Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 5, 2012, стр. 39-48.

О МНОЖЕСТВАХ ТОЧЕК НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАСХОДИМОСТИ РЯДОВ ПО ОРТОНОРМИРОВАННЫМ БАЗИСАМ

Д. А. КАРАГУЛЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *davidkar89@yahoo.com*

Аннотация. В работе доказываются теоремы, дающие полные характеристики множеств точек расходимости общих рядов по ортонормированным базисам со свойством локализации.

MSC2010 number: 42A20.

Ключевые слова: системы со свойством локализации; множества расходимости; множества типа G_δ.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in [0,1], \tag{1.1}$$

множество $E \subset [0,1]$ называется множеством точек расходимости, если этот ряд расходится при $x \in E$ и сходится когда $x \in [0,1] \setminus E$. Если же расходимость в точках E неограничена, то скажем, что E является множеством точек неограниченной расходимости ряда (1.1). Хорошо известна классическая теорема Хана-Серпинского (см. [7], [1]): для того чтобы $E \subset [0,1]$ стало множеством точек расходимости (неограниченной расходимости) некоторого ряда (1.1), с непрерывными членами $f_n(x)$, необходимо и достаточно, чтобы оно имело тип $G_{\delta\sigma}$ (G_δ). Характеризации множеств точек расходимости рядов по разным ортонормированным системам посвящено много работ. При этом рассматриваются как ряды Фурье так и общие ряды. Множества точек неограниченной расходимости тригонометрических рядов описаны Целлером в работе [9], в которой доказывается, для того чтобы множество было множеством неограниченной расходимости необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ . Аналогичную теорему для рядов по системе Хаара доказывается М. А. Луниной в работе [6]. Ею доказано, что во первых множество точек неограниченной расходимости любого ряда Фурье-Хаара является множеством типа $\tilde{G}_\delta$, и наоборот, любое множество типа $\tilde{G}_\delta$ может стать множеством точек неограниченной расходимости ряда Фурье-Хаара некоторой функции. Множества точек обычной расходимости рядов Фурье по система Хаара и Франклина полностью охарактеризована Г. А. Карагуляном в работах [2] и [4]. При этом отметим, что в работах [3] и [4] установлены общие теоремы, дающие полные характеристики множеств расходимости последовательностей операторов со свойством локализации. В настоящей работе рассматривается вопрос о характеризации множество точек неограниченной расходимости общих рядов по ортонормированным базисам со свойством локализации.

Пусть

$$\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{1.2}$$

есть ортонормальный базис в $C[0,1]$. Через $S_n(x,f)$ обозначим частичные суммы ряда Фурье функции $f(x) \in L^1[0,1]$ по системе (1.2). Через $M[0,1]$ обозначим пространство ограниченных функций. Рассматриваются ортонормированные системы (1.2), которые обладают свойством локализации, т.е. для любой кусочно-линейной и непрерывной функции $f \in M[0,1]$ на (α,β), имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x,f) = f(x), x \in (\alpha,\beta), \tag{1.3}$$

причем сходимость равномерна в любом замкнутом множестве интервала (α,β). Множество A назовем множеством типа G_δ, если

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k суть открытые множества. При этом очевидно можно предполагать, что $G_k \supseteq G_{k+1}$ для всех $k \in N$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2.1. *Если ортонормированная система непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, обладает свойством локализации, то для любого множества E типа*

G_δ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k(x), \tag{2.1}$$

который неограниченно расходится в любой точке $x \in E$ и сходится при $x \notin E$.

Так как члены ряда (2.1) суть непрерывные функции, то согласно теореме Хана-Серпинского множество его неограниченной расходимости имеет тип G_δ. Отсюда, с учетом результата теоремы 2.1 мы получим

Следствие 2.1. *Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированная система непрерывных функций со свойством локализации. Для того, чтобы множество $E \subset [0,1]$ было множеством неограниченной расходимости некоторого ряда (2.1), необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством типа G_δ.*

Замечание 2.1. *Примером системы, удовлетворяющей вышеупомянутым свойствам является общая система Франклина. Таким образом, следствием 2.1 полностью характеризуются множества неограниченной расходимости для общих систем Франклина.*

Воспользуемся системой Радемахера

$$r_n(x) = \operatorname{sign}\left[\sin(2^n \pi x)\right] \quad x \in [0,1]$$

и обозначим

$$\beta_I^k(x) = \begin{cases} r_k\left(\frac{x-a}{b-a}\right), & x \in I \\ 0, & x \notin I \end{cases} \tag{2.2}$$

где $I = [a, b]$. В силу теоремы Фейера (см. [8], стр. 77), имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \beta_I^k(x) f(x) dx = 0, \tag{2.3}$$

для любой непрерывной функции f.

