Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 4, 2012, стр. 35-60.

МАРТИНГАЛЫ И НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

А. А. ТАЛАЛЯН

Институт Математики НАН Армении, Ереван, Армения
E-mail: *sart@ysu.am*

Аннотация. Применением мартингальных свойств последовательностей кубических частичных сумм рядов по кратной системе Хаара, устанавливаются признаки интегрируемости кратных тригонометрических рядов. Часть этих теорем является усилением и распространением на кратные тригонометрические ряды классических теорем об интегрируемости одномерных тригонометрических рядов, доказательства которых были получены применением принципа выбора Хелли.

MSC2010 number: 42A16.

Ключевые слова: Тригонометрический ряд; система Хаара; мартингал.

1. Введение

Всюду ниже R_m – m-мерное пространство, $n = (n_1, ..., n_m) \in R_m$, векторы с целочисленными координатами, $x = (x_1, ..., x_m)$; $t = (t_1, ..., t_m)$ элементы из R_m; $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_m)$ векторы с $\nu_j = 1, 2, ..., \mu_j = 1, 2, ...$; $n \cdot x = \sum_{j=1}^m n_j \cdot x_j$, $\|x\| = (\sum_{j=1}^m x_j^2)^{1/2}$, $|E|$–мера Лебега измеримого множества $E \subset R_m$. $\Delta_k^{p_j} = [(p_j - 1)/2^k, p_j/2^k)$, p_j–целые числа. Будем обозначать

$$\Delta_k^p = \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j}, \quad p = (p_1, ..., p_m)$$

$\Delta_k^p(t)$ сдвиг куба Δ_k^p на вектор $t = (t_1, ..., t_m)$. Если $\Delta = \prod_{j=1}^m \Delta_j$, где $\Delta_j = [a_j^1, a_j^2)$ и $F(x)$ определена на вершинах Δ, обозначим через ΔF смешанную разность функции $F(x)$ относительно Δ, т.е. $\Delta F = \Delta_m(\Delta_{m-1}...(\Delta_1 F(x))$, где

$$\Delta_j g(x) = g(x_1, ..., a_j^2, ..., x_m) - g(x_1, ..., a_j^1, ..., x_m). \tag{1.1}$$

Известно, что

$$\Delta F = \sum_{i_j=1,2; j=1,2,...,m} (-1)^{i_1+...+i_m} F(a_1^{i_1}, a_2^{i_2}, ..., a_m^{i_m}). \tag{1.2}$$

Если $F(x+t)$ определена для всех x, являющихся вершинами Δ, обозначим через $\Delta F(x+t) = \Delta(t)F$ смешанную разность функции $F(x+t)$ по переменной x относительно Δ.

2. Вспомогательные утверждения

Напомним определение системы Хаара

$$\chi_1(\xi) \equiv 1,\ \xi \in [0,1],\ \ \chi_2(\xi) = \begin{cases} 1; & \xi \in [0,1/2) \\ -1; & \xi \in (1/2,1] \end{cases},$$

при $j = 2^{k-1} + \alpha,\ 1 \le \alpha \le 2^{k-1}$ полагаем

$$\chi_j(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2^{k-1}}; & \text{если} \quad \xi \in \left(\frac{2\alpha-2}{2^k}, \frac{2\alpha-1}{2^k}\right) \\ -\sqrt{2^{k-1}}; & \text{если} \quad \xi \in \left(\frac{2\alpha-1}{2^k}, \frac{2\alpha}{2^k}\right) \\ 0; & \text{если} \quad \xi \notin \left[\frac{\alpha-1}{2^{k-1}}, \frac{\alpha}{2^{k-1}}\right] \end{cases}.$$

В остальных точках разрыва полагается $\chi_j(\xi)$ равной среднему арифметическому односторонних пределов этой функции.

Кратная система Хаара $\chi_\mu(x)$, $\ x = (x_1, ..., x_m),\ \mu = (\mu_1, ..., \mu_m),\ \mu_j = 1, 2, ...$ определяется равенством $\chi_\mu(x) = \chi_{\mu_1}(x_1) \cdot \chi_{\mu_2}(x_2) \cdot ... \cdot \chi_{\mu_m}(x_m)$.

Определение 2.1. *Функция $F(x)$ определенная во всех точках $(p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, ..., p_m/2^{k_m})$, $k_j = 1, 2, ..., p_j$ - целые называется локально абсолютно непрерывной по Витали на двоичной сети, если для любой ограниченной области $Q \subset R_m$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\Delta_i \subset Q$, $1 \le j \le n$, конечное число попарно непересекающихся сегментов с вершинами из $\{(p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, ..., p_m/2^{k_m})\}$ и $\sum |\Delta_i| < \delta$, то $\sum |\Delta_i F| < \varepsilon$.*

Заметим, что в силу аддитивности функции сегмента ΔF, функция $F(x)$ будет локально абсолютно непрерывной по Витали, если требовать, что в определении 2.1 все Δ_i имеют вид $\Delta_i = \Delta_k^{p(i)}$, $k = 1, 2, ...$, $p(i) = (p_1(i), ..., p_m(i)), p_m(i)$– целые числа.

Определение 2.2. *Функция $F(x)$ определенная почти всюду на R_m называется локально почти всюду абсолютно непрерывной по Витали, если для любой конечной области $Q \subset R_m$ существует множество $G \subset Q$, $|G| = |Q|$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, удовлетворяющее условию:*

если Δ_i, $1 \le i \le n$, конечное число попарно непересекающихся сегментов, вершины которых принадлежат множеству G и $\sum |\Delta_i| < \delta$, то $\sum |\Delta_i F| < \varepsilon$.

Теорема 2.1. *Пусть $F(x)$ почти везде конечная измеримая функция, определенная почти всюду на R_m и для каждой точки $t \in E$, где E измеримое множество положительной меры, функция $F(x+t)$, как функция от x, локально абсолютно непрерывна по Витали на двоичной сети $\{(p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, ..., p_m/2^{k_m})\}$. Тогда $F(x)$ локально почти всюду абсолютно непрерывна по Витали.*

Доказательство. Условие теоремы эквивалентно тому, что $F(x)$ локально абсолютно непрерывна по Витали на сети $\{t+(p_1/2^{k_1}, p_2/2^{k_2}, ..., p_m/2^{k_m})\}$ для каждого $t \in E$. Пусть G множество точек аппроксимативной непрерывности функции $F(x)$. Известно, что (см. [1],стр. 199) $|R_m \setminus G| = 0$. Из измеримости функции $F(x)$ и из условия теоремы следует, что для любой ограниченной области $Q \subset R_m$ существует множество $E' \subset E$, такое, что $|E'| > 0$ и для каждого $t \in E'$ функция $F(x+t)$ абсолютно непрерывна по Витали на Q относительно двоичной сети.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для натурального p обозначим через E_p множество тех точек $t \in E'$ для которых выполнено условие:

Если $\Delta_1, ..., \Delta_n$ конечное число сегментов $\Delta_i \cap \Delta_j, i \neq j$, вершины которых имеют двоично рациональные координаты, $\Delta_i \subset Q$ и

$$\sum |\Delta_i| < 1/p, \quad \text{то} \quad \sum |\Delta_i F(x+t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $|E'| > 0$ и $E' = \cup_{p=1}^{\infty} E_p$, $E_p \subset E_{p+1}, \forall p$, то для некоторого p_0 имеем $|E_{p_0}| > 0$. Обозначив $E_{p_0} = E_0$ и $1/p_0 = \delta$ будем иметь:

Для каждого конечного семейства сегментов Δ_i, $\Delta_i \cap \Delta_{i'} = \emptyset, i \neq i', \Delta_i \subset Q$, вершины которых имеют двоично рациональные координаты, если

$$\sum |\Delta_i| < \delta, \quad \text{то} \quad \sum |\Delta_i F(x+t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех} \, t \in E_0, \ |E_0| > 0. \tag{2.1}$$

Без ограничения общности можно считать, что начало координат является точкой плотности для E_0. Пусть $I_1, I_2, ..., I_n$ попарно непересекающиеся сегменты, вершины которых принадлежат множеству $G \cap Q$ и

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i| < \delta. \tag{2.2}$$

Обозначим через $V_{i\nu}, 1 \leq \nu \leq 2^m$, вершины сегмента $I_i, i = 1, 2, ..., n$. Рассмотрим куб $\Delta_\eta = [0, \eta)^m$ и заметим, что

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{|\Delta_\eta \cap E_0|}{|\Delta_\eta|} = 1. \tag{2.3}$$

Рассмотрим кубы $B_{i\nu}$ с центрами $V_{i\nu}$ и длинами сторон равными 2η. Обозначим $\delta_{i\nu} = B_{i\nu} \cap I_i$. Если η достаточно мало, то для каждого i, $\delta_{i\nu}, 1 \leq \nu \leq 2^m$, попарно не пересекаются. Так как точки $V_{i\nu}$ являются точками аппроксимативной непрерывности функции $F(x)$, то для некоторых множеств $Q_{i\nu}$, для которых $V_{i\nu}$ являются точками плотности, имеем

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{|Q_{i\nu}\cap\delta_{i\nu}|}{|\delta_{i\nu}|}=1,\qquad \lim_{x\in Q_{i\nu},\ x\to V_{i\nu}} F(x)=F(V_{i\nu}). \tag{2.4}$$

