Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 5, 2012, стр. 49-64.

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ И СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ПО ПОЛИЭДРАМ

О. И. КУЗНЕЦОВА

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк
E-mail: *kuznets@iamm.ac.donetsk.ua*

Аннотация. Данная статья есть обзор результатов о сильных полиэдральных средних рядов Фурье непрерывных на m-мерном торе функций, неравенствах типа неравенства Сидона для ядер Дирихле по полиэдрам, об интегрируемости и сходимости кратных тригонометрических рядов.

MSC2010 number: 42A20, 42A32, 26D15

Ключевые слова: Сильная суммируемость; тригонометрический ряд.

1. Введение

Пусть функция $f \in L(T^m)$, $T^m = [-\pi, \pi)^m$, $\|f\|_L = \int_{T^m} |f(u)|\, du < \infty$. Определим ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{k\in Z^m} \hat{f}(k)\, e^{ikx}, \quad kx = k_1x_1 + \ldots + k_mx_m, \tag{1.1}$$

с коэффициентами Фурье

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m} \int_{T^m} f(u)\, e^{-iku} du,$$

где Z^m – целочисленная решетка в R^m. В отличие от одномерного, в кратном случае нет канонического способа задания частичной суммы ряда (1.1). Пусть V – замкнутая ограниченная область в R^m, содержащая начало координат O внутри себя.

Полагаем для $n > 0$

$$S_{nV} f(x) = \sum_{k\in nV\bigcap Z^m} \hat{f}(k)\, e^{ikx},$$

где $nV = \{x \in R^m : x/n \in V\}$ – гомотет V. Сумму ряда (1.1) естественно определить как предел, если он существует, при $n \to \infty$ частичных сумм $S_{nV}f$. Заметим, что

$$S_{nV}f = (2\pi)^{-m} f * D_{nV}$$

– свертка функции f и ядра Дирихле порядка n

$$D_{nV}(x) = \sum_{k \in nV \bigcap Z^m} e^{-ikx},$$

соответствующего множеству V.

В дальнейшем V – замкнутый ограниченный полиэдр в R^m, звездный относительно начала координат O, $O \in int\ V$, и такой, что продолжение любой его грани не проходит через O. Множество полиэдров с указанными свойствами обозначим через W. Достаточные условия регулярности линейных методов суммирования в $C(T^m)$ по полиэдрам множества W изучены в [1], причем показано, что все условия в определении W являются необходимыми.

В данной статье исследуется поведение различных вариантов сильных полиэдральных средних рядов Фурье непрерывных на m-мерном торе функций. Приведены неулучшаемые неравенства типа неравенства Сидона для ядер Дирихле D_{nV}. Дается применение полученных результатов к вопросам интегрирования и сходимости m-кратных тригонометрических рядов.

2. Сильная суммируемость

Пусть W_b – подмножество множества W, определенное следующим образом. Набор действительных чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ "плохо" приближаем (рациональными числами), если неравенство

$$\|\alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_m k_m\| < a^{-m-1}, \quad a = \max_{1 \le i \le m} |k_i|, \tag{2.1}$$

имеет не более конечного числа решений в целых числах $k_1, \ldots, k_m$ (здесь $\|x\|$ – расстояние от x до ближайшего целого).

Полиэдр V принадлежит множеству W_b, если коэффициенты в уравнениях гиперплоскостей

$$\sum \alpha_i x_i - 1 = 0,$$

его определяющих, образуют наборы "плохо" приближаемых чисел. Заметим, что множество наборов α, для которых неравенство (2.1) имеет бесконечно много решений в целых числах, есть множество нулевой меры Лебега в R^m ([2], с. 36), т.е. почти все наборы α "плохо" приближаемы.

Полиэдры из множества W_b обладают следующим свойством.

Лемма 2.1. *([6]) Для любого полиэдра $V \in W_b$ существует постоянная $d = d(V) > 0$ такая, что множества*

$$\left(n + dn^{-m-1}\right) V \setminus nV, \quad n \in N,$$

не содержат точек решетки Z^m.

W_a – подмножество полиэдров из W_b, для которых α — наборы алгебраических чисел.

