

НЕПРЕРЫВНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ В ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ ИЗ $\mathbb{R}^n$

К. АВЕТИСЯН, Е. ТОНОЯН

Ереванский государственный университет
E-mails: *avetkaren@ysu.am*, *etonyan@ysu.am*

Аннотация. В статье установлены непрерывные вложения в пространства гармонических функций со смешанной нормой в шаре из $\mathbb{R}^n$. Этим обобщены некоторые вложения Харди-Литтлвуда для аналогичных пространств голоморфных функций в единичном круге. Выявлены различия в индексах между пространствами гармонических и голоморфных функций. В качестве следствия получен аналог известного неравенства Фейера-Рисса. Установлены также вложения в специальном случае систем Рисса.

MSC2010 number: 31B05.

Ключевые слова: гармоническая функция; единичный шар в $\mathbb{R}^n$; пространство со смешанной нормой; пространство Харди; вложения; неравенство Фейера-Рисса; система Рисса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $B = B_n$ ($n \geq 2$) — открытый единичный шар в $\mathbb{R}^n$, $S = \partial B$ — его граница, единичная сфера. Интегральные средние порядка p гармонической функции $u(x) = u(r\zeta)$ на сфере $|x| = r$ обозначены, как обычно, через

$$M_p(u; r) = \|u(r \cdot)\|_{L^p(S; d\sigma)}, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 < p \leq \infty,$$

где $d\sigma$ — $(n-1)$ -мерная поверхностная лебегова мера на S , нормированная условием $\sigma(S) = 1$. Множество всех гармонических функций в шаре B обозначим через $h(B)$. Класс гармонических функций $u \in h(B)$, для которых

$$\|u\|_{h^p} = \sup_{0 < r < 1} M_p(u; r) < +\infty,$$

есть обычное пространство Харди $h^p(B)$ в единичном шаре B .

Определим пространство $h(p, q, \alpha)$ ($0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$) со смешанной нормой как пространство гармонических функций $u \in h(B)$, для которых конечна

квазинорма

$$\|u\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u;r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \sup_{0 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u;r), & q = \infty. \end{cases}$$

Если $(1-r)^\alpha M_p(u;r) = o(1)$ при $r \rightarrow 1^-$, то говорят, что гармоническая функция $u(x)$ принадлежит малому пространству $h_0(p, \infty, \alpha)$. При $p = q < \infty$ пространства $h(p, q, \alpha)$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q = \infty$ их обычно называют весовыми пространствами Харди.

Много работ посвящено пространствам $h(p, q, \alpha)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, п्लюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [1], [2]. Вложения с разными индексами и связи с обычными классами Харди $H^p(B_2)$ были первыми результатами, для этих классов. Часть этих результатов изложена в монографии [3]. Флетт [4], [5] значительно обобщил и усилил многие оригинальные результаты Харди и Литтлвуда и упростил их доказательства. В дальнейшем были получены многомерные обобщения результатов Харди, Литтлвуда, Флетта в областях из $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Пространства $h(p, p, \alpha)$, $h(p, q, \alpha)$ в единичном шаре из $\mathbb{R}^n$ изучались в работах [6-11], см. также содержащиеся там ссылки. Пространства $h(p, q, \alpha)$, состоящие из n -гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, изучались в статьях [12], [13]. Известно, что при $0 < p < 1$ классы Харди $h^p(B_n)$ имеют сложную структуру и сильно отличаются от классов Харди $h^p(B_n)$ с $p \geq 1$, см. [14]. Подобное наблюдается и в случае пространств $h(p, q, \alpha)$. Если $1 \leq p, q \leq \infty$, то $h(p, q, \alpha)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$. Если $0 < p < 1$ либо $0 < q < 1$, то $h(p, q, \alpha)$ — полные метрические пространства с инвариантной метрикой $d(u, v) = \|u - v\|_{p,q,\alpha}^{\min\{p,q\}}$ и квазинормой $\|\cdot\|_{p,q,\alpha}$.

В настоящей статье устанавливаются непрерывные вложения типа Харди-Литтлвуда для пространств $h(p, q, \alpha)$ в шаре из $\mathbb{R}^n$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1.1. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ следующие вложения непрерывны:

- (i) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q, \beta)$, $\beta > \alpha$,
- (ii) $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q, \alpha)$, $0 < p_0 < p \leq \infty$,
- (iii) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q_0, \alpha)$, $0 < q < q_0 \leq \infty$,
- (iv) $h(p, q, \alpha) \subset h(p_0, q, \beta)$, $\beta \geq \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}$, $p \leq p_0 \leq \infty$,
- (v) $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha + \frac{n-1}{p}$, $0 < q_0 \leq \infty$,
- (vi) $h(p, q, \alpha) \subset h(p, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha$, $0 < q_0 \leq \infty$,
- (vii) $h^p \subset h\left(p_0, \infty, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$, $0 < p < p_0 \leq \infty$,
- (viii) $h^p \subset h\left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$, $1 < p < p_0 \leq \infty$, $p \leq q \leq \infty$,
- (ix) $h^p \subset h(p_0, q, \beta)$, $\beta > \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}$, $0 < p < p_0 \leq \infty$.
- (x) Если $u \in h(p, q, \alpha)$, $0 < q < \infty$, то $u \in h_0(p, \infty, \alpha)$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Для доказательства Теоремы 1.1 нам потребуется несколько лемм.

Символы $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, возможно различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$. Символ $A \approx B$ для $A, B > 0$ означает, что существуют положительные постоянные c_1 и c_2 , независимые от участвующих функций и переменных, такие, что $c_1 A \leq B \leq c_2 A$. Для любого p , $1 \leq p \leq \infty$, через $p' = p/(p-1)$ обозначим сопряженный индекс (полагая также $1/\infty = 0$ и $1/0 = +\infty$).