Поэтому для любого $\varepsilon>0$, если η достаточно мало, выполняется

$$|F(V_{i\nu})-F(x)|<\varepsilon \quad \forall x\in Q_{i\nu}\cap\delta_{i\nu}.$$

Рассмотрим сегменты $\Delta_i\subset I_i$ с вершинами $w_{i\nu}$, координаты которых двоично рациональные числа. Обозначим

$$\Delta_{i\nu}=\Delta_\eta+w_{i\nu}, 1\le\nu\le 2^m, i=1,2,...,n. \tag{2.5}$$

Учитывая (1.8) – (1.10), легко видеть, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\eta>0$ и множества $E_{i\nu}\subset\Delta_{i\nu}$ такие, что выполняются условия

$$|\Delta_\eta\cap E_0|>|\Delta_\eta|\cdot\frac{1}{2}=\frac{\eta^m}{2}, \tag{2.6}$$

$$\Delta_{i\nu}\subset I_i, 1\le\nu\le 2^m, \tag{2.7}$$

$$|E_{i\nu}|>(1-\frac{1}{n2^{m+1}})\cdot\eta^m, \tag{2.8}$$

$$|F(V_{i\nu})-F(x)|<\frac{\varepsilon}{n2^{m+1}}\quad \forall x\in E_{i\nu}. \tag{2.9}$$

Заметим, что по определению $\Delta_{i\nu}$, имеем для всех $t\in\Delta_\eta\cap E_0$,

$$t+w_{i\nu}\subset\Delta_{i\nu},\ i=1,2,...,n,\ 1\le\nu\le 2^m.$$

Обозначим $A_{i\nu}=\{t: t\in\Delta_\eta\cap E_0,\ t+w_{i\nu}\in E_{i\nu}\}$. Очевидно, имеем

$$|A_{i\nu}|=|(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\cap E_{i\nu}|. \tag{2.10}$$

Также имеем

$$\left|(E_0\cap\Delta_\eta)\setminus\bigcap_{i\nu}A_{i\nu}\right|=\left|\bigcup_{i\nu}(E_0\cap\Delta_\eta\setminus A_{i\nu})\right|\le\sum_{i\nu}|(E_0\cap\Delta_\eta)\setminus A_{i\nu}|=$$

$$=\sum_{i\nu}(|E_0\cap\Delta_\eta|-|A_{i\nu}|)=\sum_{i\nu}(|E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu}|-|(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\cap E_{i\nu}|)=$$

$$=\sum_{i\nu}|(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\setminus(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\cap E_{i\nu}|. \tag{2.11}$$

Но

$$E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu}=(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\cap E_{i\nu}\cup(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\cap(\Delta_{i\nu}\setminus E_{i\nu}).$$

Следовательно

$$(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\setminus(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\cap E_{i\nu}=(E_0\cap\Delta_\eta+w_{i\nu})\cap(\Delta_{i\nu}\setminus E_{i\nu}). \tag{2.12}$$

Поэтому согласно (2.7)

$$|(E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \backslash (E_0 \cap \Delta_\eta + w_{i\nu}) \cap E_{i\nu}| \le |\Delta_{i\nu} \setminus E_{i\nu}| =$$

$$= |\Delta_{i\nu}| - |E_{i\nu}| = \eta^m - |E_{i\nu}| < \eta^m - \eta^m \cdot (1 - \frac{1}{n2^{m+1}}) = \eta^m \cdot \frac{1}{n2^{m+1}} = \frac{\eta^m}{2} \cdot \frac{1}{n2^m}.$$

Из (2.5) и (2.11) следует

$$\left|(E_0 \cap \Delta_\eta) \setminus \bigcap_{i\nu} A_{i\nu}\right| \le \sum_{i\nu} \frac{\eta^m}{2} \cdot \frac{1}{n2^m} < \frac{\eta^m}{2}. \tag{2.13}$$

Итак, получаем

$$\left|(E_0 \cap \Delta_\eta) \backslash \bigcap_{i\nu} A_{i\nu}\right| = |E_0 \cap \Delta_\eta| - \left|\bigcap_{i\nu} A_{i\nu}\right| \le \frac{\eta^m}{2}.$$

Следовательно, согласно (2.6) имеем

$$\left|\bigcap_{i\nu} A_{i\nu}\right| > |E_0 \cap \Delta_\eta| - \frac{\eta^m}{2} > \frac{\eta^m}{2} - \frac{\eta^m}{2} = 0,$$

откуда следует существование такого $t \in E_0 \cap \Delta_\eta$, что $t + w_{i\nu} \in E_{i\nu}$, для любых $i\nu$. Поэтому сегменты $t + \Delta_i = \Delta'_i$ с вершинами $t + w_{i\nu}$, согласно (2.6) – (2.9) будут обладать свойством

$$t + \Delta_i \subset I_i, \quad |F(V_{i\nu}) - F(t + w_{i\nu})| < \frac{\varepsilon}{n2^{m+1}}. \tag{2.14}$$

Так как $\Delta'_i \subset I_i$, $1 \le i \le n$, то $\Delta'_i \cap \Delta'_j = 0, i \ne j$ и согласно (2.2)

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta'_i| \le \sum_{i=1}^{n} |I_i| < \delta.$$

Поэтому согласно (1.7) имеем

$$\sum |\Delta'_i F(x + t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.15}$$

Отсюда и из (2.14) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} |I_i F(x + t)| < \varepsilon.$$

Теорема 2.1 доказана. □

Теорема 2.2. *Пусть $F(x)$ почти везде конечная измеримая функция на R_m, которая локально почти всюду абсолютно непрерывна по Витали. Тогда для любого $A > 0$ существуют точка $a = (a_1, ..., a_m)$, куб $T_a = \prod_{j=1}^{n} [a_j, a_j + A]$, $a \in G \cap T_a$, $|G \cap T_a| = |T_a|$, и функция сегмента $\widetilde{F}(\Delta)$ определенная для всех $\Delta \subset T_a$ такие, что*

1) $\widetilde{F}(\Delta) = \Delta F$, если вершины Δ принадлежат множеству $G \cap T_a$

2) $\widetilde{F}(\Delta)$ абсолютно непрерывна и аддитивна.

Доказательство. Для ясности изложения теорему докажем при $m = 2$. Пусть $F(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы. Легко видеть, что для любого $A > 0$ существуют точка $a = (a_1, a_2)$ и множества E_1, E_2, $E_1 \subset \{(x, a_2),\ a_1 \leq x \leq a_1 + A\}$, $E_2 \subset \{(a_1, y),\ a_2 \leq y \leq a_2 + A\}$ такие, что $(a_1, a_2) \in G \cap T_a$, $T_a = [a_1, a_1 + A] \times [a_2, a_2 + A]$, $|E_1| = |E_2| = A$, и если $x \in E_1$, то $|\{(x, y), a_2 \leq y \leq a_2 + A\} \cap G| = A$, если $y \in E_2$, то $|\{(x, y), a_1 \leq x \leq a_1 + A\} \cap G| = A$. Без ограничения общности можно считать, что точка $a = (a_1, a_2)$ является началом координат, т.е. $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Обозначим $T = [0 \leq x \leq A] \times [0 \leq y \leq A]$. Имеем $|T \cap G| = A^2$, $E_1 \subset \{(x, 0),\ 0 \leq x \leq A\}$, $E_2 \subset \{(0, y),\ 0 \leq y \leq A\}$, $|E_1| = |E_2| = A$, для всех $x \in E_1$, $|\{(x, y), 0 \leq y \leq A\} \cap G| = A$, для всех $y \in E_2$, $|\{(x, y), 0 \leq x \leq A\} \cap G| = A$. Для $x \in E_1$ и $y \in E_2$ обозначим через E_x и E_y (соответственно) ортогональные проекции множеств $\{(x, y), 0 \leq y \leq A\} \cap G$, $\{(x, y), 0 \leq x \leq A\} \cap G$ соответственно на $\{(0, y), 0 \leq y \leq A\}$ и на $\{(x, 0), 0 \leq x \leq A\}$. Очевидно

$$|E_x| = A \ \forall x \in E_1, \ |E_y| = A \ \forall y \in E_2. \tag{2.16}$$

В доказательстве теоремы используются следующие определение и лемма.

Определение 2.3. *Пара прямоугольников $\Delta' \subset T$ и $\Delta'' \subset T$ называется правильной парой, если их вершины принадлежат множеству G и если содержащие эти вершины горизонтальные и вертикальные отрезки длины A пересекаются в точках, принадлежащих множеству $G \cap T$.*

Последовательность прямоугольников $\{\Delta_i\}, \Delta_i \subset T$, называется правильной последовательностью, если все пары Δ_i и Δ_j являются "правильными" парами.