В однократном случае отрезка классическим является результат Харди - Литтлвуда [3] о p-сильном суммировании ряда Фурье непрерывной периодической с периодом 2π функции: при любом $p > 0$ равномерно по $x \in T$

$$\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} |f(x) - S_j f(x)|^p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

При $m = 2, 3, \ldots$ для прямоугольных частичных сумм Фурье (V – параллелепипед, симметричный относительно O, с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и вершинами в точках решетки Z^m) аналогичный результат получил Л.Д. Гоголадзе ([4]-кубы, [5]).

При $m = 1, 2, \ldots$ для частичных сумм $S_{nV} f$, $V \in W_b$, справедлив следующий результат.

Теорема 2.1. *([6]) Пусть полиэдр $V \in W_b$, $f \in L_\infty(T^m)$, $p > 0$. Тогда*

$$(n+1)^{-1} \sum_{j=0}^{n} |S_{jV}(f, 0)|^p \le c^p (p+1)^{mp} \|f\|_\infty^p, \tag{2.2}$$

где величина $c > 0$ зависит лишь от размерности m и полиэдра V.

При доказательстве теоремы 2.1 существенно используется следующий результат А. Н. Подкорытова [1]. Пусть V – полиэдр, звездный относительно начала координат, являющегося его внутренней точкой. Определим масштабную функцию множества V

$$\rho(y) = \rho_V(y) = \inf\{\rho > 0 \mid y \in \rho V\}.$$

Пусть функция $\lambda \in C([0, +\infty))$, $\lambda(0) = 1$, $\lambda(t) = 0$ при $t \geq 1$. Построим линейные средние

$$\sigma_n^{(\lambda)}(f, x) = \sum_{k \in nV} \lambda\left(\frac{\rho(k)}{n}\right) c_k(f) e^{-ikx}.$$

Обозначим $\hat{d\lambda}(r) = \int_0^1 e^{-irt} d\lambda(t)$.

Теорема А. ([1]) *Пусть V — полиэдр, звездный относительно начала координат, которое является его внутренней точкой, и функция λ непрерывна на $[0, +\infty)$, $\lambda(0) = 1$, $\lambda(t) = 0\ \forall\, t \geq 1$. Тогда:*

1. *Если продолжение хотя бы одной грани полиэдра V проходит через начало координат, то $\sup\limits_n |\sigma_n^{(\lambda)}| = \infty$, и, следовательно, найдется функция $f \in C(T^m)$, такая что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\sigma_n^{(\lambda)}(f, 0)| = \infty$.*

2. *Если продолжения всех граней полиэдра V не проходят через начало координат, то из сходимости интеграла*

$$F_m(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{d\lambda}(r)| \frac{\ln^{m-1}(2 + |r|)}{1 + |r|} dr$$

вытекает ограниченность $\|\sigma_n^{(\lambda)}\|$ в совокупности, т.е. $\sup\limits_n \|\sigma_n^{(\lambda)}\| \leq c(m, V) F_m(\lambda)$, *и следовательно, $\sigma_n^{(\lambda)}(f) \to f$ при $n \to \infty$ для любой $f \in C(T^m)$.*

Пусть Q – множество функций φ, определенных на полуоси $[0, \infty)$, неубывающих и непрерывных в нуле, $\varphi(0) = 0$. Для $f \in C(T^m)$ и $V \in W_b$ полагаем

$$h_n(f, \varphi, V, x) = (n+1)^{-1} \sum_{l=0}^{n} \varphi(|f(x) - S_{lV} f(x)|).$$

Легко показать (см., например, [7]), что если φ, $\psi \in Q$ и

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \frac{\psi(u)}{\varphi(u)} < \infty,$$

то из равенства

$$\lim_{n\to\infty} h_n(f, \varphi, V, x) = 0, \tag{2.3}$$

выполняемого в некоторой точке $x_0 \in T^m$ или равномерно на множестве $E \subset T^m$, вытекает справедливость аналогичного равенства для функции ψ, соответственно в точке x_0 или равномерно на E.