Лемма 2.1. Обозначим шар с центром в точке $x = r\zeta \in B$ и радиусом $\frac{1-r}{2}$ через

$$(2.1) \quad B_x = \left\{ y = \rho\zeta \in \mathbb{R}^n : |y - x| < \frac{1 - |x|}{2} \right\} \subset B.$$

Тогда

$$1 - |x| < |\xi - \rho x| < 3(1 - |x|) \quad \text{для всех } y = \rho\zeta \in B_x.$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Зафиксируем произвольную точку $x = r\zeta \in B$. Если $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$, то искомое неравенство очевидно, так как $|\xi - \rho x| < 2$ и $1 - r \geq \frac{2}{3}$. Положим $\frac{1}{3} < r < 1$. Заметим, что начало координат лежит вне шара B_x , и

$$\frac{1}{2}(1-r) < 1 - |y| < \frac{3}{2}(1-r), \quad \rho'' - \rho' = 1-r, \quad 0 < \rho' < |y| < \rho'', \quad y = \rho\xi \in B_x,$$

где

$$(2.2) \quad \rho' = r - \frac{1-r}{2} = \frac{3r-1}{2}, \quad \rho'' = r + \frac{1-r}{2} = \frac{1+r}{2}.$$

Через $\theta \in (0, \pi/2)$ обозначим угол между векторами ζ и ξ . Легко видеть, что

$$\cos \frac{\theta}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} < \frac{\sin^2 \theta}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1-r}{2r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |\xi - \rho x|^2 &= 1 + \rho r - 2\rho r \cos \theta = (1 - \rho r)^2 + 4\rho r \sin^2 \frac{\theta}{2} < \\ &< (1 - \rho' r)^2 + 2\rho r \left(\frac{1-r}{2r} \right)^2 = \left(1 - \frac{3r-1}{2} r \right)^2 + \frac{\rho}{2r} (1-r)^2 = \\ &= (1-r)^2 (1 + 3r/2)^2 + \frac{\rho}{2r} (1-r)^2 < \frac{31}{4} (1-r)^2 < 9(1-r)^2. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.2. Каждая функция $u \in h^p(B)$ с $0 < p \leq \infty$ допускает оценку

$$|u(x)| \leq C(p, n) \|u\|_{h^p} (1 - |x|)^{-(n-1)/p}, \quad x \in B,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h\left(\infty, \infty, \frac{n-1}{p}\right)$.

Доказательство. Для фиксированной точки $x \in B$ и шара B_x , см. (2.1), запишем неравенство Фейффермана–Стейна [15] ($0 < p < \infty$), используя обозначения (2.2),

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{B_x} |u(y)|^p dy \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{\rho' < |y| < \rho''} |u(y)|^p \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi) \leq \\ &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Если $0 \leq r \leq \frac{1}{3}$, то

$$|u(x)|^p \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_0^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, n) \sup_{0 < \rho < 2/3} M_p^p(u; \rho) \leq C(p, n) \|u\|_{h^p}^p,$$

что очевидно влечет искомое неравенство.

Если же $\frac{1}{3} < r < 1$, то поскольку $\frac{1}{2}(1-r) < 1-\rho < \frac{3}{2}(1-r)$, можем оценить

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq \\ &\leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} (\rho'' - \rho') \sup_{\rho' < \rho < \rho''} M_p^p(u; \rho) \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^{n-1}} \|u\|_{h^p}^p. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.3. Если $u \in h^p(B)$ и $0 < p < p_0 \leq \infty$, то

$$M_{p_0}(u; r) \leq C(p, p_0, n) \|u\|_{h^p} (1-r)^{-(n-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right)}, \quad 0 \leq r < 1,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h\left(p_0, \infty, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right)$.

Доказательство. Заметим, что при $p_0 = \infty$ лемма сводится к Лемме 2.2. Поэтому положим $0 < p < p_0 < \infty$. Тогда по Лемме 2.2

$$\begin{aligned} M_{p_0}^{p_0}(u; r) &= \int_S |u(r\zeta)|^{p_0-p} |u(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \leq M_{\infty}^{p_0-p}(u; \rho) M_p^p(u; \rho) \leq \\ &\leq C(p, p_0, n) \left[\|u\|_{h^p} (1-r)^{-(n-1)/p} \right]^{p_0-p} M_p^p(u; \rho) \leq \\ &\leq C(p, p_0, n) \|u\|_{h^p}^{p_0} (1-r)^{-(n-1)p_0\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}\right)}. \end{aligned}$$

□

Лемма 2.4. Справедливы следующие интегральные оценки:

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - x|^{\alpha+n-1}} \approx \begin{cases} \frac{1}{(1-|x|)^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha < 0, \\ \log \frac{e}{1-|x|}, & \alpha = 0, \end{cases} \quad x \in B,$$

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{(1-rt)^\beta} dt \approx \begin{cases} \frac{1}{(1-r)^{\beta-\alpha}}, & \beta > \alpha, \\ 1, & \beta < \alpha, \\ \log \frac{e}{1-r}, & \beta = \alpha, \end{cases} \quad 0 \leq r < 1, \alpha > 0.$$

Во всех оценках неявно участвующие постоянные зависят лишь от α, β, n .

Доказательства оценок можно найти в [7], [9], [16].

Следующая лемма показывает, что поведение гармонической функции $u(x)$ в окрестности начала координат в сущности не влияет на значение ее квазинормы $\|u\|_{p,q,\alpha}$ с точностью до эквивалентности.