Лемма 2.1. *Пусть $\Delta_0 = [x_1^0, x_2^0] \times [y_1^0, y_2^0], \Delta_0 \subset T$ и прямоугольники $\Delta_i = [x_1^i, x_2^i] \times [y_1^i, y_2^i], \Delta_i \subset T, 1 \leq i \leq n$, такие, что все пары Δ_i, Δ_j являются правильными. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует прямоугольник $\Delta_{n+1} = [x_1^{n+1}, x_2^{n+1}] \times [y_1^{n+1}, y_2^{n+1}], \Delta_{n+1} \subset T$ такой, что $|x_1^0 - x_1^{n+1}| < \varepsilon$, $|x_2^0 - x_2^{n+1}| < \varepsilon$, $|y_1^0 - y_1^{n+1}| < \varepsilon$, $|y_2^0 - y_2^{n+1}| < \varepsilon$ и все пары $\Delta_i, \Delta_{n+1}, 1 \leq i \leq n$, являются правильными.*

Доказательство. Рассмотрим множества

$$F_1 = E_2 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} (E_{x_1^i} \cap E_{x_2^i}) \right), \quad F_2 = E_1 \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} (E_{y_1^i} \cap E_{y_2^i}) \right).$$

Из (2.15) следует

$$|F_1| = A, \ |F_2| = A. \tag{2.17}$$

Из определения множества F_2 следует, что для всех $x \in E_2$ отрезки $\{(x, y), 0 \le y \le A\}$ пересекаются с отрезками $\{(x, y_1^i), 0 \le x \le A\}$ и $\{(x, y_2^i), 0 \le x \le A\}$ в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Поэтому в силу второго равенства (2.16) существуют $x_1^{n+1} \in F_2$, $x_2^{n+1} \in F_2$, такие, что

$$|x_1^{n+1} - x_1^0| < \varepsilon, \quad |x_2^{n+1} - x_2^0| < \varepsilon$$

и, при этом, отрезки $\{(x_1^{n+1}, y), 0 \le y \le A\}$, $\{(x_2^{n+1}, y), 0 \le y \le A\}$ пересекаются со всеми отрезками $\{(x, y_1^i), 0 \le x \le A\}$, $\{(x, y_2^i), 0 \le x \le A\}$, $1 \le i \le n$ в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Кроме того,

$$|\{(x_1^{n+1}, y), 0 \le y \le A\} \cap G| = A, \quad |\{(x_2^{n+1}, y), 0 \le y \le A\} \cap G| = A.$$

Ортогональные проекции $E_{x_1^{n+1}}$, $E_{x_2^{n+1}}$ этих множеств на $\{(0, y), 0 \le y \le A\}$ тоже имеют меры

$$|E_{x_1^{n+1}}| = A, \quad |E_{x_2^{n+1}}| = A.$$

Поэтому в силу первого равенства (2.16) имеем

$$|(E_{x_1^{n+1}} \cap E_{x_2^{n+1}}) \cap F_1| = A. \tag{2.18}$$

Для всех $y \in (E_{x_1^{n+1}} \cap E_{x_2^{n+1}}) \cap F_1$ отрезки $\{(x, y), 0 \le x \le A\}$ пересекаются с отрезками $\{(x_1^i, y), 0 \le y \le A\}$, $\{(x_2^i, y), 0 \le y \le A\}$, $1 \le i \le n$, и с отрезками $\{(x_1^{n+1}, y), 0 \le y \le A\}$, $\{(x_2^{n+1}, y), 0 \le y \le A\}$ в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Тогда в силу (2.17) существуют y_1^{n+1}, y_2^{n+1} такие, что $|y_1^{n+1} - y_1^0| < \varepsilon$, $|y_2^{n+1} - y_2^0| < \varepsilon$ и отрезки $\{(x, y_1^{n+1}), 0 \le x \le A\}$, $\{(x, y_2^{n+1}), 0 \le x \le A\}$ пересекаются со всеми отрезками $\{(x_1^i, y), 0 \le y \le A\}$, $\{(x_2^i, y), 0 \le y \le A\}$, $1 \le i \le n+1$, в точках принадлежащих множеству $G \cap T$. Таким образом прямоугольник $\Delta_{n+1} = [x_1^{n+1}, x_2^{n+1}] \times [y_1^{n+1}, y_2^{n+1}]$, удовлетворяет требованиям леммы. □

Доказательство Теоремы 2.2. Заметим, что если прямоугольники Δ' и Δ'' составляют правильную пару, то вершины каждого из минимального числа треугольников, объединение которых совпадает с симметрической разностью $(\Delta' \setminus \Delta'') \cup (\Delta'' \setminus \Delta')$, принадлежат множеству $G \cap T$. Расстоянием прямоугольников Δ' и Δ'' считаем величину

$$\rho_1(\Delta', \Delta'') = |(\Delta' \setminus \Delta'') \cup (\Delta'' \setminus \Delta')|.$$

Расстояние $\rho_2(\Delta' F, \Delta'' F)$ смешанных разностей $\Delta' F$, $\Delta'' F$ определяется следующим образом: если $(\Delta' \setminus \Delta'') \cup (\Delta'' \setminus \Delta') = \cup \Delta_j$, где Δ_j конечное число попарно непересекающиеся прямоугольники с вершинами, принадлежащими множеству $G \cap T$, полагаем $\rho_2(\Delta' F, \Delta'' F) = |\sum \Delta_j F|$. Последовательным применением леммы 2.1 получим, что для любой последовательности $\varepsilon_n \searrow 0$ и для любого прямоугольника $\Delta \subset T$, $\Delta = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ существует правильная последовательность прямоугольников $\Delta_i \subset T$, $\Delta_i = [x_1^i, x_2^i] \times [y_1^i, y_2^i]$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$\lim_{i\to\infty} \rho_1(\Delta, \Delta_i) = 0.$$

Отсюда следует, что $\rho_1(\Delta_i, \Delta_j) \to 0$ при $i, j \to \infty$, т.е. последовательность $\{\Delta_i\}$ фундаментальна в метрике ρ_1.

Из абсолютной непрерывности функции $F(x, y)$ на множестве $G \cap T$, следует

$$\rho_2(\Delta_i F, \Delta_j F) \to 0, \quad \text{при} \quad i, j \to \infty$$

и существование предела $\lim_{i\to\infty} \Delta_i F = \widetilde{F}(\Delta)$. Этот предел единственный. Действительно, если $\{\Delta_i^1\}$ и $\{\Delta_i^2\}$ правильные последовательности и $\rho_1(\Delta_i^1, \Delta) \to 0$, $\rho_1(\Delta_i^2, \Delta) \to 0$, то последовательным применением леммы 2.1 найдем правильную последовательность Δ_i^3, такую, что $\rho_1(\Delta_i^3, \Delta) \to 0$, и все пары Δ_i^1, Δ_i^3, Δ_i^2, Δ_i^3 являются правильными. Тогда $\rho_1(\Delta_i^1, \Delta_i^3) \to 0$, $\rho_1(\Delta_i^2, \Delta_i^3) \to 0$. Из абсолютной непрерывности $F(x, y)$ на $G \cap T$, следует

$$\lim_{i\to\infty} \rho_2(\Delta_i^1 F, \Delta_i^3 F) = \lim_{i\to\infty} \rho_2(\Delta_i^2 F, \Delta_i^3 F) = 0.$$

Следовательно, получаем

$$\lim_{i\to\infty} \Delta_i^1 F = \lim_{i\to\infty} \Delta_i^3 F = \lim_{i\to\infty} \Delta_i^2 F$$

и для любого $\Delta \subset T$ величина $\widetilde{F}(\Delta)$ определяется единственным образом. Если вершины прямоугольника Δ принадлежат множеству $G \cap T$, то $\widetilde{F}(\Delta) = \Delta F$, ибо в качестве последовательности $\{\Delta_i\}$ можно взять последовательность $\Delta_i = \Delta$, $\forall i$. Из определения функции сегмента $\widetilde{F}(\Delta)$ немедленно следует, что она абсолютно непрерывна. Проверим аддитивность этой функции. Пусть

$$\Delta = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, i \neq j.$$

Для $\varepsilon > 0$, применяя лемму 2.1, выберем прямоугольники $\Delta_i' \subset \Delta_i$, $1 \leq i \leq n$ такие, что все пары Δ_i', Δ_j' правильные и

$$\rho_1(\Delta_i, \Delta_i') < \frac{\varepsilon}{n}, \quad \rho_2(\widetilde{F}(\Delta_i), \Delta_i' F) < \frac{\varepsilon}{n}. \tag{2.19}$$

Затем выберем прямоугольник Δ' с вершинами из $G \cap T$, такой, что

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Delta_i' \subset \Delta', \quad \rho_2(\widetilde{F}(\Delta), \Delta' F) < \varepsilon \tag{2.20}$$

и, при этом, все пары Δ', Δ_i' правильны. Тогда имеем

$$\rho_2(\Delta' F, \sum_{i=1}^{n} \Delta_i' F) < \varepsilon. \tag{2.21}$$

Из (2.18) – (2.20) следует

$$\rho_2(\widetilde{F}(\Delta), \sum_{i=1}^{n} \widetilde{F}(\Delta_i)) < 3\varepsilon.$$

Итак

$$\rho_2(\widetilde{F}(\Delta), \sum \widetilde{F}(\Delta_i)) = 0, \quad \text{и} \quad \widetilde{F}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{F}(\Delta_i).$$

Теорема 2.2 доказана для $m = 2$. Аналогичными, но технически более сложными рассуждениями, можно установить справедливость утверждения теоремы в общем случае. □

Замечание 2.1. *Обозначим*

$$\Delta_x = \prod_{j=1}^{m} [a_j, x_j), \ x = (x_1, ..., x_m) \in \prod_{j=1}^{m} [a_j, a_j + A] = T, \quad a = (a_1, ..., a_m) \in G.$$

Легко проверить, что для почти всех x все вершины прямоугольника Δ_x будут принадлежать множеству $T \cap G$. При $m = 2$ это следует из того, что согласно выбору множеств E_1 и E_2, $|E_1| = A, |E_2| = A$,

$$|\{(x, y), a_1 \le x \le a_1 + A\} \cap G| = A \quad \text{и} \quad |\{(x, y), a_2 \le y \le a_2 + A\} \cap G| = A \tag{2.22}$$

для всех $y \in E_2$ и всех $x \in E_1$ соответственно.