При $m = 1$, $V = [-1, 1]$, $\varphi(t) = e^{at} - 1$, $a > 0$, равенство (2.3) доказано Карлеманом [8] равномерно на T. Тотик [9] показал, что для того, чтобы (2.3) выполнялось для любой $f \in C(T)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $A > 0$, такая, что

$$\varphi(t) \le e^{At}, \quad t \in (0, \infty).$$

Теорема 2.2. *([6], [10]) Пусть полиэдр $V \in W_b$*

(1) *Если $\varphi \in Q$ такова, что*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \varphi(u)\, u^{-1/m} < \infty,$$

то для любой $f \in C(T^m)$ равномерно по x справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} h_n(f, \exp(\varphi) - 1, V, x) = 0.$$

(2) *Если же*

$$\overline{\lim_{u\to\infty}} \varphi(u)\, u^{-1/m} = \infty,$$

то существует функция $F \in C(T^m)$, для которой

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} h_n(F, \exp(\varphi) - 1, V, 0) = \infty.$$

Для параллелепипедов, симметричных относительно O, с гранями, параллельными координатным гиперплоскостям, и вершинами в точках с целыми координатами, теорема 2.2 доказана Л. Д. Гоголадзе [5]. Для $V \in W_a$ теорема 2.2 получена в [11].

Заметим, что утверждение (2) теоремы 2.2 справедливо для любого полиэдра V, $O \in int\, V$, и следует из точной по порядку оценки констант Лебега

$$c_1 \ln^m n \le \|S_{nV}\| = \sup_{|f|\le 1} \|S_{nV}(f)\|_{C(T^m)} =$$

$$= \sup_{|f|\le 1} |S_{nV}(f, 0)| \le c_2 \ln^m n, \tag{2.4}$$

где $c_i = c_i(V, m) > 0$, $i = 1, 2$ ([12], оценка сверху, [13] – снизу).

Пусть $E_{nV}(f) = \inf_T \|f - T\|_{C(T^m)}$ - наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами со спектром в nV $\left(T(x) = \sum_{k \in nV} c_k e^{ikx}\right)$.

Теорема 2.3. *Для любых $f \in C(T^m)$, $V \in W_b$, $p > 0$ и $n > n_0 > 0$ справедливо неравенство*

$$\sum_{l=n_0}^{n} |f(x) - S_{lV}(f,x)|^p \le c^p (p+1)^{mp} \sum_{l=[n_0/2]}^{n} E_{lV}^p(f), \tag{2.5}$$

где $c = c(m, V) > 0$.

При $m = 1, V = [-1, 1]$ это результат Алексича и Кралика [14]. Для $V \in W_a$ неравенство (2.5) доказано в [11]. Заметим также, что в основе доказательства теорем 2.2, 2.3 лежит оценка (2.2) теоремы 2.1.

Из теоремы 2.2 следует, что для любых $a > 0$ и $f \in C(T^m)$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n} \exp\left(a\,|f(x) - S_{lV}f(x)|^{1/m}\right) - 1 \to 0 \quad \text{при} \quad \mathrm{n} \to \infty$$

равномерно на T^m.

Лемма 2.2. *([6], [10]) Пусть полиэдр $V \in W_b$. Существуют постоянные $A > 0$ и $c > 0$ такие, что*

$$\sup_{|f| \le 1} \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n} \exp\left(A\,|S_{lV}f(0)|^{1/m}\right) \le c, \quad n \in N.$$

Для дальнейшего нам потребуются некоторые определения. Непрерывная выпуклая функция Φ, заданная на R, называется N-функцией, если она четна и удовлетворяет условиям

$$\lim_{u \to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u \to \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty.$$

Каждая N-функция допускает представление [16]

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} p(t)\,dt,$$

где $p(t)$ – положительная при $t > 0$, непрерывная справа при $t \ge 0$, неубывающая функция и такая, что

$$p(0) = 0, \quad p(\infty) = \lim_{t \to \infty} p(t) = \infty.$$

Пусть $q(s)$ – правая обратная к $p(t)$ функция,

$$\Psi(u) = \int_0^{|u|} q(s)\, ds.$$

Функции Φ и Ψ называются дополнительными друг к другу функциями.