Лемма 2.5. Для любых $0 < p, q \leq \infty, \alpha \in \mathbb{R}$ и всех $u \in h(B)$ справедливы неравенства

$$\|u\|_{p,q,\alpha} \leq C(p, q, \alpha, n) \left(\int_{1/2}^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr \right)^{1/q}, \quad \text{если } 0 < q < \infty,$$

$$\|u\|_{p,\infty,\alpha} \leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u; r), \quad \text{если } q = \infty.$$

Доказательство. Достаточно доказать усеченные неравенства

$$\int_0^{1/2} (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr \leq C(p, q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr, \quad \text{при } 0 < q < \infty,$$

$$\sup_{0 < r < 1/2} (1-r)^\alpha M_p(u; r) \leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u; r), \quad \text{при } q = \infty.$$

Если $1 \leq p < \infty$, то функция $|u|^p$ субгармонична, а интегральные средние $M_p(u; r)$ монотонно возрастают по r (при $1 \leq p \leq \infty$). Поэтому в этом случае доказательство элементарно. Положим $0 < p < 1$ и рассмотрим теперь три случая.

Случай $0 < p < 1, q = \infty$. Возьмем произвольную точку $x, |x| = 3/4$, и шар $B_{1/8}(x)$ с центром в точке x и радиусом $1/8$. По неравенству Феффермана-Стейна [15]

$$\begin{aligned} |u(x)|^p &\leq \frac{C(p, n)}{(1/8)^n} \int_{B_{1/8}(x)} |u(y)|^p dy \leq C(p, n) \int_{5/8 < |y| < 7/8} |u(y)|^p dy \leq \\ &\leq C(p, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, n) \sup_{5/8 < \rho < 7/8} M_p^p(u; \rho) \leq \\ &\leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < \rho < 1} (1-\rho)^{\alpha p} M_p^p(u; \rho), \quad |x| = 3/4. \end{aligned}$$

Отсюда, используя принцип максимума для субгармонической функции $|u|$,

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \rho < 1/2} (1-\rho)^\alpha M_p(u; \rho) &\leq \sup_{0 < \rho < 3/4} M_p(u; \rho) \leq \sup_{|x| < 3/4} |u(x)| = \\ &= \max_{|x| = 3/4} |u(x)| \leq C(p, \alpha, n) \sup_{1/2 < \rho < 1} (1-\rho)^\alpha M_p(u; \rho). \end{aligned}$$

Случай $0 < p < 1, 0 < p \leq q < \infty$. Воспользуемся уже доказанным неравенством

$$(2.3) \quad |u(x)|^p \leq C(p, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^p(u; \rho) d\rho, \quad |x| = 3/4.$$

Затем применим неравенство Гельдера с индексами $\frac{q}{p}$ и $\left(\frac{q}{p}\right)'$,

$$|u(x)|^p \leq C(p, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, q, n) \left(\int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{p/q}.$$

Следовательно, для любой точки x , $|x| = 3/4$, получаем

$$\begin{aligned} |u(x)|^q &\leq C(p, q, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u; \rho) d\rho \leq C(p, q, \alpha, n) \int_{5/8}^{7/8} (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho \leq \\ &\leq C(p, q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Отсюда, используя принцип максимума для субгармонической функции $|u|$,

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho &\leq C(q, \alpha) \sup_{0 < r < 1/2} M_p^q(u; \rho) \leq C(q, \alpha) \sup_{|x| < 1/2} |u(x)|^q \leq \\ &\leq C(q, \alpha) \sup_{|x| < 3/4} |u(x)|^q = C(q, \alpha) \max_{|x| = 3/4} |u(x)|^q \leq \\ (2.4) \quad &\leq C(p, q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Случай $0 < q \leq p < 1$. Вновь воспользуемся неравенством (2.3), но с заменой p на q ,

$$|u(x)|^q \leq C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} M_q^q(u; \rho) d\rho, \quad |x| = 3/4.$$

Применим неравенство Гельдера с индексами $\frac{p}{q}$ и $\left(\frac{p}{q}\right)'$,

$$\begin{aligned} |u(x)|^q &\leq C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} \int_S |u(\rho\xi)|^q d\sigma(\xi) d\rho \leq C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} \left(\int_S |u(\rho\xi)|^p d\sigma(\xi) \right)^{q/p} d\rho = \\ &= C(q, n) \int_{5/8}^{7/8} M_p^q(u; \rho) d\rho \leq C(q, \alpha, n) \int_{1/2}^1 (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства выполняется как в (2.4). $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1

Ввиду Леммы 2.5 все неравенства с нормами и квазинормами достаточно доказать вне некоторой окрестности начала координат.

Доказательства вложений (i) и (ii) очевидны. Вложение (ii) очевидно ввиду монотонного возрастания средних $M_p(u; r)$ по p .

(iii) Доказательство вложения начнем со случая $q_0 = \infty$, т.е. $h(p, q, \alpha) \subset h(p, \infty, \alpha)$.

Заметим, что при $1 \leq p \leq \infty$ интегральные средние $M_p(u; r)$ возрастают по r .

Доказательство вложения $h(p, q, \alpha) \subset h(p, \infty, \alpha)$ в этом случае элементарно:

$$\|u\|_{p,q,\alpha}^q \geq \int_p^1 (1-r)^{\alpha q-1} M_p^q(u; r) dr \geq C(\alpha, q) M_p^q(u; \rho) (1-\rho)^{\alpha q}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Положим $0 < p < 1$. Достаточно доказать неравенство

$$\sup_{1/3 < r < 1} (1-r)^\alpha M_p(u; r) \leq C(p, q, \alpha, n) \|u\|_{p,q,\alpha}.$$

Зафиксируем точку x , $\frac{1}{3} < |x| < 1$. Как и в доказательстве Леммы 2.2 неравенство Фейффермана-Стейна [15] для шара B_x (2.1), а также Лемма 2.1 приводят к

$$(3.1) \quad |u(x)|^p \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^n} \int_{B_x} |u(y)|^p dy \leq C(p, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} \frac{|u(y)|^p}{|\xi - \rho x|^n} dy.$$