Функция

$$\phi(u) = \sup_{n\in N} \sup_{x\in[0,1]} \sup_{\|f\|_1 \le 1} |S_n(x, f(t) I_{\{t:|t-x|>u\}}(t))|, \ 0 < u < 1, \tag{2.4}$$

была определена в работе Карагуляна [4] и играет важную роль в вопросах характеризации множеств точек расходимости. В [4] устанавливается, что

$$\phi(u) < \infty, \quad u \in (0,1],$$

и для любой функции $f \in L^1[0,1]$, с $\operatorname{supp} f \subset A$ имеет место неравенство

$$|S_n(x,f)| \le \phi(\operatorname{dist}(x,A))\|f\|_{L^1}\ , n=1,2,\ldots,\operatorname{dist}(x,A)>0. \tag{2.5}$$

Лемма 2.1. *Пусть $J=(a,b)\subset[0,1]$, тогда для любого $\varepsilon>0$ и $d>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для любого интервала $I=[c,e]\subset J$, с $\operatorname{dist}(J^c,I)>d$ и любой функции $f\in L^\infty[0,1]$, с $\operatorname{supp} f\subset I$ и $\|f\|_\infty\le 1$, имеет место*

$$|S_k(x,f)|<\varepsilon, \quad \text{при } x\in J^c \text{ и всех } k\in\mathbb{N}, \tag{2.6}$$

как только $|I|<\delta$.

Доказательство. Из (2.4) легко видеть, что $\phi(x)$ монотонно убывающая функция. Тогда, с учетом (2.5) и условия $\operatorname{dist}(J^c,I)>d$, получим

$$|S_n(x,f)|\le\phi(\operatorname{dist}(x,A))\|f\|_{L^1}\le\phi(d)\|f\|_{L^1}\le\phi(d)|I|, \text{ при } x\in J^c.$$

Следовательно, при $|I|<\delta=\frac{\varepsilon}{\phi(d)}$ получим (2.6) и лемма 2.1 доказана □

Из леммы 2 работы [4] следует

Лемма 2.2. *Пусть $J=(a,b)\subset[0,1]$, $I=[c,d]\subset J$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число $n=n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такое, что для любой функции $f\in L^\infty[0,1]$, с $\operatorname{supp} f\subset I$ и $\|f\|_\infty\le1$, имеем*

$$|S_k(x,f)|<\varepsilon, \quad \text{при } x\in J^c \text{ и } k>n. \tag{2.7}$$

Лемма 2.3. *Пусть $J\subset[0,1]$–открытый интервал, а $I=[a,b]\subset J$. Тогда для любых чисел $p\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$, существует полином по системе (1.2)*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k\psi_k(x), \tag{2.8}$$

такой, что

$$\max_{p\le n\le q}|\sum_{k=p}^{n}a_k\psi_k(x)|<\varepsilon, \text{ при } x\in J^c, \tag{2.9}$$

$$\max_{p\le n\le q}|\sum_{k=p}^{n}a_k\psi_k(x)|\ge1, \text{ при } x\in I. \tag{2.10}$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2, существует натуральное число n_0 такое, что для любой функции $f\in L^\infty[0,1]$, с условиями $\|f\|_\infty\le1$ и $\operatorname{supp} f\subset I$, имеет место неравенство

$$|S_r(x,f)|=|\sum_{k=1}^{r}(\psi_k,f)\psi_k(x)|<\frac{\varepsilon}{8}, \text{ при } x\in J^c, \text{ и } r>n_0. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что

$$|\sum_{k=1}^{r}(\psi_k,\beta_I^m)\psi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{8},\ \text{при } x\in J^c,\ \text{и } r>\tau, \tag{2.12}$$