L_Φ – пространство Орлича (см., например [15]) функций, заданных на отрезке [0, 1], определенное N-функцией Φ, с нормой

$$\|u\|_\Phi = \sup \left| \int_0^1 uv dx \right|,$$

где супремум берется по всем функциям v, удовлетворяющим условию $\int_0^1 \Psi(v)\, dx \leq 1$.

Для функции $f \in L_\infty(T^m)$ и полиэдра $V \in W_b$ определим следующие величины

$$I_n f(x) = \sum_{j=1}^{n} S_{jV}(f, x)\, \chi_{[(j-1)n^{-1}, jn^{-1})}, \tag{2.6}$$

где χ_B – характеристическая функция множества B.

Теорема 2.4. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, $\alpha > 0$. Тогда для любой N-функции Φ, удовлетворяющей неравенству $\Phi(u) \leq ce^{\alpha|u|^{1/m}}$ при достаточно больших значениях аргумента и $c > 0$,*

$$\sup_{|f| \leq 1} \|I_n f(x)\|_\Phi = \sup_{|f| \leq 1} \|I_n f(0)\|_\Phi \leq c(\alpha) < \infty.$$

Данная теорема следует из леммы 2.2, оценки

$$\|g\|_\Phi \leq \int_0^1 \Phi(g) dt + 1$$

и эквивалентности, при различных $\alpha > 0$, норм в пространствах L_Φ, где $\Phi(u) = e^{\alpha|u|^{1/m}}$ при $u > u_0$.

3. Сильная суммируемость с пропусками

Пусть $\{n_j\}$ - возрастающая последовательность натуральных чисел. Следуя [16], будем говорить, что $\{n_j\} \in p - SF(V)$, $0 < p < \infty$, если для любой $f \in L_\infty(T^m)$ частичные суммы $S_{nV}(f)$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left| S_{n_j V}(f, 0) \right|^p \leq c \|f\|_\infty^p, \quad N = 1, 2, \ldots$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от f и N.

Из теоремы 2.1 следует (см.(2.2)), что если полиэдр $V \in W_b$, то последовательность $\{j\} \in p - SF(V)$.

Пусть $m = 1$. Если V – отрезок [-1, 1], для того чтобы $\{n_j\} \in p - SF(V)$ необходимо, а если $\{n_j\}$ – выпукла $\{n_{j+1} - n_j \uparrow\}$, то и достаточно, чтобы

$$\log n_j \leq c j^{\min(1/2,\, 1/p)}, \quad c > 0.$$

При $p = 1$ необходимость этого условия доказал Салем [17], достаточность – независимо Карлесон [18] и Н. А. Загородний и Р. М. Тригуб [19], а также Лонг [16]. При $1 < p < \infty$ это результат Лонга [16].

Теорема 3.1. *([20, W_a], [6]). Пусть полиэдр $V \in W_b$, $0 < p < \infty$, $\{n_j\}$ - выпуклая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\log n_j \leq c j^{\min\left(\frac{1}{2m},\, \frac{1}{pm}\right)}, \quad c > 0. \tag{3.1}$$

Тогда $\{n_j\} \in p - SF(V)$.

Если V - единичный куб в R^m, теорема 3.1 при $p = 1$ приведена в [21].

Заметим, что условие (3.1) при $p \geq 1$ одновременно является и необходимым, при $p > 2$ следует из (2.4), причем, как и при $m = 1$, $\{n_j\}$ не обязательно выпуклая последовательность.

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда для любой $f \in C\,(T^m)$*

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left| f(x) - S_{n_j V}(f, x) \right|^p \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \tag{3.2}$$

Более того, имеет место следующее неравенство, позволяющее оценивать скорость стремления к нулю величины (3.2).

Теорема 3.2. *В условиях теоремы 3.1 для любой $f \in C\,(T^m)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{N} \left| f(x) - S_{n_j V}(f, x) \right|^p \leq c \sum_{j=1}^{N} E^p_{n_j V}(f), \qquad N = 1,\, 2,\, \ldots,$$

где $c = c(p,\, m,\, V) > 0$.