Обозначим $F_1 = \{(x, y), \ x \in E_1 \ , a_2 \le y \le a_2 + A\} \cap G$. Имеем $|F_1| = A^2$, следовательно, для почти всех $y \in E_2$ имеем $|\{(x, y), a_1 \le x \le a_1 + A\} \cap G| = A$. Следовательно, для некоторого множества $E_2' \subset E_2$, $|E_2'| = A$ выполняется

$$|\{(x, y), \ y \in E_2' \ , a_1 \le x \le a_1 + A\} \cap F_1| = A^2. \tag{2.23}$$

Если $(x, y) \in \{(x, y), \ a_1 \le x \le a_1 + A\} \cap F_1$, то $(x, 0) \in E_1$ и $(0, y) \in E_2$. Следовательно, для почти всех (x, y) все вершины прямоугольника $[a_1, x] \times [a_2, y]$ будут принадлежать множеству G. Напомним, что $(a_1, a_2) \in G$. Таким образом, для почти всех (x, y) имеем $\widetilde{F}(\Delta_{xy}) = \Delta_{xy} F$, $a_1 \le x \le a_1 + A$, $a_2 \le y \le a_2 + A$.

Итак в общем случае имеем

$$\widetilde{F}(\Delta_x) = \Delta_x F \quad \text{для почти всех} \quad x = (x_1, ..., x_m) \in \prod_{j=1}^{m} [a_j, a_j + A].$$

Теорема 2.3. *Пусть $F(x)$ почти везде конечная измеримая функция определенная на R_m, такая, что для каждого $t \in E_0$, где E_0 некоторое измеримое множество положительной меры, функция $F(x+t)$, как функция от x локально абсолютно непрерывна по Витали на двоичной сети $\{(p_1 \cdot 2^{-k_1}, p_2 \cdot 2^{-k_2}, ..., p_m \cdot 2^{-k_m})\}$. Пусть далее G множество точек аппроксимативной непрерывности функции $F(x)$. Тогда для любого натурального N существуют точка $a = (a_1, ..., a_m) \in G$ и функция сегмента $\widetilde{F}(\Delta)$ определенная для всех $\Delta \subset T_a = \prod [a_j, a_j + N)$, такие, что*

1) $\widetilde{F}(\Delta)$, аддитивна и абсолютно непрерывна

2) $\widetilde{F}(\Delta) = \Delta F$, если вершины Δ принадлежат множеству $G \cap T_a$

$$3) \quad \widetilde{F}(\Delta_x) = \int_{a_1}^{x_1} ... \int_{a_m}^{x_m} \varphi(u_1, u_2, ..., u_m) du_1 ... du_m \quad \text{для всех } x = (x_1, ..., x_m) \in T_a,$$

где $\varphi(u_1, u_2, ..., u_m)$ интегрируемая на T_a функция.

Доказательство. По теореме 2.1 функция $F(x)$ будет абсолютно непрерывной по Витали на множестве $G \cap T_a$, а по теореме 2.2 существует функция сегмента $\widetilde{F}$, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Докажем выполнение условия 3).

Для простоты обозначений будем считать, что $a = (a_1, ..., a_m)$ совпадает с началом координат. Для данного натурального k куб $[0, N)^m$ представляется как объединение попарно непересекающихся кубов $\Delta_k(\nu)$, $1 \le \nu \le N \cdot 2^{km}$

$$[0, N)^m = \bigcup_{\nu=1}^{N \cdot 2^{km}} \Delta_k(\nu), \quad |\Delta_k(\nu)| = 1/2^{km}.$$

Определим для k кусочно постоянную на $[0, N)^m$ функцию

$$\Phi_k(x) = \frac{\widetilde{F}(\Delta_k(\nu))}{|\Delta_k(\nu)|}, \quad x \in \Delta_k(\nu). \tag{2.24}$$

Из аддитивности функции $\widetilde{F}(\Delta)$ и из (1.50) следует, что последовательность $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является мартингальной последовательностью, а из абсолютной непрерывности $\widetilde{F}(\Delta)$ следует, что $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является равностепенно абсолютно непрерывно интегрируемой мартингальной последовательностью. Поэтому [2] существует интегрируемая на $[0, N)^m$ функция $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, такая что $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $\varphi(x)$ почти всюду и в метрике L_1 на $[0, N)^m$. Итак

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^N \cdots \int_0^N |\Phi_k(x) - \varphi(x)| dx = 0. \tag{2.25}$$

Если $x = (x_1, \dots, x_m) = (p_1/2^{k_1}, \dots p_m/2^{k_m})$ точка с двоично рациональными координатами, то из мартингального свойства последовательности $\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и из (1.51) следует, что для некоторого k_0, если $k > k_0$, то

$$\widetilde{F}(\Delta_x) = \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \cdots du_m.$$

В силу абсолютной непрерывности $\widetilde{F}(\Delta)$ имеем

$$\rho_2(\widetilde{F}(\Delta_x), \widetilde{F}(\Delta_y)) \to 0 \text{ при } |x - y| = \sum |x_j - y_j| \to 0,$$

а в силу интегрируемости $\varphi(u_1, \dots u_m)$ имеем

$$\left| \int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \cdots du_m - \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \cdots du_m \right| \to 0$$

при $|x - y| \to 0$. Следовательно равенство (2.23) выполняется также для всех $x \in [0,1)^N$, так как двоично рациональные точки всюду плотны на $[0, N)^m$. □

3. Признаки интегрируемости кратных тригонометрических рядов

Приведем некоторые обозначения и вспомогательные результаты. Рассматриваются кратные тригонометрические ряды

$$\sum c_n e^{2\pi i n x}, \tag{3.1}$$

где $n = (n_1, \dots, n_m)$ n_j-целые, $x = (x_1, \dots, x_m), t = (t_1, \dots, t_m)$ элементы R_m, $nx = \sum n_j x_j$, $c_n = \bar{c}_{-n}$. Предполагается, что выполнено одно из следующих условий

$$|c_n| \le M \text{ при любом } n$$

или

$$A_2) \qquad |c_n| \le M \text{ при любом } n$$

и для некоторых фиксированных индексов j_ν, $j_\nu \le m$, $1 \le \nu \le \nu_0 \le m$ выполняется равенство

$$\lim_{n_{j_\nu} \to \infty} c_{n_1, \dots, n_{j_\nu - 1}, n_{j_\nu}, \dots, n_m} = 0$$

для всех фиксированных n_j, $j \ne j_\nu$.

Формальным интегрированием ряда (3.1), получаем

$$F(x) = c + c_0 \prod_{j=1}^{m} x_j + \sum_B \prod_{j \in B} x_j \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)} e^{2\pi i n(B) x}}{\prod\limits_{j \notin B} 2\pi i n_j} + \sum_n{}' \frac{c_n e^{2\pi i n x}}{\prod\limits_{j=1}^{m} 2\pi i n_j}, \tag{3.2}$$

где $B \subset \{1, 2, \dots m\}$ непустые подмножества, $B \neq \{1, 2, \dots, m\}$ и $n(B)$ вектор с целочисленными координатами, для которого $n_j = 0$ при $j \in B$ и $n_j \neq 0$ при $j \notin B$. Считается, что в сумме $\sum'$ все координаты вектора $n = (n_1 \dots n_m)$ отличны от нуля. Из условия $|a_n| \leq M$ при любом $n = 1, 2, \dots$, следует, что сумма $F(x)$ определена почти всюду на R_m, так как ряд (2.2) сходится в метрике L_2 на любом конечном кубе. Следовательно значения $F(x+t)$, определены для всех $x = \{x_1, \dots, x_m\}$ координаты которых двоично рациональные числа, одновременно для всех t, принадлежащих некоторому множеству E, где $|R \backslash E| = 0$.

Для ограниченной области Q из R_m, содержащей одновременно n и $-n$, положим

$$S_Q(x) = \sum_{n \in Q} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Сферические частичные суммы ряда (3.1) определяются равенствами

$$S_R(x) = \sum_{\|n\| \leq R} c_n e^{2\pi i n x}, \ \|n\|^2 = \sum |n_j|^2,$$

Если $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ где ν_j натуральные, то выражение

$$S_\nu(x) = \sum_{|n| \leq \nu} c_n e^{2\pi i n x},$$

где $|n| \leq \nu$ означает $|n_j| \leq \nu_j$, $1 \leq j \leq m$, называются прямоугольными частными суммами ряда (3.1). Когда $\nu = (N, \dots, N)$, обозначаем через

$$S_N(x) = \sum_{|n| \leq \nu = (N, \dots, N)} c_n e^{2\pi i n x}$$

кубические частичные суммы ряда (3.1).