где $\beta_I^m(x)$ есть функции, определенные в (2.2) и $\tau=\max\{p,n_0\}$. Согласно (2.3), можно зафиксировать число $m\in\mathbb{N}$, такое, что

$$|(\psi_k,\beta_I^m)| \le \frac{\varepsilon}{8\tau},\ \text{для } k=1,2,...,\tau. \tag{2.13}$$

Функция β_I^m имеет конечное число точек разрыва. Пусть $A=\{\xi_1,\xi_2...,\xi_s\}$ множество этих точек. Для любой точки $\xi\in A$ рассмотрим следующую функцию

$$T_{\delta,\xi}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2},\ \text{при} & t=\xi,\\ 0,\ \text{при} & t\notin(\xi-\delta,\xi+\delta),\\ \text{линейна и непрерывна,} & \text{на } [\xi-\delta,\xi] \text{ и } [\xi,\xi+\delta],\end{cases} \tag{2.14}$$

где ($\delta<|I|/2s$). Так как (2.14) непрерывная функция, то его ряд Фурье по системе (1.2) будет сходится к нему равномерно на $[0,1]$. Согласно лемме 2.1, при достаточно малом δ и для любой точки $\xi\in A$ имеет место

$$|S_n(x,T_{\delta,\xi})| < \frac{\varepsilon}{8s},\ \text{при } x\notin\left(\xi-\frac{|I|}{2s},\xi+\frac{|I|}{2s}\right),\quad n\in\mathbb{N}, \tag{2.15}$$

При малом δ обеспечивается также условие

$$|(\psi_k,T_{\delta,\xi})| \le \frac{\varepsilon}{8\tau s},\ \text{при } k\le\tau. \tag{2.16}$$

Пусть

$$\gamma_r=\begin{cases}1, & \text{если } \limsup\limits_{l\to\infty} S_l(\xi_r,\beta_I^m)\ge 0,\\ -1, & \text{если } \limsup\limits_{l\to\infty} S_l(\xi_r,\beta_I^m)<0.\end{cases} \tag{2.17}$$

Определим функцию

$$F(x)=\beta_I^m(x)+\sum_{r=1}^{s}\gamma_r T_{\delta,\xi_r}(x).$$

Из (2.14) и (2.17) легко следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}|S_n(\xi_r,F)| \ge \frac{1}{2},\quad r=1,2,\ldots,s. \tag{2.18}$$

Отсюда, с учетом непрерывности функции $S_n(x,F)$, найдется число $\delta>0$, такое, что выполняются неравенства

$$|S_{\nu_k}(x,F)| \ge \frac{1}{3}\ \text{для } x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta), \tag{2.19}$$

для некоторых натуральных чисел $\nu_k=\nu_k(\xi_k)$. Далее имеем

$$|F(x)| \ge |\beta_I^m(x)| - |\sum_{r=1}^{s}\gamma_r T_{\delta,\xi_r}(x)| \ge \frac{1}{2}\ \text{для } x\in I\setminus A, \tag{2.20}$$

а из свойства локализации следует, что $S_n(x,F)$ сходится равномерно на множестве

$$I\setminus\bigcup(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta).$$

Отсюда, с учетом (2.20), можно найти число ν, такое, что

$$|S_\nu(x,F)|\geq\frac{1}{3},\quad x\in I\setminus\bigcup(\xi_k-\delta_k,\xi_k+\delta_k). \tag{2.21}$$

Из (2.16) и (2.13) следует

$$|(\psi_k,F)|\leq|(\psi_k,\beta_I^m)|+\sum_{r=1}^{s}|(\psi_k,T_{\delta,\xi_k})|\leq\frac{\varepsilon}{4\tau},\ \text{при } k\leq\tau. \tag{2.22}$$

Определим

$$q=\max_{1\leq j\leq l}\{\nu_j,\nu\},$$

и пусть

$$a_k=4\int_0^1F(x)\psi_k(x)dx,\quad k=p,p+1,\dots,q.$$

Из (2.19) и (2.22) для $x\in(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$ получаем

$$\left|\sum_{i=p}^{\nu_k}a_i\psi_i(x)\right|\geq4|S_{\nu_k}(x,F)|-4|S_p(x,F)|\geq\frac{4}{3}-4p\frac{\varepsilon}{4\tau}\geq\frac{4}{3}-\varepsilon,$$

аналогичным образом из (2.21) и (2.19) следует

$$\left|\sum_{i=p}^{\nu}a_i\psi_i(x)\right|\geq4|S_\nu(x,F)|-4|S_p(x,F)|\geq\frac{4}{3}-\varepsilon,$$