4. Неравенства типа Сидона. Двойственность

В одномерном случае ($m = 1$, $V = [-1,1]$) Сидон [22] доказал следующее неравенство

$$\frac{1}{n+1}\int_T \left|\sum_{j=0}^{n} a_j D_j(x)\right| dx \le c \max_{0\le j\le n} |a_j|,$$

где $D_j(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$ – ядро Дирихле порядка n, а $c > 0$ – абсолютная константа.

В работе Фридли и Шиппа [23] установлена двойственность между сильными средними однократных рядов Фурье и неравенствами типа неравенств Сидона для одномерных ядер Дирихле.

Приведем неулучшаемое (в шкале пространств Орлича) неравенство типа неравенства Сидона для ядер Дирихле D_{nV}, порожденных полиэдрами класса W_b.

Будем использовать введенные в [24] ступенчатые функции $I_n f(x)$ (см. (2.6)) и

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[(j-1)n^{-1}, jn^{-1})}.$$

Теорема 4.1. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, a_n - последовательность действительных чисел. Если N- функция Ψ удовлетворяет условию*

$$\Psi(u) \ge cu \ln^m u, \tag{4.1}$$

при некоторых $c > 0$ и $u \ge u_0 > 0$, то

$$\frac{1}{n}\int_{T^m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x)\right| dx \le c_1 \left\|\Gamma_n(a_1, \ldots, a_n)\right\|_{\Psi}. \tag{4.2}$$

где постоянная $c_1 > 0$ зависит лишь от V и Ψ.

Замечание 4.1. *Теорема 4.1 окончательна в следующем смысле. Неравенство (4.2) перестает быть верным для любого набора $\{a_n\}$, если вместо Ψ, удовлетворяющей условию (4.1), взять N-функцию Ψ_1, такую, что*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\Psi_1(u)}{u \ln^m u} = 0.$$

Этот факт следует из двойственности между нормами сильных средних ряда Фурье и неравенствами типа неравенства Сидона и точности теоремы 2.2.

Следствие 4.1. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, $\{a_j\}$ – последовательность действительных чисел. Тогда*

$$\int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x) \right| dx \le c \sum_{j=1}^{n} |a_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|a_j|}{n^{-1} \sum_{j=1}^{n} |a_j|} \right)^m \right].$$

Данное неравенство при $m = 1$, $V = [-1,\ 1]$ доказано другим методом Фридли [25].

Следствие 4.2. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, $p > 1$. Для любого набора $\{a_n\}$ действительных чисел имеет место неравенство*

$$\frac{1}{n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x) \right| dx \le c \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{1/p}. \tag{4.3}$$

При $m = 1$ это неравенство, по существу содержащееся в работе Г. А. Фомина [26], доказано также Бояничем и Станоевичем [27].

В предельном случае $p = \infty$ имеем аналог неравенства Сидона

$$\frac{1}{n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{jV}(x) \right| dx \le c \max_{1 \le j \le n} |a_j|. \tag{4.4}$$

Теорема 4.2. *([10]) Пусть $1 < p \le 2$, ν_n – возрастающая последовательность действительных чисел. Для того чтобы для любого набора $\{a_n\}$ имело место неравенство*

$$\frac{1}{n} \int_{T^m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j D_{\nu_j V}(x) \right| dx \le c \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{1/p}, \tag{4.5}$$

необходимо, а если ν_n выпукла, то и достаточно, чтобы

$$\ln \nu_n \le c_1 n^{\frac{p-1}{pm}}.$$

5. Интегрируемость и сходимость в среднем кратных тригонометрических рядов

Пусть λ_n - последовательность действительных чисел, $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$. На m-мерном торе T^m рассмотрим тригонометрический ряд

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx}, \tag{5.1}$$

где полиэдр $V \in W_b$. Коэффициенты данного ряда постоянны на множествах $lV \setminus (l-1)V$ $(l = 1, 2, \ldots)$.