Из (3.2) следуют

$$F(x+t) = c + c_0 \prod_{j=1}^{m} (x_j + t_j) + \sum_B \left[\prod_{j \in B} (x_j + t_j) \right] \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)}}{\prod\limits_{j \notin B} 2\pi i n_j} e^{2\pi i n(B) x} e^{2\pi i n(B) t} +$$

$$+ \sum_n{}' \frac{c_n}{\prod\limits_{j=1}^{m} 2\pi i n_j} e^{2\pi i n x} e^{2\pi i n t}$$

$$\Delta_k^p F(x+t) = c_0 2^{-km} + \sum_B 2^{-k|B|} \sum_{n(B)} \frac{c_{n(B)} e^{2\pi i n(B) t}}{\prod\limits_{j \notin B} 2\pi i n_j} \prod_{j \notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} +$$

$$+ \sum_n{}' \frac{c_n e^{2\pi i n t}}{\prod\limits_{j=1}^{m} 2\pi i n_j} \prod_{j=1}^{m} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j}, \tag{3.3}$$

где

$$\Delta_k^p = \prod_{j=1}^m [\frac{p_j-1}{2^k}, \frac{p_j}{2^k}), \ \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} = e^{2\pi i n_j p_j 2^{-k}} - e^{2\pi i n_j (p_j - 1)2^{-k}}. \tag{3.4}$$

Имеем

$$\int_{\Delta_k^p} S_N(x+t)dx = c_0 2^{-km} + \sum_B 2^{-k|B|} \sum_{|n(B)|\le N} \frac{c_{n(B)} e^{2\pi i n(B)t}}{\prod_{j\notin B} 2\pi i n_j} \prod_{j\notin B} \Delta_k^{p_j} e^{2\pi n_j x_j} +$$

$$+ \sum_{|n|\le N} \frac{c_n e^{2\pi i n t}}{\prod_{j=1}^m 2\pi i n_j} \prod_{j=1}^m \Delta_k^{p_j} e^{2\pi i n_j x_j} \tag{3.5}$$

В равенствах (3.3) – (3.5), $|B|$ означает число элементов множества B. Заметим также, что для почти всех t, величина $\Delta_k^p F(x+t)$ является аддитивной функцией сегмента, определенной на сегментах Δ_k^p, $k = 1, 2, \ldots$; $p = (p_1 \cdots p_m)$, p_j–целые. Имеем для фиксированного k $[0,1)^m = \bigcup_p \Delta_k^p$, $1 \le p_j \le 2^k$.

Рассматриваются кусочно постоянные функции

$$\psi_k(x,t) = \Delta_k^p F(x+t), \ \ \psi_k^{(N)}(x,t) = \int_{\Delta_k^p} S_N(x+t)dx, \ x \in \Delta_k^p$$

$$\Phi_k(x,t) = 2^{-km}\psi_k(x,t), \ \ \Phi_k^{(N)}(x,t) = 2^{-km}\psi_k^{(N)}(x,t), \ x \in \Delta_k^p. \tag{3.6}$$

Из (3.3), (3.4) и из ограниченности коэффициентов c_n следует, что для любого m-мерного куба T, $|T| = 1$ и для любого фиксированного Δ_k^p выполняются равенства

$$\lim_{N\to\infty} \int_T |\Phi_k^{(N)}(x,t) - \Phi_k(x,t)|^2 dt = 0, \ \lim_{N\to\infty} \int_T |\psi_k(x,t) - \psi_k^{(N)}(x,t)|^2 dt = 0.$$

Определение 3.1. *Будем говорить, что ряд $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ по кратной системе Хаара, соответствует тригонометрическому ряду (2.1), если в метрике $L_2(T)$ выполняется условие*

$$a_\mu(t) = \lim_{N\to\infty} \int_T S_N(x+t)\chi_\mu(x)dx.$$

Существование предела немедленно следует из ограниченности коэффициентов c_n (см. [3]).

Следующая лемма доказана в работе [3].

Лемма 3.1. *Существует множество $E_0 \subset T, |E_0| = |T| = 1$ такое, что*

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \Phi_k(x,t), \ \forall t \in E_0, \ \forall x \in \Delta_k^p \subset [0,1)^m. \tag{3.7}$$

Отметим, что утверждение леммы немедленно следует из равенства

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu^{(N)}(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} S_N(x+t)dx, \quad x \in \Delta_k^p,$$

где

$$a_\mu^{(N)}(t) = \int\limits_T S_N(x+t)\chi_\mu(x)dx,$$

переходом к пределу при $N \to \infty$ в метрике L_2, именно

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) \overset{L_2}{=} \lim_{N\to\infty} \Phi_k^{(N)}(x,t) = \Phi_k(x,t), \ \forall x \in \Delta_k^p,$$

откуда следует (3.7).

Замечание 3.1. *Так как в формулировке леммы 3.1, T-произвольный куб, где $|T| = 1$, то можно считать, что коэффициенты $a_\mu(t)$ определены для почти всех $t \in R_m$ и что равенство (3.7) выполнено для почти всех $t \in R_m$.*

Лемма 3.2. *Пусть T, $|T| = 1$ произвольный куб и для некоторого множества $E \subset T$, $|E| = |T|$ выполнено условие: если $t \in E$, то ряд $\sum\limits_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$, соответствующий ряду (3.1) является рядом Фурье некоторой интегрируемой на $T_0 = [0,1)^m$ функции $f_t(x)$. Тогда функция $F(x)$, определенная равенством (3.2) локально почти всюду абсолютно непрерывна по Витали.*

Доказательство. Из (3.7) и из условия леммы следует, что для каждого $t \in E$ имеем

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \Phi_k(x,t) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f_t(u)du, \ x \in \Delta_k^p, \Delta_k^p \subset [0,1)^m, \ k = 1,2,\ldots.$$

Так как

$$\Phi_k(x,t) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} \ \text{ и } \ \Delta_k^p F(x+t) = \int\limits_{\Delta_k^p} f_t(u)du,$$

то функция $F(x+t)$, как функция от x абсолютно непрерывна по Витали на множестве сегментов $\{\Delta_k^p\}$.

В силу произвольности множества T, из теоремы 2.1 следует, что функция $F(x)$ будет абсолютно непрерывной на множестве $G \cap Q$, где G-множество точек аппроксимативной непрерывности функции $F(x)$ и $Q \subset R_m$ любая ограниченная область. Так как $|R \backslash G| = 0$, то лемма доказана. □

Замечание 3.2. *Так как функция $\phi_k(x,t)$ периодична относительно t, легко видеть, что утверждение леммы верно также при предположении, что ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех $t \in [0,1)^m$ является рядом Фурье некоторой интегрируемой на $[0,1)^m$ функции $f_t(x)$.*

Теорема 3.1. *Для того, чтобы ряд (3.1) с ограниченными коэффициентами был рядом Фурье интегрируемой на $[0,1)^m$ периодической функции $\varphi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы сумма $F(x)$ ряда (3.2) была почти всюду локальна абсолютно непрерывной по Витали.*

Достаточность. В силу теоремы 2.3 существуют точка $a = (a_1, \dots, a_m)$, интегрируемая на $T_a = \prod_{j=1}^{m} [a_j, a_j + 2)$ функция $\varphi(u)$ и абсолютно непрерывная аддитивная функция сегмента $\widetilde{F}(\Delta)$, $\Delta \subset \prod_{j=1}^{m} [a_j, a_j + 2]$, такие, что $\widetilde{F}(\Delta) = \Delta F(x)$, если все вершины Δ принадлежат $G \cap T_a$, $|R_m \backslash G| = 0$ и для любого $x \in [0,2)^m$

$$\widetilde{F}(\Delta_x) = \int\limits_{\Delta_x} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m = \int\limits_0^{x_1} \cdots \int\limits_0^{x_m} \varphi(u_1, \dots, u_m) du_1 \dots du_m.$$

Рассмотрим кусочно постоянные на $[0,1)^m$ функции

$$\Phi_k(x,t) = \frac{\widetilde{F}(\Delta_k^p(t))}{|\Delta_k^p|}, \ x \in \Delta_k^p, \ \bigcup_p \Delta_k^p = [0,1)^m, \ k = 1, 2, \dots,$$

где Δ_k^p попарно не пересекаются. Имеем

$$\frac{\widetilde{F}(\Delta_k^p(t))}{|\Delta_k^p|} = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int\limits_{\Delta_k^p(t)} \varphi(u) du.$$

Легко видеть, что для почти всех $t \in [0,1)^m$, вершины кубов $\Delta_k^p(t)$ будут принадлежать множеству $G \cap [0,2]^m$. Поэтому если $\Delta_k^p = \prod_{j=1}^{m} [\frac{p_j - 1}{2^k}, \frac{p_j}{2^k}]$, то для почти всех $t \in [0,1)^m$

$$\frac{\widetilde{F}(\Delta_k^p(t))}{|\Delta_k^p|} = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int\limits_{\frac{p_1-1}{2^k}+t_1}^{\frac{p_1}{2^k}+t_1} \cdots \int\limits_{\frac{p_m-1}{2^k}+t_m}^{\frac{p_m}{2^k}+t_m} \varphi(u_1, u_2, \dots, u_m) du_1 \cdots du_m.$$

Следовательно для почти всех $t \in [0,1)^m$

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \Phi_k(x,t) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|} = \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int\limits_{\Delta_k^p} \varphi(x+t) dx, \ k = 1, 2, \dots.$$

Это означает, что соответствующий ряду (3.1) ряд $\sum\limits_{\mu} a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех $t \in [0,1)^m$ является рядом Фурье функции $\varphi(x+t)$. В силу теоремы 1.1 работы [3], ряд (3.1) будет рядом Фурье функции $\varphi(x)$.