Интегрирование и оценка Леммы 2.4 с тождеством $|\xi - \rho r \zeta| = |\zeta - \rho r \xi|$ влекут

$$\begin{aligned} M_p^p(u; r) &\leq C(p, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} |u(y)|^p \left(\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|\xi - \rho r \zeta|^n} \right) dy \leq \\ &\leq C(p, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} \frac{|u(y)|^p}{1-\rho r} dy \leq \frac{C(p, n)}{1-r} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho. \end{aligned}$$

Случай $p < q < \infty$. По неравенству Гельдера с индексами $\frac{q}{p}$ и $\left(\frac{q}{p}\right)' = \frac{1}{1-p/q}$,

$$(1-r) M_p^p(u; r) \leq C(p, n) \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq C(p, n) \left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{p/q} (\rho'' - \rho')^{1-p/q}.$$

Отсюда

$$M_p(u; r) \leq \frac{C(p, n)}{(1-r)^{1/q}} \left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{1/q}, \quad \frac{1}{3} < r < 1.$$

Поскольку $\frac{1}{2}(1-r) < 1-\rho < \frac{3}{2}(1-r)$, то

$$M_p(u; r) \leq \frac{C(p, q, \alpha, n)}{(1-r)^{1/q}(1-r)^{(\alpha q-1)/q}} \left(\int_{\rho'}^{\rho''} (1-\rho)^{\alpha q-1} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{1/q} \leq \frac{C\|u\|_{p,q,\alpha}}{(1-r)^\alpha},$$

что и требовалось показать.

Случай $q \leq p < 1$. Запишем неравенство (3.1) с q вместо p ,

$$|u(x)|^q \leq C(q, n) \int_{\rho' < |y| < \rho''} \frac{|u(y)|^q}{|\xi - \rho x|^n} dy.$$

Заменяем x на Qx , где Q — произвольное ортогональное линейное преобразование

$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, т.е. $|Qx| = |x|$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Вспомним, что поверхностная

мера σ инвариантна при вращениях, что значит $\sigma(Q(G)) = \sigma(G)$ для каждого борелевского множества $G \subset S$ и каждого ортогонального преобразования Q .

Получаем

$$|u(Qx)|^q \leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} \int_S \frac{|u(\rho\xi)|^q}{|\xi - \rho Qx|^n} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi).$$

Произведя в интеграле замену $\xi \mapsto Q\xi$, получим

$$|u(Qx)|^q \leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} \int_S \frac{|u(\rho Q\xi)|^q}{|\xi - \rho x|^n} \rho^{n-1} d\rho d\sigma(\xi).$$

Применяя неравенство Минковского с индексом $\frac{q}{q-1} \geq 1$ и тождество с интегралом по ортогональной группе

$$M_p(F; |z|) = \left(\int |F(Qz)|^p dQ \right)^{1/p}, \quad z \in B,$$

находим, используя также оценки Леммы 2.4,

$$\begin{aligned} M_p^q(u; r) &\leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) \int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|\xi - \rho x|^n} d\rho \leq \\ &\leq C(q, n) \int_{\rho'}^{\rho''} \frac{M_p^q(u; \rho)}{1 - \rho r} d\rho \leq \frac{C(q, n)}{1 - r} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) d\rho, \quad \frac{1}{3} < r < 1. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{2}(1 - r) < 1 - \rho < \frac{3}{2}(1 - r)$, то как и в предыдущем случае получаем

$$(3.2) \quad (1 - r)^\alpha M_p(u; r) \leq C \left(\int_{\rho'}^{\rho''} (1 - \rho)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; \rho) d\rho \right)^{1/q} \leq C \|u\|_{p, q, \alpha}.$$

Вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(p, \infty, \alpha)$ полностью доказано. Теперь общий случай $0 < q < q_0 < \infty$ с конечным q_0 сводится к доказанному простой оценкой:

$$\|u\|_{p, q_0, \alpha}^{q_0} \leq \|u\|_{p, \infty, \alpha}^{q_0 - q} \|u\|_{p, q, \alpha}^q \leq C \|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0 - q} \|u\|_{p, q, \alpha}^q = C \|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0}.$$

(iv) Вначале докажем случай $p_0 = \infty$, т.е. вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q, \alpha + \frac{n-1}{p})$.

В случае $0 < p < q < \infty$, как и в Лемме 2.2 и (iii) имеем неравенство

$$M_\infty^p(u; r) \leq \frac{C(p, n)}{(1 - r)^n} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) d\rho \leq \frac{C(p, n)}{(1 - r)^{n-1}} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) \frac{d\rho}{1 - \rho},$$

По неравенству Гельдера с индексами q/p и $(q/p)'$

$$\begin{aligned} M_\infty^q(u; r) &\leq \frac{C(p, q, n)}{(1 - r)^{(n-1)q/p}} \left(\int_{\rho'}^{\rho''} M_p^p(u; \rho) \frac{d\rho}{1 - \rho} \right)^{q/p} \leq \\ &\leq \frac{C(p, q, n)}{(1 - r)^{(n-1)q/p}} \int_{\rho'}^{\rho''} M_p^q(u; \rho) \frac{d\rho}{1 - \rho}. \end{aligned}$$

Проинтегрируем с весом и затем применим теорему Фубини

$$\begin{aligned}\|u\|_{\infty, q, \alpha + (n-1)/p}^q &= \int_0^1 (1-r)^{(\alpha + \frac{n-1}{p})q-1} M_{\infty}^q(u; r) dr \leq \\ &\leq C(p, q, n) \int_0^1 (1-r)^{\alpha q-1} \left(\int_{r'}^{r''} M_p^q(u; \rho) \frac{d\rho}{1-\rho} \right) dr = \\ &= C(p, q, n) \int_0^1 M_p^q(u; \rho) \left(\int_{2\rho-1}^{(2\rho+1)/3} (1-r)^{\alpha q-1} dr \right) \frac{d\rho}{1-\rho} = \\ &= C(p, q, \alpha, n) \|u\|_{p, q, \alpha}^q.\end{aligned}$$

В случае $0 < p < q = \infty$ доказательство опускаем, поскольку оно проще и схоже с тем, что в Лемме 2.2.