Пусть

$$S_{nV}(x) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx} -$$

частичная сумма ряда (5.1). Ряд (5.1) сходится в пространстве $L(T^m)$, если существует функция $f \in L(T^m)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{T^m} |S_{nV}(x) - f(x)|\, dx = 0. \tag{5.2}$$

Приведем некоторые известные результаты об интегрируемости и сходимости однократных тригонометрических рядов ($m = 1$, $V = [-1, 1]$). В этом случае ряд (5.1) есть косинус-ряд

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \cos lx. \tag{5.3}$$

В дальнейшем полагаем $\Delta\lambda_n = \lambda_n - \lambda_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Теорема Фомина. [26] *Если существует действительное число $p > 1$ такое, что коэффициенты ряда (5.3) удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=n}^{\infty} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty, \tag{5.4}$$

то ряд (5.3) сходится почти всюду к некоторой функции $f \in L(T)$, есть ее ряд Фурье, причем соотношение (5.2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \ln n = 0.$$

Предельным случаем ($p = \infty$) теоремы Фомина есть доказанная ранее теорема Сидона-Теляковского [28]. Условие (5.4) в ней заменено более жестким условием:

существуют такие числа A_k, что

$$A_k \downarrow 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty, \quad |\Delta\lambda_k| \le A_k \quad \text{для всех} \quad k. \tag{5.5}$$

Фридли [25] обобщил теорему Фомина, заменив условие (5.4) более слабым, но менее "прозрачным" условием

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| \left[1 + \left(\ln^+ \frac{|\Delta\lambda_j|}{2^{-l} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|} \right) \right] < \infty.$$

Следующая теорема о сходимости в метрике L ряда (5.1) по полиэдрам класса W_b в частном случае отрезка [-1, 1] содержит все приведенные выше результаты.

Теорема 5.1. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, а N-функция Φ такова, что при некоторых c, $u_0 > 0$*

$$\Phi(u) \geq cu \ln^m u \quad \text{при} \quad u \geq u_0.$$

Если коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию

$$\sum_{l=0}^{\infty} 2^l \left\| \Gamma\left(\Delta\lambda_{2^l+1}, \ldots, \Delta\lambda_{2^{l+1}}\right) \right\|_{\Phi} < \infty, \tag{5.6}$$

то ряд (5.1) есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L(T^m)$, а равенство (5.2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n \log^m n = 0. \tag{5.7}$$

Следствие 5.1. *([6], [10]) Пусть полиэдр $V \in W_b$. Если коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| \left[1 + \left(\log^+ \frac{|\Delta\lambda_j|}{2^{-l} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|} \right)^m \right] < \infty,$$

то справедливы утверждения теоремы 5.1.

Следствие 5.1 есть m-кратный аналог теоремы Фридли [25]. Следует из теоремы 5.1, если в качестве N-функции Φ взять предельно возможную, эквивалентную $u \ln^m u$ при достаточно больших u, и воспользоваться неравенством (4.2) при $a_j = \Delta\lambda_j$.

Выбирая N-функцию $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$, $p > 1$, получим аналог теоремы Фомина.

Следствие 5.2. *Если при некотором $p > 1$ коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(2^{l(p-1)} \sum_{j=2^l+1}^{2^{l+1}} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty, \tag{5.8}$$

то имеют место утверждения теоремы 5.1.

В [26] показано, что условия (5.4) и (5.8) при $p > 1$ эквивалентны. В предельном случае $p = \infty$ получаем m-кратный аналог теоремы Сидона-Теляковского [28].

Следствие 5.3. *Если коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=1}^{\infty} 2^l \max_{2^l+1\leq j\leq 2^{l+1}} |\Delta\lambda_j| < \infty, \tag{5.9}$$

то имеют место утверждения теоремы 5.1.

Условия (5.9) и (5.5) эквивалентны.

Пусть $W_r \subset W_b$ - подмножество полиэдров с вершинами в точках, координаты которых есть рациональные числа. Следующее утверждение для полиэдров $V \in W_r$ доказано в [29] (см. также [30]).