Необходимость. Если ряд (3.1) является рядом Фурье функции $\varphi(x)$ то согласно леммы 1.3 работы [3] для почти всех $t \in [0,1)^m$ имеет место равенство

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int\limits_{\Delta_k^p} \varphi(x+t)dx, \ x \in \Delta_k^p.$$

Таким образом, для почти всех $t \in [0,1)^m$ функция $F(x+t)$ абсолютно непрерывна по Витали на двоичной сети сегментов $\{\Delta_k^p\}$. Следовательно по теореме 2.1 (см. также замечание 3.2) функция $F(x)$ будет локально почти всюду абсолютно непрерывной по Витали. □

Следующая теорема, эквивалентна теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Для того, чтобы ряд (3.1) с ограниченными коэффициентами был рядом Фурье интегрируемой на* $[0,1)^m$ *функции, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему ряд* $\sum\limits_{\mu} a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ *обладал следующим свойством: Для каждого* $t \in E$ *где* $E \subset [0,1)^m$ *некоторое множество полной меры* $|E| = |[0,1)^m|$, *этот ряд являлся рядом Фурье некоторой интегрируемой на* $[0,1)^m$ *функции* $f_t(u)$.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 1.3 работы [3], согласно которой если ряд (3.1) является рядом Фурье функции $f(x)$ то для почти всех t

$$\Delta_k^p F(x+t) = \int\limits_{\Delta_k^p} f(x+t)dx,$$

и следовательно, имеем

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f(u+t)du, \ x \in \Delta_k^p.$$

Это означает, что для почти всех $t \in [0,1)^m$ ряд $\sum\limits_{\mu} a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ является рядом Фурье интегрируемой функции.

Достаточность. Пусть для каждого $t \in E$, $E \subset [0,1)^m$, $|E| = |[0,1)^m|$ ряд $\sum\limits_{\mu} a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ является рядом Фурье некоторой интегрируемой на $[0,1)^m$ функции $f_t(u)$. Тогда для всех $t \in E$ имеем

$$\sum_{\mu \le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int\limits_{\Delta_k^p} f_t(u)du \ \forall x \in \Delta_k^p$$

Так как

$$\sum_{\mu\le 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{|\Delta_k^p|}\ x\in\Delta_k^p \text{ и } \Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f_t(u)du$$

то $F(x+t)$ для каждого $t\in E$ является абсолютно непрерывной функцией по Витали на двоичной сети интервалов $\{\Delta_k^p\}$. Тогда в силу теоремы 2.1 (см. также замечание 3.2), $F(x)$ будет локально почти всюду абсолютно непрерывной функцией. Для завершения доказательства заметим, что по теореме 3.1 ряд (3.1) будет рядом Фурье. □

□

Теорема 3.2 является усилением следующей теоремы.

Теорема 3.3 (3). *Для того, чтобы ряд* $\sum c_n e^{2\pi inx}$, $|c_n|\le M$ *был рядом Фурье интегрируемой на* $[0,1)^m$ *функции* $f(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему ряд* $\sum\limits_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ *для почти всех* $t\in[0,1)^m$ *был рядом Фурье функции* $f(x+t)$.

В доказательствах следующих теорем используются некоторые результаты работы [3]. Для полноты изложения приводим некоторые обозначения и формулировки нужных нам результатов из [3].

Для последовательности областей $Q_1\subset Q_2\subset\cdots Q_\nu\subset\cdots$, $\cup Q_\nu = R_m$, обозначим через $\Phi_k^{Q_\nu}(x,t)$, $k=1,2,\ldots;\ \ t\in[0,1)^m$ кусочно постоянные функции

$$\Phi_k^{Q_\nu}(x,t) = \frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p} S_{Q_\nu}(u+t)du,\ \ x\in\Delta_k^p,$$

где $\bigcup\limits_p \Delta_k^p = [0,1)^m$ и кубы Δ_k^p попарно не пересекаются.

Заметим что для фиксированного k имеет место равенство

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{T_m} |\Phi_k(x,t) - \Phi_k^{Q_\nu}(x,t)|^2 dt = 0, \tag{3.8}$$

где $\Phi_k(x,t)$ функция определенная равенством (3.6).

Каждой точке $x\in[0,1)^m$ соответствует ограниченное число последовательностей вложенных кубов $\Delta_1^{p(1)}\supset\Delta_2^{p(2)}\supset\cdots\supset\Delta_k^{p(k)}\supset\ldots$ таких что $x\in\overline{\Delta_k^p}$ $\forall k$, где $\overline{\Delta_k^p}$ замыкание куба Δ_k^p.

Заметим, что из (3.8) следует существование последовательности $Q_{\nu_1}\subset Q_{\nu_2}\subset\cdots\subset Q_{\nu_k}\subset\cdots$ для которой

$$\lim_{k\to\infty} |\Phi_k(x,t) - \Phi_k^{Q_{\nu_k}}(x,t)| = 0$$

для всех $x \in [0,1)^m$, и для каждого t принадлежащего некоторому множеству $E_0 \in [0,1)^m$, $|E_0| = |[0,1)^m| = |T_m|$. При этом значениями функций $\Phi_k(x,t)$ или $\Phi_k^{Q_{\nu_k}}(x,t)$ в точке x считаются значения этих функций на кубах $\Delta_k^{p(k)}$.
Следующее определение приведено в работе [3].

Определение 3.2. *Будем говорить, что ряд $\sum_\mu a_\mu \chi_\mu(x)$ по кратной системе Хаара обладает свойством A_1 относительно переменной x_j если*

A_1) существует последовательность $k(q) \uparrow +\infty$ при $q \uparrow +\infty$, такая, что если $2^{K(q)} \le \mu_{j(q)} \le 2^{K(q)+1}$ для всех q=1,2,..., то

$$\lim_{q\to\infty} \frac{|a_{\mu_1,\ldots,\mu_{j(q)-1}\mu_{j(q)},\ldots,\mu_m}|}{max|\chi_{\mu_{j(q)}}(x_{j(q)})|} = 0$$

для любых фиксированных индексов $\mu_i, i \neq j(q)$.

Теорема 3.4 (3). *Пусть $j_\nu, 1 \le \nu < \nu_0, \nu_0 \le m$, фиксированные индексы и ряд $\sum a_\mu \chi_\mu(x)$ удовлетворяет условию A_1) относительно каждой переменной x_{j_ν}. Пусть, далее некоторая последовательность $A_{l(q)}(x), l_q \uparrow \infty$ прямоугольных частичных сумм этого ряда сходится по мере на $[0,1)^m$ к интегрируемой на $[0,1)^m$ функции $f(x)$ и*

$$\sup_{l(q)} |A_{l(q)(x)}| < +\infty$$

для всех x, кроме быть может, точек принадлежащих объединению счетного числа гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям $x_{j_\nu}, 1 \le \nu \le \nu_0$. Тогда этот ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

Теорема 3.5 (3). *Если тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условию A_2) для некоторой переменной x_j, то соответствующий ему ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для каждого t принадлежащего некоторому множеству $E_0 \subset [0,1)^m, |E_0| = |[0,1)^m|$, обладает свойством A_1) для той же переменной x_j.*

Очевидно, отсюда следует:

Если тригонометрический ряд (3.1) обладает свойством A_2) для переменных $x_{j_\nu}, 1 \le \nu \le \nu_0$, то соответствующий ему ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ обладает свойством A_1) относительно тех же переменных x_{j_ν} для почти всех $t \in [0,1)^m$.

Из приведенных теорем 2.1 и 3.4 работы [3] немедленно следует утверждение.

Теорема 3.6. *Пусть тригонометрический ряд (3.1) обладает свойством A_2) для переменных $x_{j_\nu}, 1 \le \nu \le \nu_0 \le m$ и некоторая последовательность $\sum_{\mu \le 2^{k_q}} a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ где $k_q \uparrow +\infty$ при $q \to \infty$, частичных сумм соответствующего ему ряда $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех $t \in [0,1)^m$ обладает свойствами* *a)* $\sum_{\mu\le 2^{k_q}} a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ *сходится по мере при* $q\to\infty$ *к некоторой интегрируемой на* $[0,1)^m$ *функции* $f_t(x)$

b) $\sup_q|\sum_{\mu\le 2^{k_q}} a_\mu(t)\chi_\mu(x)|<\infty$ *для всех* x *не принадлежащих объединению* E_t *счетного числа гиперплоскостей, ортогональных осям* $x_{j_\nu}, 1\le\nu\le\nu_0$.