при $x\in I\setminus\bigcup(\xi_k-\delta,\xi_k+\delta)$. А из (2.12) и (2.15)

$$\left|\sum_{i=p}^{n}a_i\psi_i(x)\right|\leq4|S_n(x,\beta_I^m)|+4\sum_{r=1}^{s}|S_n(x,T_{\delta,\xi_r})|\leq\frac{\varepsilon}{2}+4s\frac{\varepsilon}{8s}\leq\varepsilon,$$

при $x\in J^c$ и $p\leq n\leq q$. Следовательно при $\varepsilon<\frac{1}{3}$ получим (2.9) и (2.10). Lemma 2.3 доказана. □

Пусть G открытое множество. Скажем, что система замкнутых двоичных интервалов $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ является разбиением для G, если $(\omega_i)^o\bigcap(\omega_j)^o=\emptyset$ для любых $i,j\in\mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1}^\infty\omega_k=G$, и

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{dist}(\omega_k,G^c)=0.$$

Обозначим через ω_k^* объединение ω_k с его двумя соседними интервалами. Легко заметить, что любое открытое множество обладает таким разбиением.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть A есть множество типа G_δ. Имеем

$$A=\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где G_k-открытые множества и $G_k \supseteq G_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$. Каждое из множеств G_k обладает некоторым разбиением на двоичные интервалы. Пусть $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть некоторая нумерация всех этих интервалов. Легко заметить, что имеет место соотношение

$$x\in A \quad \Leftrightarrow \quad x\in\omega_k \text{ для бесконечного числа } k\in\mathbb{N}, \tag{2.23}$$

$$\Leftrightarrow \quad x\in\omega_k^* \text{ для бесконечного числа } k\in\mathbb{N}, \tag{2.24}$$

С каждым интервалом ω_k будем связывать некоторый многочлен по системе (1.2)

$$\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} a_i\psi_k(x) \tag{2.25}$$

с условиями

$$\max_{n_{k-1}<n\le n_k}\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n} a_i\psi_k(x)\right| \le \frac{1}{2^k} \quad x\notin\omega_k^*, \tag{2.26}$$

$$\max_{n_{k-1}<n\le n_k}\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n} a_i\psi_k(x)\right| \ge k, \quad x\in\omega_k, \tag{2.27}$$

где $1=n_0<n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$ есть некоторая последовательность номеров. Сделаем это по индукции. Применив лемму 3, при $J=\omega_1^*$, $I=\omega_1$, $p=1$, $\varepsilon=1$, получим полином (2.25), с условиями (2.26) и (2.27) в случае $k=1$. Далее предположим, что условия (2.26) и (2.27) выполняются для некоторых полиномов (2.25) при $k=1,2,\ldots,t$. Обозначим

$$M_{t+1}=\max_{x\in[0,1]}\left|\sum_{i=1}^{n_t} a_i\psi_k(x)\right|+(t+1).$$

Вновь применив лемму 3, с $J=\omega_{t+1}^*$, $I=\omega_{t+1}$, $n=n_t$, $\varepsilon=1/(M_{k+1}2^k)$, получим полином вида (2.25), удовлетворяющий условиям (2.26) и (2.27) при $k=t+1$. Итак, завершая индукцию, в конце концов мы получим некоторый ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i\psi_k(x) \tag{2.28}$$

удовлетворяющий условиям (2.26) и (2.27). Пусть $x\in A$. Тогда, согласно (2.23), существует бесконечная последовательность интервалов ω_k, содержащих точку

x. Это значит, что в точке x для бесконечного числа значений k выполняется (2.27). Отсюда следует расходимость ряда (2.28) в точке x. Если же $x \notin A$, то существуют лишь конечное число интервалов ω_k^*, содержащие x. Это значит, что (2.26) может не выполняться только для конечного числа индексов k, откуда получаем, что ряд (2.28) сходится. Теорема 2.1 доказана. □

3. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА

Следующая теорема частично показывает, что условие локализации, налагаемое на систему (1.2), играет важную роль.

Теорема 3.1. *Существует ортонормированная и замкнутая в $C[0,1]$ система непрерывных функций $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и непустое множество $E \subset [0,1]$ типа G_δ, которое не является множеством неограниченной расходимости для любого ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_{\sigma(k)}(x),$$

где $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биективное отображение.

