}}}^{\infty} |\tau(x)| dx < \frac{1}{l} c_\tau,$$

$$(5.7) \quad C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_{l+1} - j_l} < \frac{1}{l+1} c_\tau.$$

Из (5.6) следует, что

$$\left| \int_{x_{2l+1}}^{\infty} f(x) f_{j_l k_0}(x) dx \right| \leq 2^{-j_l/2} \int_{\frac{\delta}{2} \cdot 2^{j_l - j_{l+1}}}^{\infty} |\tau(x)| dx \leq \frac{1}{l} c_\tau 2^{-j_l/2},$$

а из (5.7) (заменяя $l+1$ на l) следует, что для каждого $i = 1, 2, \dots, l-1$ выполняются

$$\left| \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} f_{j_l k_0}(x) dx \right| \leq 2^{-j_l/2} \int_{2^{j_l} x_{2i-1} - k_0}^{2^{j_l} x_{2i} - k_0} |\tau(x)| dx \leq 2^{-j_l/2} C_\tau \frac{\delta}{2} 2^{j_l - j_i} \leq \frac{1}{l} c_\tau 2^{-j_l/2}.$$

Тогда из определения f , (5.2) и из последних оценок получим

$$a_{j_l k_0} = \sum_{i=1}^{l-1} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} f_{j_l k_0}(x) dx + \int_{x_{2l-1}}^{x_{2l}} f_{j_l k_0}(x) dx + \int_{x_{2l+1}}^{\infty} f(x) f_{j_l k_0}(x) dx \geq c_\tau 2^{-j_l/2}.$$

Следовательно (5.1) выполняется.

Итак, получили, что

$$|a_{j_l k_0}(f) f_{j_l k_0}(x)| \geq c_\tau \tau(2^{j_l} x - k_0).$$

Если же $k_0 > 0$, то можем получить $x_l \downarrow -\infty$ и все рассуждения легко провести аналогично и в этом случае.

Заметим, что для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}$ при $l \rightarrow \infty$ имеем $\tau(2^{j_l} x - k_0) \rightarrow \tau(-k_0) \neq 0$. Следовательно $|a_{j_l k_0}(f) f_{j_l k_0}(x)| \not\rightarrow 0$, $l \rightarrow \infty$, откуда непосредственно следуют оба утверждения. $\square$

Замечание 5.1. Заметим, что доказательство можно провести аналогично и в случае $m > 1$ если только известно, что соответствующий всплеск Стромберга отличен от нуля в некоторой целой точке.

В работе [13] доказано, что в случае периодического линейного всплеска Стромберга сходимость п.в. функции Пелли и самого ряда на множестве положительной меры эквивалентны (теорема 4.4). Оказывается в не периодическом случае это не верно, а именно имеет место следующее утверждение.

Пример 2. Пусть порядок всплеска Стромберга $m = 0$. Тогда существует ряд $\sum_{j,k} a_{jk} f_{jk}(x)$, который почти всюду расходится, но $\sum_{j,k} a_{jk}^2 f_{jk}^2(x)$ сходится.

Доказательство. Рассмотрим следующий ряд

$$(5.8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{0k}(x), \text{ где } a_k f_{0k}(0) = \frac{1}{k}.$$

Используя свойство 2.1 получим

$$f_{0k}(l) = \tau(l-k) = \tau(0)(-\sqrt{3}-2)^{2(l-k)} = f_{0k}(0)(-\sqrt{3}-2)^{2l},$$

если $l-k = 0, -1/2, -1, \dots$. Фиксируя $l \in A_1$, получаем

$$f_{0k}(l) = f_{0k}(0)(-\sqrt{3}-2)^{2l}, \quad k \geq l.$$

Следовательно, для таких $l \leq 0$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{0k}(l) = (-\sqrt{3}-2)^{2l} \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_{0k}(0),$$

а для $l > 0$

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} a_k f_{0k}(l) = (-\sqrt{3}-2)^{2l} \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k f_{0k}(0).$$

Итак, имеем что ряд (5.8) расходится в точках A_1 . Учитывая еще, что функции $f_{0k}(x)$ линейны на каждом интервале разбиения A_1 , получим, что ряд (5.8) расходится кроме нулей функций $f_{0k}(x)$, число которых счетно. Следовательно ряд (5.8) расходится п.в. на $\mathbb{R}$.

Аналогичными рассуждениями получим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 f_{0k}^2(x)$ сходится на A_1 , следовательно и на $\mathbb{R}$. $\square$

Abstract. The paper is devoted to the Stromberg's polynomial wavelets of degree $m \geq 0$. A uniqueness theorem is proved for series by this system. For Pally function of this system a weak estimate of type (1,1) is obtained. Counterexamples are also discussed.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J.-O. Stromberg, "A modified Franklin system and heigher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for hardy spaces", Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Wadsworth Math., Wadsworth, Belmont, CA, 475 – 494 (1983).
- [2] С. В. Бочкарев, "Существование базисов в пространстве функций, аналитических в круге и некоторые свойства системы Франклина", Матем. сб., **95** (1), 3 – 18 (1974).

- [3] Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", *Studia Math.*, **27**, 289 – 323 (1966).
- [4] Г. Геворкян, А. Мартиросян, "Мажоранта и функция Пелли рядов по общей системе Франклина", *Труды МИРАН* (в печати).
- [5] Г. Геворкян, А. А. Саакян, "Unconditional basis properties of general Franklin series", *Изв. НАН Армении, сер. Математика*, **35**, no. 4, 2 – 22 (2000).
- [6] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", *Dissert. Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)*, **374**, 1 – 59 (1998).
- [7] G. G. Gevorkyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L_p[0; 1]$, $1 < p < \infty$ ", *Studia Math.*, **164**, 161 – 204 (2004).
- [8] Геворкян Г. Г., "Мажоранта и единственность рядов по системе Франклина", *Мат. заметки*, **59** (4), 521 – 545 (1996).
- [9] М. Р. Poghosyan, "Uniqueness of series by general Franklin systems", *Izv. NAN Armenii*, **35** (4) (2000).
- [10] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, Springer, Berlin (1993).
- [11] Z. Ciesielski, G. Gevorkyan, "Franklin spline orthogonal system in $L_p(\mathbb{R})$ with $0 < p \leq 1$ ", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **66**, 211 – 226 (2000).
- [12] Г. Г. Геворкян, "Некоторые теоремы о безусловной сходимости и мажоранте рядов Франклина и их применение в пространстве ReH_p ", *Труды МИАН*, **193** (1989).
- [13] Г. Г. Геворкян, "Теоремы о модифицированной системе Франклина построенной Стромберг-ом. II", *Изв. НАН Армении*, **26** (1), 31 – 51 (1991).

Поступила 4 марта 2012