Тогда ряд $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ *является рядом Фурье функции* $f_t(x)$ *для каждого* $t\in E_0$, *где* $E_0\subset[0,1)^m, |E_0|=|[0,1)^m|$.

В доказательствах последующих теорем пользуемся теоремами 3.2, 3.3 и мартингальнымы свойствами кубических частичных сумм рядов по кратной системе Хаара.

Теорема 3.7. *Пусть тригонометрический ряд (3.1) обладает свойством* A_2) *и некоторая последовательность* $S_{Q_\nu}(x)$, *где* $Q_1\subset\ldots\subset Q_\nu\subset,\cup Q_\nu=R_m$, *этого ряда имеет интегрируемую нижнюю мажоранту, т.е.*

$$S_{Q_\nu}(x)\ge\varphi(x),\quad \forall x,\nu, \tag{3.9}$$

где $\varphi(x)$ *интегрируемая на* $[0,1)^m$ *периодическая функция. Пусть, далее, некоторая последовательность* $\sum_{\mu\le 2^{k_q}} a_\mu(t)\chi_\mu(x)$, $k_q\uparrow+\infty$ *при* $q\uparrow+\infty$, *частных сумм* $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ *соответствующих ряду (3.1) удовлетворяет неравенству*

$$\sup_q\Big|\sum_{\mu\le 2^{k_q}} a_\mu(t)\chi_\mu(x)\Big|<\infty \tag{3.10}$$

для почти всех $t\in[0,1)^m$ *и для всех* x, *не принадлежащих объединению* E_t *счетного числа гиперплоскостей, ортогональных к координатным осям* $x_{j_\nu}, 1\le\nu\le\nu_0\le m$. *Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье.*

Доказательство. Рассмотрим последовательности кусочно постоянных на $[0,1)^m$ функций

$$B_k(x,t)=\frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p}\varphi(u+t)\,du,\quad x\in\Delta_k^p$$

и

$$\Phi_k^{Q_\nu}(x,t)=\frac{1}{|\Delta_k^p|}\int_{\Delta_k^p}S_{Q_\nu}(u+t)\,du,\ x\in\Delta_k^p,\nu=1,2,\ldots.$$

Из (2.28) следует, что для фиксированного k имеем, что при любых x и t

$$B_k(x,t)\le\Phi_k^{Q_\nu}(x,t),\ \nu=1,2,\ldots. \tag{3.11}$$

Из (3.8) следует, что для некоторой последовательности $Q_{\nu(l)},\nu(l)\to\infty$ при $l\to\infty$ выполняется

$$\lim_{l\to\infty}\Phi_k^{Q_{\nu(l)}}(x,t)=\Phi_k(x,t) \tag{3.12}$$

для всех x, и для каждого $t \in E_0$ где $E_0 \subset T_m$ некоторое множество полной меры.

Если $\sum_\mu b_\mu(t)\chi_\mu(x)$ ряд Фурье по кратной системе Хаара функции $\varphi(x+t)$ и ряд $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ соответствующий ряду (3.1) ряд по кратной системе Хаара, то из (3.10) и (3.11) следует, что для почти всех $t \in T_m$ имеем

$$\sum_{\mu \leq 2^k} b_\mu(t)\chi_\mu(x) \leq \sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t)\chi\mu(x), \tag{3.13}$$

для всех k и x. Обозначим

$$D_k(x,t) = \sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \sum_{\mu \leq 2^k} b_\mu(t)\chi_\mu(x) = \sum_{\mu \leq 2^k} (a_\mu(t) - b_\mu(t))\chi_\mu(x).$$

Имеем $D_k(x,t) \geq 0$ для почти всех t. Так как для почти всех t, $D_k(x,t), k = 1, 2, ...$, является регулярной мартингальной последовательностью, то [4] или [5] стр. 24 для почти всех t существует предел

$$\lim_{k \to \infty} \Phi_k(x,t) = \psi_t(x) \text{ для почти всех } x \in T_m, \tag{3.14}$$

где $\psi_t(x)$ почти везде конечная на $x \in T_m$, измеримая функция.

Так как $D_k(x,t) \geq 0$ для почти всех x, и для всех $t \in E_0$, где $E_0 \subset T_m, |E_0| = |T_m|$ и, с другой стороны,

$$\int_{T_m} D_k(x,t)\, dx \leq M, \quad k = 1, 2, ...,$$

то по теореме Фату $\psi_t(x)$ интегрируема на T_m для почти всех t. Но ряд $\sum_\mu b_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех $t \in T_m$, сходится к интегрируемой функции $\phi(x+t)$ для почти всех x, поэтому ряд $\sum_\mu a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для почти всех t будет сходится к некоторой интегрируемой функции $f_t(x)$ для почти всех $x \in T_m$.

Так как по условию теоремы ряд (3.1) обладает свойством A_2) относительно переменных x_{j_ν}, то из сформулированной выше теоремы 2.1 работы [3] следует, что ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ для каждого фиксированного $t \in E_0, E_0 \subset T_m, |E_0| = |T_m|$, будет обладать свойством A_1) для тех же переменных x_{j_ν}.

Из условия (3.9) и из теоремы 3.3 следует, что ряд $\sum a_\mu(t)\chi_\mu(x)$ является рядом Фурье функций $f_t(x)$, для почти всех $t \in T_m$. Отсюда, согласно теореме 3.2, ряд (3.1) является рядом Фурье. □

Следующее утверждение следует из теоремы 3.7.

Теорема 3.8. *Пусть тригонометрический ряд (3.1) удовлетворяет условию A_2) и для некоторой последовательности $S_{Q_\nu}(x), Q_1 \subset ... \subset Q_\nu ..., \cup Q_\nu = R_m$ его* *частичных сумм выполняется*

$$\varphi(x) \leq S_{Q_\nu}(x),$$

где $\varphi(x)$ интегрируемая на T_m периодическая функция. Пусть, далее для почти всех t выполняется условие:

для всех x не принадлежащих объединению E_t счетного числа гиперплоскостей, ортогональных к осям x_{j_ν} имеет место неравенство

$$\sup_k \left| \frac{1}{|\Delta_k^{p(k)}|} \int_{\Delta_k^{p(k)}} S_{2^{\alpha mk}}(u+t)\, du \right| < \infty$$

где $\Delta_1^{p(1)} \supset \Delta_2^{p(2)} \supset \ldots \supset \Delta_k^{p(k)} \supset ..$ вложенные кубы $x \in \bigcap \overline{\Delta}_k^{p(k)}$ и

$$S_{2^{\alpha km}}(x+t) = \sum_{|n| \leq 2^{\alpha mk}} c_n e^{2\pi i n(x+t)}, \alpha > 3$$

кубические частичные суммы ряда (3.1). Тогда ряд (3.1) является рядом Фурье.

Доказательство. В силу ограниченности коэффициентов c_n легко посчитать, что имеет место оценка (см. [3])

$$\int_{T_m} \left| \frac{\Delta_k^p F(u+t)}{|\Delta_k^p|} - \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_{2^{\alpha mk}}(u+t)\, du \right|^2 dt \leq C 2^{-mk} 2^{-\varepsilon mk},\ \varepsilon > 0$$

Из (3.12), так как

$$\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t) \chi_\mu(x) = \frac{\Delta_k^p F(x+t)}{\Delta_k^p},\ x \in \Delta_k^p$$

следует (см. [3], стр. 95, неравенство (3.27)),

$$\int_{T_m} |\sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \Phi_k^{2^{\alpha mk}}(u+t)|^2 dt < C 2^{-\varepsilon mk}. \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что для почти всех t, и для всех $x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\Delta}_k^{p(k)}$, $\Delta_k^{p(k)}$– вложенные интервалы, имеем (см. [3], равенство (3.28))

$$\lim_{k \to \infty} \left| \sum_{\mu \leq 2^k} a_\mu(t)\chi_\mu(x) - \frac{1}{|\Delta_k^p|} \int_{\Delta_k^p} S_{2^{\alpha mk}}(u+t)\, du \right| = 0,\ \alpha > 3$$

это означает, что если $\sup_k \left| \frac{1}{|\Delta_k^{p(k)}|} \int_{\Delta_k^{p(k)}} S_{2^{\alpha mk}}(u+t) dt \right| < M$, то выполняется также условие (3.9) теоремы 3.4. □

Аналогичные теореме 3.8 утверждения верны также если кубические суммы $S_{2^{\alpha mk}}$ заменить сферическими или другими частичными суммами $S_{Q_k}(x)$ с соответствующими оценками возрастание диаметров областей Q_k.