Теорема 5.2. *Пусть полиэдр $V \in W_r$, а коэффициенты ряда (5.1) удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Тогда ряд (5.1) сходится почти всюду на T^m к функции $f \in L(T^m)$, является ее рядом Фурье, при этом сходимость в метрике L имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.7).*

Сходимость ряда (5.1) почти всюду к функции f, найденной в теореме 5.1, следует из равенства

$$S_{nV}(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \Delta\lambda_l D_{lV}(x) + \Delta\lambda_n D_{nV}(x)$$

и того факта ([31], лемма 2), что для полиэдра $V \in W_r$ последовательность $D_{nV}(x)$ ограничена почти всюду на T^m.

Пусть ν_n – возрастающая последовательность натуральных чисел, λ_n – сходящаяся к нулю последовательность действительных чисел, $V \in W_b$. Рассмотрим ряд ($x \in T^m$)

$$\lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k\in\nu_n V\setminus\nu_{n-1}V} e^{ikx}. \tag{5.10}$$

Если ν_n растет достаточно быстро, ряд (5.10) есть ряд с редко меняющимися коэффициентами. При $m = 1$, $V = [-1,\ 1]$ условия интегрируемости и сходимости в метрике L ряда

$$\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{\nu_{n-1}\leq k\leq\nu_n} \cos kx \tag{5.11}$$

изучались в [32], [33] для последовательностей ν_n, лакунарных по Адамару:

$$\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \geq q > 1, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots \tag{5.12}$$

В [32] доказано, что ряд (5.11), при выполнении условия (5.12) является рядом Фурье в том и только том случае, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{l=n}^{\infty} (\Delta\lambda_l)^2 \right\}^{1/2} \log \frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} < \infty .$$

Если ряд (5.11) есть ряд Фурье, то для его сходимости в метрике L необходимо и достаточно условие [33]

$$\lambda_n \log \nu_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty .$$

Для некоторого класса последовательностей ν_n, растущих медленнее, при $m = 1,\, 2,\, \ldots$ справедлив следующий результат.

Теорема 5.3. *Пусть полиэдр $V \in W_b$, $p > 1$ и выпуклая последовательность ν_n $(\nu_{n+1} - \nu_n \uparrow)$ удовлетворяет условию*

$$\log \nu_n \leq c n^{\min\left\{\frac{p-1}{pm}, \frac{1}{2m}\right\}}.$$

Если коэффициенты ряда (5.10) стремятся к нулю и удовлетворяют условию (5.8), то данный ряд есть ряд Фурье некоторой функции $f \in L\,(T^m)$ и сходится к f в метрике L тогда и только тогда, когда

$$\lambda_n \log^m \nu_n \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Abstract. The paper is a survey of the known results related with Fourier series strong polyhedral means of functions continuous on the m-dimensional torus, Sidon type inequalities for Dirichlet kernels in polyhedrons, and integrability and convergence of multiple trigonometric series.

Список литературы

[1] А. Н. Подкорытов, "Суммирование кратных рядов Фурье по полиэдрам", Вестн. Ленингр. ун-та, (1), 51 – 58 (1980).

[2] В. Г. Спринджук, Метрическая теория диофантовых приближений, М., Наука (1977).

[3] G. N. Hardy, J. E. Littlewood, "Sur la serie de Fourier d'une function a carré sommable CR, **156**, 1307-1309 (1913).

[4] Л. Д. Гоголадзе, "О сильных средних типа Марцинкевича", Сообщ. АН ГрузССР, **102**, 293 – 295 (1981).

[5] Л. Д. Гоголадзе, "О суммировании кратных тригонометрических рядов и сопряженных функ-циях", Дис. ... д-ра физ.-мат. наук, Тбилиси (1984).

[6] О. И. Кузнецова, "Сильная суммируемость кратных рядов Фурье и неравенства типа Сидона", Укр. матем. ж., **50** (12), 1630 – 1635 (1998).

[7] Л. Д. Гоголадзе, "О сильной суммируемости почти всюду", Матем. сборник, **135** (2), 158 – 168 (1998).

[8] T. Carleman, "A theorem concerning Fourier series", Proc. London Math. Soc., **21**, 483 – 492 (1923).