Доказательство. Очевидно, что достаточно построить ортогональную (необязательно нормированную) систему с теми же условиями. Пусть $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ классическая система Франклина. Согласно экспоненциальным оценкам функций Франклина (см [5], теорема 6.8), существуют точки $x_0, y_0 \in [0,1]$, $x_0 \neq y_0$ и некоторую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел такие, что

$$\lim_{k\to\infty} |F_{n_k}(y_0)| = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} |F_{n_k}(x_0)| = 0.$$

Используя это, можно найти числа $\{\alpha_k\}$, удовлетворяющие условиям

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |\alpha_k F_k(y_0)| = \infty \text{ и } |\alpha_n F_n(x_0)| \le 1, \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Для краткости обозначим $\alpha_n F_n(x) = \psi_n(x)$, для $n = 1, 2 \ldots$. Пусть $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая последовательность положительных чисел с условием

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} < \infty. \tag{3.2}$$

Из условии (3.1) очевидно, что систему $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно переставить таким образом, чтоб вновь полученная система $\{\psi'_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяла условиям

$$|\psi'_{2k-1}(y_0) + \psi'_{2k}(y_0)| > \gamma_{2k-1} \text{ и } |\psi'_{2k-1}(y_0) - \psi'_{2k}(y_0)| > \gamma_{2k}, \tag{3.3}$$

где $k = 1, 2 \ldots$. Тогда систему $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ определим

$$\phi_{2k-1} = \psi'_{2k-1}(x) + \psi'_{2k}(x), \phi_{2k} = -\psi'_{2k-1}(x) + \psi'_{2k}(x),$$

для всех k. Полученная таким образом система $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ будет ортогональной и замкнутой в $C[0,1]$, и согласно (3.3)

$$|\phi_k(y_0)| > \gamma_k, \text{ для } k \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

а в силу (3.1)

$$|\phi_k(x_0)| \leq 1 + 1 = 2, \text{ для } k \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Докажем, что полученная система удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть теперь $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая последовательность и $\{\phi_{\sigma(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая перестановка системы $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_{\sigma(k)} \tag{3.6}$$

сходится в точке y_0. Тогда, при больших k

$$|a_k \phi_{\sigma(k)}(y_0)| < 1,$$

а с учетом (3.4)

$$|a_k| < \frac{1}{|\phi_{\sigma(k)}(y_0)|} < \frac{1}{\gamma_{\sigma(k)}}.$$

Отсюда, согласно (3.2) и (3.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \phi_{\sigma(k)}(x_0)| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{\sigma(k)}} < \infty.$$

Следовательно из сходимости ряда (3.6) в точке y_0 следует его сходимость в точке x_0, следовательно множество $E = [0,1]/\{y_0\}$ удовлетворяет условиям теоремы. □

В заключении выражаю благодарность Г. А. Карагуляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. In this paper we establish a number of theorems providing complete characterizations of divergence sets of general series in orthogonal bases with a localization property.

Список литературы

[1] H. Hahn, "Über die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionenfolge", Arch. d. Math. u. Phys., **28**, 34 – 45 (1919).

[2] Г. А. Карагулян, "Полная характеристика множеств точек расходимости рядов Фурье-Хаара", Известия НАН Армении, **45**, no. 6, 33 – 50 (2010).

[3] G. A. Karagulyan, "Divergence of general localized operators on the sets of measure zero", Colloq. Math., **121**, no. 1, 113 – 119 (2010).

[4] Г. А. Карагулян, "О характеризации множеств точек расходимости последовательностей операторов со свойством локализации, Мат. Сборник, **202**, no. 1, 11 – 36 (2011).

[5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, Наука (1984).

[6] М. А. Лунина, "О множестве точек неограниченной расходимости рядов по системе Хаара", Вестн. Моск. ун-та. Серия 1, Мат. мех., no. 4, 13 – 20 (1976).

[7] W. Sierpinski, "Sur Tensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues", Fund. Math., no. 2, 41 – 49 (1921).

[8] Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, Физматгиз (1961).

[9] K. Zeller, Über Konvergenzmengen von Fourierreihen, Arch. Math., **6**, 335-340 (1955).

Поступила 26 декабря 2011