В случае $0 < q \leq p \leq \infty$ доказательство аналогично. Вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q, \alpha + \frac{n-1}{p})$ доказано. Итак, искомое вложение

$$h(p, q, \alpha) \subset h\left(p_0, q, \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right), \quad 0 < p \leq p_0 \leq \infty,$$

доказано в крайнем случае $p_0 = \infty$, а для $p_0 = p$ — очевидно. Согласно версии интерполяционной теоремы Рисса–Торина для квазинормированных пространств (см. [17], [18], [19]), отсюда получаем справедливость искомого вложения для всех $0 < p \leq p_0 \leq \infty$.

(v) Вложение $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, q_0, \beta)$, $\beta > \alpha + \frac{n-1}{p}$, $0 < q_0 \leq \infty$, вытекает из вложения $h(p, q, \alpha) \subset h(\infty, \infty, \alpha + \frac{n-1}{p})$ и оценки

$$|u(x)| \leq C(p, q, \alpha, n) \frac{\|u\|_{p, q, \alpha}}{(1-r)^{\alpha + \frac{n-1}{p}}}, \quad x = r\zeta \in B.$$

Действительно, при $0 < q_0 < \infty$ по Лемме 2.4 будем иметь

$$\begin{aligned}\|u\|_{\infty, q_0, \beta}^{q_0} &= \int_0^1 (1-r)^{\beta q_0-1} M_{\infty}^{q_0}(u; r) dr \leq \\ &\leq C\|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0} \int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q_0-1}}{(1-r)^{\alpha q_0 + (n-1)q_0/p}} dr \leq C(p, q, \alpha, \beta, q_0, n) \|u\|_{p, q, \alpha}^{q_0}.\end{aligned}$$

(vi) Вложение (vi) достаточно доказать для наиболее широкого класса $h(p, \infty, \alpha)$, т.е. докажем

$$h(p, \infty, \alpha) \subset h(p, q_0, \beta), \quad \beta > \alpha, \quad 0 < q_0 \leq \infty,$$

Положим $0 < q_0 < \infty$, воспользуемся вложением (iii) и Леммой 2.4,

$$\begin{aligned} \|u\|_{p, q_0, \beta}^{q_0} &= \int_0^1 (1-r)^{\beta q_0 - 1} M_p^{q_0}(u; r) dr \leq \\ &\leq C \|u\|_{p, \infty, \alpha}^{q_0} \int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q_0 - 1}}{(1-r)^{\alpha q_0}} dr \leq C(p, \alpha, \beta, q_0, n) \|u\|_{p, \infty, \alpha}^{q_0}. \end{aligned}$$

(vii) Вложение (vii) доказано в Лемме 2.3.

(viii) В силу вложения (iii) вложение (viii) достаточно доказать для $q = p$ (т.е. для наиболее узкого класса), именно

$$(3.3) \quad h^p \subset h \left(p_0, p, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0} \right), \quad 1 < p < p_0 \leq \infty.$$

Кроме того, случай $p_0 = \infty$ вытекает из остальных случаев с конечным $p_0 < \infty$, поскольку в силу вложения (iv)

$$h^p \subset h \left(p_0, p, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0} \right) \subset h \left(\infty, p, \frac{n-1}{p} \right).$$

Таким образом, остается доказать вложение (3.3) для конечных $1 < p < p_0 < \infty$.

Воспользуемся методом из [5]. Введем оператор T и меру ν ,

$$Tu(r) := (1-r)^{-(n-1)/p_0} M_{p_0}(u; r), \quad d\nu(r) := (n-1)(1-r)^{n-2} dr.$$

Поскольку $T(u_1 + u_2)(r) \leq T(u_1)(r) + T(u_2)(r)$, то T — сублинейный оператор. Согласно Лемме 2.3 найдется положительная постоянная $C_0 = C_0(p, p_0, n)$ такая, что

$$Tu(r) = (1-r)^{-(n-1)/p_0} M_{p_0}(u; r) \leq C_0 (1-r)^{-(n-1)/p} \|u\|_{h^p}, \quad 0 < r < 1.$$

Отсюда для любого фиксированного $s > 0$ получим

$$\begin{aligned} \{0 < r < 1; Tu(r) > s\} &\subset \{0 < r < 1; C_0 (1-r)^{-(n-1)/p} \|u\|_{h^p} > s\} = \\ &= \left\{0 < r < 1; 1 - \left(C_0 s^{-1} \|u\|_{h^p}\right)^{p/(n-1)} < r\right\} \subset (\lambda, 1), \end{aligned}$$

где $\lambda = \max \left\{0; 1 - \left(C_0 s^{-1} \|u\|_{h^p}\right)^{p/(n-1)}\right\}$. Ясно, что при малых $s > 0$ имеем $\lambda = 0$, а при всех достаточно больших $s > 0$ получаем

$$\nu(\{0 < r < 1; Tu(r) > s\}) \leq \nu(\lambda, 1) = C_0^p s^{-p} \|u\|_{h^p}^p.$$

Это означает, что функция $Tu(r)$ принадлежит слабому пространству $L_{weak}^p(d\nu)$, т.е. T — оператор слабого типа (p, p) для всех $1 < p < \infty$. По интерполяционной