[9] V. Totik, "On the generalization of Fejer's summation theorem", Series, Functions, Operators, Proceeding of the International Conference in Budapest, 1980, 1195 – 1199 (1983).

[10] О. И.Кузнецова, "Сильная суммируемость кратных рядов Фурье и неравенство Сидона", ДАН, **364** (5), 593 – 595 (1999).

[11] О. И. Кузнецова, "О сильных средних Карлемана кратных тригонометрических рядов", Укр. матем. ж., **44** (2), 275 – 279 (1992).

[12] А. Н. Подкорытов, "Порядок роста констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам", Вестн. Ленингр. ун-та, (7), 110 – 111 (1982).

[13] В. А. Юдин, "Оценка снизу констант Лебега", Матем. заметки, **25** (1), 119 – 122 (1979).

[14] G. Alexich, D. Kralik, "Über die approximation mit starken de la Valle-Poussinschen mitteln Acta Math. Acad. Sci. Hung, **16**, 43 – 49 (1965).

[15] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, "Выпуклые функции и пространства Орлича", М., Физматгиз (1958).

[16] J.-L. Long, "Sommes partielles de Fourier des fonctions bornées", C.R. Acad. Sc. Paris, **288**, 1009 – 1011 (1979).

[17] R. Salem, "On strong summability of Fourier series", Amer. J. Math., **77**, 392 – 402 (1955).

[18] L. Carleson, "Appendix to the paper of J.-P. Kahane and J. Katznelson", Stud. Math. Mem. Paul Turan, Budapest, 411 – 413 (1983).

[19] Н. А. Загородний, Р. М. Тригуб, "Об одном вопросе Салема", Теория функций и отображений, (К.: Наукова думка), 97 – 101 (1979).

[20] О. И. Кузнецова, "О частичных суммах по полиэдрам рядов Фурье ограниченных функций", Anal. math., **19**, 267 – 272 (1993).

[21] О. И. Кузнецова, "Интегрируемость и сильная суммируемость кратных тригонометрических рядов", Труды МИАН, **180**, 143 – 144 (1987).

[22] S. Sidon, "Hinreichende bedingungen fur den Fourier-Charakter einer trigonometrischen reihe", J. London Math. Soc., **14** (2), 158 – 166 (1939).

[23] S. Fridli , F. Schipp, "Strong summability and Sidon type inequalities", Acta Sci. Math. (Szeged), **60**, 277 – 289 (1995).

[24] F. Schipp , W. R. Wade, P. Simon (with assistance P.Pal.), Walsh Series, Adam Hilder, Bristol-New York (1990).

[25] S. Fridli, "An inverse Sidon type inequality", Studia Math., **105** (3), 283-308 (1993).

[26] Г. А. Фомин, "Об одном классе тригонометрических рядов", Матем. заметки, **23**, 213 – 222 (1978).

[27] R. Bojanic, C. V. Stanojevic, "A class of L^1 convergence", Trans. Amer. Math. Soc., **269**, 677 – 683 (1982).

[28] С. А. Теляковский, "О достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов", Матем. заметки, **14** (3), 317 – 328 (1973).

[29] О. И. Кузнецова, "Об интегрировании одного класса N-мерных тригонометрических рядов", Укр. матем. ж., **52** (6), 837 – 840 (2000).

[30] О. И. Кузнецова, "Интегрируемость одного класса N-мерных тригонометрических рядов", Працу ўМ НАНУ, **31**, 297 – 305 (2000).

[31] О. И. Кузнецова, "Об одном классе N-мерных тригонометрических рядов", Матем. заметки, **63** (3), 402 – 406 (1998).

[32] Л. А. Балашов, С. А. Теляковский, "Некоторые свойства лакунарных рядов и интегрируемость тригонометрических рядов", Труды МИАН, 143, 32 – 41 (1977).
[33] С. А. Теляковский, "О сходимости в метрике L тригонометрических рядов с редко меняющимися коэффициентами", Труды МИАН, 200, 322 – 326 (1991).

Поступила 18 ноября 2011