теореме Марцинкевича (см., например, [18], [19]) T — оператор сильного типа (p, p) для всех $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned} C\|u\|_{h^p}^p &\geq \|Tu\|_{L^p(d\nu)}^p = (n-1) \int_0^1 |Tu(r)|^p (1-r)^{n-2} dr = \\ &= (n-1) \int_0^1 (1-r)^{p(n-1)(1/p-1/p_0)-1} M_{p_0}^p(u; r) dr = (n-1) \|u\|_{p_0, p, (n-1)(1/p-1/p_0)}^p, \end{aligned}$$

что завершает доказательство вложения (viii). В качестве дополнения отметим, что в предельном случае $p = 1$ вложение (viii)

$$h^1 \subset h(p_0, 1, (n-1)(1-1/p_0)), \quad 1 < p_0 \leq \infty,$$

ложно. Соответствующим контрпримером служит ядро Пуассона.

(ix) Вложение (ix) есть комбинация вложений (vi) и (iv). Действительно, для любого $\alpha > 0$ имеем

$$h^p \subset h(p, q, \alpha) \subset h\left(p_0, q, \alpha + \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0}\right).$$

(x) Утверждение (x) немедленно получается из неравенства (3.2), если устремить $r \rightarrow 1^-$.

Теорема 1.1 полностью доказана.

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ 1.1

Рассмотрим гармонические векторы $U = (u_1, \dots, u_n)$ в шаре B , где $u_j(x) \in h(B)$ являются градиентами некоторой гармонической функции.

Обозначим через $\mathcal{H}(B)$ множество систем Рисса в шаре B , т.е. класс гармонических векторов $U = (u_1, \dots, u_n)$ в B , для каждого из которых найдется некоторая функция $h(x) \in h(B)$ такая, что $U = \nabla h$ в B .

Классы Харди, состоящие из вектор-функций $U \in \mathcal{H}(B)$, обозначим через $\mathcal{H}^p(B)$. Если же для вектор-функции $U \in \mathcal{H}(B)$ конечна смешанная "норма" $\|U\|_{p, q, \alpha} < +\infty$, то будем писать $U \in \mathcal{H}(p, q, \alpha)$.

Определим класс $S^p = S^p(B)$ субгармонических функций $w(x)$ в шаре B , удовлетворяющих условию Харди

$$\|w\|_{S^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\int_S |w(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p} < +\infty, \quad 0 < p < \infty.$$

Как показал контрпример ядра Пуассона, вложение (viii) Теоремы 1.1 для гармонических функций нельзя распространить на $p = 1$. Между тем, вложение (viii) Теоремы 1.1 справедливо при всех $0 < p < \infty$ для голоморфных функций в единичном круге, см. [1], [3, Теор.5.11], также как и для голоморфных функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$, см. [13].

Введенные выше системы Рисса $U \in \mathcal{H}(B)$ в $\mathbb{R}^n$ в некоторой степени замещают голоморфные функции на $\mathbb{R}^2$. Для систем Рисса доказанные в Теореме 1.1 вложения в некоторых случаях имеют более широкие области допустимых значений параметров.

Следствие 4.1. При $\frac{n-2}{n-1} < p < p_0 \leq \infty$, $p \leq q \leq \infty$ имеет место непрерывное вложение

$$\mathcal{H}^p \subset \mathcal{H} \left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0} \right).$$

Доказательство. Случай $p > 1$ вытекает из такого же вложения (viii) для скалярнозначных гармонических функций. Положим $\frac{n-2}{n-1} < p = q \leq 1$ и пусть $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{H}^p(B)$. Обозначим $\lambda = \lambda_n := \frac{n-2}{n-1}$. Тогда согласно результату Стейна и Вейса ([18], [19]) $W := |U|^\lambda$ и $W^{p/\lambda} = |U|^p$ являются субгармоническими функциями. Отсюда

$$M_{p/\lambda}^{p/\lambda}(W; r) = M_p^p(U; r), \quad M_{p_0/\lambda}^{1/\lambda}(W; r) = M_{p_0}(U; r), \quad p_0 > \lambda.$$

Поскольку W – субгармоническая функция класса Харди $S^{p/\lambda}$, то W имеет гармоническую мажоранту $v(x) \in h^{p/\lambda}$ в B с эквивалентными нормами Харди (см. [4]):

$$W(x) \leq v(x), \quad x \in B, \quad \|v\|_{h^{p/\lambda}} \leq \|W\|_{S^{p/\lambda}}.$$

Отсюда, обозначая $p_1 = \frac{p}{\lambda} > 1$, $p_{01} = \frac{p_0}{\lambda} > 1$, используя уже доказанный случай, выведем

$$\begin{aligned} \|U\|_{p_0, p_1, (n-1)/p - (n-1)/p_0}^p &= \int_0^1 (1-r)^{p(n-1)(1/p-1/p_0)-1} M_{p_0}^p(U; r) dr = \\ &= \int_0^1 (1-r)^{p_1(n-1)(1/p_1-1/p_{01})-1} M_{p_{01}}^{p_1}(W; r) dr = \\ &= \|W\|_{p_{01}, p_1, (n-1)/p - (n-1)/p_0}^{p_1} \leq \|v\|_{p_{01}, p_1, (n-1)/p - (n-1)/p_0}^{p_1} \leq \\ &\leq \|v\|_{h^{p_1}}^{p_1} \leq C \|W\|_{S^{p_1}}^{p_1} = C \|U\|_{\mathcal{H}^p}^p. \end{aligned}$$

□

Системы Рисса можно обобщить следующим образом. Для некоторой достаточно гладкой функции $v(x)$ ее градиент $\nabla^m v$ порядка $m \in \mathbb{N}$ определяется как вектор-функция, компоненты которой частные производные $\partial^\gamma v$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, порядка $|\gamma| = m$ в некотором фиксированном порядке. Обозначим через $\mathcal{H}_m(B)$, $m \in \mathbb{N}$, класс гармонических векторов $U = (u_1, \dots, u_n)$ в шаре B , для каждого из которых найдется некоторая функция $h(x) \in h(B)$ такая, что $U = \nabla^m h$ в B . Пространства Харди и со смешанной нормой, состоящие из функций $U \in \mathcal{H}_m(B)$, будем обозначать через $\mathcal{H}_m^p$ и $\mathcal{H}_m(p, q, \alpha)$, соответственно.

Следствие 4.2. При $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n-2}{m+n-2} < p < p_0 \leq \infty$, $p \leq q \leq \infty$ имеет место непрерывное вложение

$$\mathcal{H}_m^p \subset \mathcal{H}_m \left(p_0, q, \frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{p_0} \right).$$

Доказательство. выводится вполне аналогичным образом как в Следствии 4.1. Нужно лишь вместо λ_n определить $\lambda = \lambda_{m,n} := \frac{n-2}{m+n-2}$ и воспользоваться субгармоничностью функции $|U|^\lambda$, $U \in \mathcal{H}_m(B)$, согласно результату Кальдерона и Зигмунда [20]. □

Вложение (viii) в частном случае $p_0 = \infty$, $1 < p = q < \infty$ приводит к усиленному варианту известного неравенства Фейера–Рисса.

Следствие 4.3. Если $1 < p < \infty$, то для всех $u(x) \in h(B)$

$$(4.1) \quad \int_0^1 (1-r)^{n-2} \sup_{\zeta \in S} |u(r\zeta)|^p dr \leq C(p, n) \|u\|_{h^p}^p,$$

или в терминах вложения $h^p \subset h \left(\infty, p, \frac{n-1}{p} \right)$.

Классическое неравенство Фейера–Рисса можно найти, например, в монографии [3], а его некоторые отличные от (4.1) версии в шаре B — в статьях [21], [22], [8], [9]. Кроме того, результат Следствия 4.3 отвечает на вопрос Стевича [9, с.209].

Хотя в предельном случае $p = 1$ Следствие 4.3 ложно ввиду примера ядра Пуассона, тем не менее, как следует из Следствий 4.1 и 4.2, для систем Рисса и

более специальных гармонических векторов неравенство (4.1) оказывается верным и для некоторых $p \leq 1$.

Следствие 4.4. Если $\frac{n-2}{n-1} < p < \infty$, то для всех $U \in \mathcal{H}(B)$

$$(4.2) \quad \int_0^1 (1-r)^{n-2} \sup_{\zeta \in S} |U(r\zeta)|^p dr \leq C(p, n) \|U\|_{\mathcal{H}^p}^p,$$

или в терминах вложения $\mathcal{H}^p \subset \mathcal{H}(\infty, p, \frac{n-1}{p})$.

Следствие 4.5. Если $m \in \mathbb{N}$, $\frac{n-2}{m+n-2} < p < \infty$, то для всех $U \in \mathcal{H}_m(B)$ справедливо неравенство (4.2) и соответствующее вложение $\mathcal{H}_m^p \subset \mathcal{H}_m(\infty, p, \frac{n-1}{p})$.

Наиболее примечательной разницей между пространствами $h(p, q, \alpha)$ в $\mathbb{R}^n$ и такими же пространствами голоморфных функций в единичном круге является тот факт, что при некоторых $\alpha \leq 0$, $0 < p < 1$ гармонические пространства $h(p, q, \alpha)$ нетривиальны, т.е. содержат ненулевые функции. Это явление обсуждалось в [14], [13].

Нашей следующей задачей будет нахождение точных условий на индексы, при которых пространства $h(p, q, \alpha)$ тривиальны. Заметим, что хорошим примером нетривиальной функции пространства $h(p, q, \alpha)$ при подходящих $\alpha \leq 0$, $0 < p < 1$ является ядро Пуассона $P(x) = P(x, \xi) = \frac{1-|x|^2}{|\xi-x|^n}$, $x \in B$, $\xi \in S$. В следующей лемме найдены точные условия принадлежности ядра Пуассона пространствам $h(p, q, \alpha)$.

Лемма 4.1. При $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:

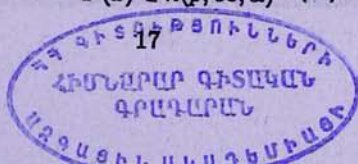
$$(a) \quad \text{Если } 0 < p < \frac{n-1}{n}, \text{ то } P(x) \in h(p, q, \alpha) \iff \alpha > -1;$$

$$P(x) \in h(p, \infty, \alpha) \iff \alpha \geq -1;$$

$$P(x) \in h_0(p, \infty, \alpha) \iff \alpha > -1;$$

$$(b) \quad \text{Если } \frac{n-1}{n} < p \leq \infty, \text{ то } P(x) \in h(p, q, \alpha) \iff \alpha > (n-1)(1-1/p);$$

$$P(x) \in h(p, \infty, \alpha) \iff \alpha \geq (n-1)(1-1/p);$$



$$\begin{aligned}
 P(x) \in h_0(p, \infty, \alpha) &\iff \alpha > (n-1)(1-1/p); \\
 (c) \text{ Если } p = \frac{n-1}{n}, \text{ то } P(x) \in h(p, q, \alpha) &\iff \alpha > -1; \\
 P(x) \in h(p, \infty, \alpha) &\iff \alpha > -1; \\
 P(x) \in h_0(p, \infty, \alpha) &\iff \alpha > -1.
 \end{aligned}$$

Доказательство. следует из Леммы 2.4 и точных оценок ядра Пуассона

$$M_p(P; r) \approx \begin{cases} 1-r, & \text{при } 0 < p < \frac{n-1}{n}, \\ (1-r)^{-(n-1)(1-1/p)}, & \text{при } \frac{n-1}{n} < p \leq \infty, \\ (1-r) \left(\log \frac{e}{1-r} \right)^{1/p}, & \text{при } p = \frac{n-1}{n}, \end{cases} \quad 0 \leq r < 1.$$

□

В следующей теореме выявлены точные условия тривиальности пространств $h(p, q, \alpha)$, т.е. когда они состоят только из нулевой функции.

Теорема 4.1. *Имеют место следующие утверждения:*

- Если $1 \leq p \leq \infty$, $0 < q < \infty$, то $h(p, q, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq 0$;
- Если $1 \leq p \leq \infty$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha < 0$;
- Если $1 \leq p \leq \infty$, то $h_0(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq 0$;
- Если $0 < p < \frac{n-1}{n}$, $0 < q < \infty$, то $h(p, q, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq -1$;
- Если $0 < p < \frac{n-1}{n}$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha < -1$;
- Если $0 < p < \frac{n-1}{n}$, то $h_0(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq -1$;
- Если $\frac{n-1}{n} \leq p < 1$, $0 < q < \infty$, то $h(p, q, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq (n-1)(1-1/p)$;
- Если $\frac{n-1}{n} < p < 1$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha < (n-1)(1-1/p)$;
- Если $\frac{n-1}{n} \leq p < 1$, то $h_0(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq (n-1)(1-1/p)$;
- Если $p = \frac{n-1}{n}$, то $h(p, \infty, \alpha) = \{0\} \iff \alpha \leq -1$.

Доказательство. При $1 \leq p \leq \infty$ результат следует из монотонности интегральных средних $M_p(u; r)$ по r . Утверждения для классов $h_0(p, \infty, \alpha)$ доказаны в Теореме 2.11 из [14]. В остальных случаях $0 < p < 1$, воспользовавшись вложениями

(iii), (vi), (x) Теоремы 1 $h(p, q, \alpha) \subset h_0(p, \infty, \alpha)$, доказательство сводим к [14] и Лемме 4.1. $\square$

Основные результаты настоящей статьи докладывались на международной конференции Harmonic Analysis and Approximations, V, 2011, Tsaghkadzor, Armenia, посвященной 75-летию академика Н. У. Аракеяна.

Abstract. In this paper continuous embeddings in harmonic mixed norm spaces on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ are established, generalizing some Hardy-Littlewood embeddings for similar spaces of holomorphic functions in the unit disc. Differences in indices between the spaces of harmonic and holomorphic spaces are revealed. As a consequence an analogue of classical Fejér-Riesz inequality is obtained. Embeddings in the special case of Riesz systems are also established.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals (II)", *Math. Z.*, **34**, 403 – 439 (1932).
- [2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", *Quart. J. Math. (Oxford)*, **12**, 221 – 256 (1941).
- [3] P. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, London (1970).
- [4] T. M. Flett, "Inequalities for the p th mean values of harmonic and subharmonic functions with $p \leq 1$ ", *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 249 – 275 (1970).
- [5] T. M. Flett, "On the rate of growth of mean values of holomorphic and harmonic functions", *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 749 – 768 (1970).
- [6] M. Pavlović, "Decompositions of L^p and Hardy spaces of polyharmonic functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **216**, 499 – 509 (1997).
- [7] M. Jevtić and M. Pavlović, "Harmonic Bergman functions on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ ", *Acta Math. Hungar.*, **85**, 81 – 96 (1999).
- [8] S. Stević, "On harmonic Hardy spaces and area integrals", *J. Math. Soc. Japan*, **56**, 339 – 347 (2004).
- [9] S. Stević, "On harmonic function spaces. II", *J. Comput. Anal. Appl.*, **10**, 205 – 228 (2008).
- [10] A. I. Petrosyan, "On weighted classes of harmonic functions in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", *Complex Variables Theory Appl.*, **50**, 953 – 966 (2005).
- [11] A. I. Petrosyan, "On weighted harmonic Bergman spaces", *Demonstratio Math.*, **41**, 73 – 83 (2008).
- [12] K. Avetisyan, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n -harmonic mixed norm spaces on the polydisc", *J. Math. Anal. Appl.*, **291**, 727 – 740 (2004).
- [13] K. Avetisyan, "Weighted integrals and Bloch spaces of n -harmonic functions on the polydisc", *Potential Analysis*, **29**, 49 – 63 (2008).
- [14] A. B. Aleksandrov, "On boundary decay in the mean of harmonic functions", *St. Petersburg Math. J.*, **7**, 507 – 542 (1996).
- [15] C. Fefferman and E. M. Stein, " H^p spaces of several variables", *Acta Math.*, **129**, 137 – 193 (1972).
- [16] C. W. Liu and J. H. Shi, "Invariant mean-value property and $\mathcal{M}$ -harmonicity in the unit ball of $\mathbb{R}^n$ ", *Acta Math. Sinica*, **19**, 187 – 200 (2003).
- [17] T. Holmstedt, "Interpolation of quasi-normed spaces", *Math. Scand.*, **26**, 177 – 199 (1970).

- [18] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1970).
- [19] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey (1971).
- [20] A. P. Calderon and A. Zygmund, "On higher gradients of harmonic functions", *Studia Math.*, **24**, 211 – 226 (1964).
- [21] N. Du Plessis, "Spherical Fejér-Riesz theorems", *J. London Math. Soc.*, **31**, 386 – 391 (1956).
- [22] Y. Sagher, "On the Fejér-F. Riesz inequality in L^p ", *Studia Math.*, **61**, 269 – 278 (1977).

Поступила 20 декабря 2011