4. Некоторые обобщения и усиления известных признаков интегрируемости тригонометрических рядов

Известны (см. [6], стр. 232, теорема 5.2 и [7], стр. 471, теорема 3.18) следующие теоремы:

Теорема 4.1. *Для того, чтобы тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x) \tag{4.1}$$

был рядом Фурье необходимо и достаточно, чтобы функции

$$F_n(x)=\int_0^x\sigma_n(t)\ dt\ (n=1,2,...)$$

были равномерно абсолютно непрерывны на $[0,2\pi]$, *где* $\sigma_n(t)$,*(c,1) средние ряда (4.1).*

Теорема 4.2. *Для того, чтобы кратный тригонометрический ряд*

$$\sum c_n e^{inx}, n=(n_1,...,n_m), x=(x_1,...x_m),\ nx=\sum n_jx_j \tag{4.2}$$

был рядом Фурье-Стилтьеса необходимо и достаточна, чтобы

$$\int_{Q_0}|\sigma_n(x)|dx<M,\forall n,$$

где $Q_0=[-\pi,\pi)^m,\sigma_n(x)$ *кратные (c,1) средние ряда (4.2).*

В доказательствах этих теорем использован принцип выбора Хелли, в одномерном и соответственно, в многомерном случаях. Из формулировки теоремы II легко следует, что равномерно абсолютная непрерывность функций $F_n(x)=\int_0^{x_1}...\int_0^{x_m}\sigma_n(x_1,...,x_m)dx_1...dx_m$ достаточно для того, чтобы кратный ряд (4.2) был рядом Фурье. Отметим, однако, что доказательство теоремы 4.2 приведенное в [7] не полное, так как четко не сформулирован принцип выбора Хелли в многомерном случае и, кроме того, изложение применения этого принципа не полное.

Применение мартингальных свойств последовательностей кубических частичных сумм рядов по кратной системе Хаара позволяет, при предположении ограниченности коэффициентов, распространить теорему 4.1 на многомерный случай в несколько усиленной формулировке.

Теорема 4.3. *Пусть*

$$\sigma_N(x)=\frac{1}{(N+1)^m}\sum_{\nu\le N}S_\nu(x),S_\nu(x)=\sum_{|n|<\nu}c_ne^{2\pi nx}$$

последовательность кубических (c,1) средних ряда (3.1), где $|c_n| \le M$. *Для того, чтобы ряд (3.1) был рядом Фурье необходимо и достаточно, чтобы для некоторых последовательностей* $N_k \uparrow +\infty$, $\eta_k \downarrow 0, \varepsilon_k \downarrow 0, \delta_k \downarrow 0$ *и некоторой последовательности множеств* E_k *выполнялись условия*

$$(4.3) \qquad i) \qquad E_k \subset T_m, |E_k| > |T_m| - \eta_k, \ \eta_k > 0, \sum \eta_k < \infty$$

ii) *Если* $\Delta_k^{p(j)}$, *конечное число попарно не пересекающиеся кубы ранга* k *и* $\sum_j |\Delta_k^{p(j)}| < \delta_k$, *то*

$$\left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} \sigma_{N_k}(x+t)dx \right| < \varepsilon_k, \ \forall t \in E_k.$$

В доказательстве теоремы 4.3 используется следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Если коэффициенты ряда (3.1) ограничены, то для всех* Δ_k^p

$$(4.4) \qquad \lim_{N\to\infty} \int_{T_m} \left| \int_{\Delta_k^p} \sigma_n(u+t)du - \Delta_k^p F(x+t) \right|^2 dt = 0$$

и если ряд (3.1) является рядом Фурье функции $f(x)$, *то*

$$(4.5) \qquad \Delta_k^p F(x+t) = \int_{\Delta_k^p} f(u+t)dt \text{ для почти всех } t \text{ и для всех } \Delta_k^p.$$

Эта лемма фактически доказана в работе [3]. Для полноты изложения приведем доказательство.

Доказательство. Известно [7], что $\sigma_\nu(x+t)$ сходятся в метрике $L_1(T_m)$ к $f(x+t)$ если ряд (3.1) является рядом Фурье этой функции. Следовательно, для всех $t \in T_m$ и для всех Δ_k^p, будем иметь

$$(4.6) \qquad \lim_{N\to\infty} \int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t)dx = \int_{\Delta_k^p} f(x+t)dx.$$

В равенстве

$$\int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t)dx = \frac{1}{(N+1)^m} \sum_{\nu \le N} \int_{\Delta_k^p} S_\nu(x+t)dx$$

правая часть представляет (c,1) средние прямоугольных частичных сумм ряда (2.8) сума которого в метрике L_2 на $\{t; t \in T_m\}$ равна $\Delta_k^p F(x+t)$.
Так как все прямоугольные частичные суммы этого ряда в метрике L_2 равномерно ограниченные, то, как легко видеть (см. [8]), выполняется равенство

$$(4.7) \qquad \lim_{N\to\infty} \int_{T_m} \left| \int_{\Delta_k^p} \sigma_N(x+t)dx - \Delta_k^p F(x+t) \right|^2 dt = 0.$$

Из (4.5) и (4.6) следует, что если ряд (3.1) является рядом Фурье, то для почти всех t выполняется равенство (4.4). □

Доказательство Теоремы 4.3. Необходимость. Пусть (3.1) является рядом Фурье функции $f(x)$. Из равенств (4.3) и (4.5) следует, что для любых последовательностей $\alpha_k \downarrow 0$ $\eta_k \downarrow 0$ таких, что

$$\alpha_k 2^{mk} \downarrow 0, k \to \infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k < \infty$$

можно выбрать последовательность $N_k \uparrow \infty$ и множества E_k такие, что $E_k \subset T_m, |E_k| > |T_m| - \eta_k$ и выполнены условия

$$\left| \int_{\Delta_k^p} \sigma_{N_k}(x+t)dx - \int_{\Delta_k^p} f(x+t)dx \right| < \alpha_k 2^{mk} \tag{4.8}$$

для всех кубов Δ_k^p ранга k и для всех $t \in E_k$. Очевидно, что если $\delta_k \downarrow 0$ и $\Delta_k^{p(j)}$, конечное число попарно не пересекающиеся куба ранга k, где

$$\left| \bigcup_j \Delta_k^{p(j)} \right| < \delta_k, \tag{4.9}$$

то для некоторых $\beta_k \downarrow 0$ будем иметь

$$\left| \int_{\cup \Delta_k^{p(j)}} f(x+t)dx \right| < \beta_k \tag{4.10}$$

для всех $t \in E_k$ и для всех множеств $\cup_j \Delta_k^{p(j)}$ удовлетворяющих условию (4.8). Из неравенств (4.7) и (4.9) следует

$$\left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} \sigma_{N_k}(x+t)dx \right| \le \alpha_k 2^{mk} + \left| \int_{\bigcup \Delta_k^{p(j)}} f(x+t)dx \right| \le \alpha_k 2^{mk} + \beta_k$$

для всех $t \in E_k$. Обозначая $\varepsilon_k = \alpha_k 2^{mk} + \beta_k$ имеем $\varepsilon_k \downarrow 0$ Последовательности $\varepsilon_k, \delta_k, \eta_k, N_k$, и E_k удовлетворяют условиям теоремы 4.3. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Тогда из равенства (4.3) следует существование подпоследовательностей $\{\varepsilon_{k(l)}\} \subset \{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_{k(l)}\} \subset \{\delta_k\}$, $\{\eta_{k(l)}\} \subset \{\eta_k\}$, $\{\sigma_{N_{k(l)}}(x+t)\} \subset \{\sigma_{N_k}(x+t)\}$ и множеств $\{E'_{k(l)}\} \subset T_m$ таких, что выполняются условия

$$|E'_{k(l)}| > |T_m| - \eta_{k(l)}, \quad \sum_j |\Delta_{k(l)}^{p(j)} F(x+t)| < \varepsilon_{k(l)},$$

для всех $t \in E'_{k(l)}$ и для любых конечного числа попарно не пересекающихся кубов ранга $k(l)$, для которых

$$\sum_j |\Delta_{k(l)}^{p(j)}| < \delta_{k(l)}.$$

Обозначим $A_{k(l)} = E'_{k(l)} \bigcap E_k$. Имеем $A_{k(l)} \subset T_m$, $|A_{k(l)}| > |T_{k(l)}| - (\eta_{k(l)} + \eta_k)$. Следовательно, если

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} A_{k(l)}, \text{ то } E \subset T_m, |E| = T_m.$$

Тогда для любого $t \in E$ существует $l_0(t)$, такое, что для всех $l > l_0(t)$ имеем

$$\sum_j |\Delta_{k(l)}^{p(j)} F(x+t)| < \varepsilon_{k(l)},$$

если $\Delta_{k(l)}^{p(j)}$ – конечное число попарно не пересекающихся кубов ранга $k(l)$ и $\sum |\Delta_{k(l)}^{p(j)}| < \delta_{k(l)}$.

Легко видеть, что из последних двух неравенств следует локальная абсолютная непрерывность по Витали функции $F(x+t)$ на двоичной сети кубов $\{\Delta_k^p\}$ для почти всех $t \in T_m$. Тогда по теореме 2.1 функция $F(x)$ будет локально почти всюду абсолютно непрерывной по Витали и по теореме 3.1 ряд (3.1) будет рядом Фурье. □

Утверждение теоремы верно для всех многомерных методов суммирования, обладающих тем свойством, что если все прямоугольные частичные суммы сходящегося по Прингсгейму тригонометрического ряда равномерно ограничены, то он суммируется этим методом к той же сумме. В частности верно следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Для того, чтобы ряд (3.1) с ограниченными коэффициентами был рядом Фурье, необходимо и достаточно, чтобы некоторая последовательность $\{S_{Q_k(x)}\}$ его частичных сумм, где $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots, \bigcup Q_k = R_m$, обладала следующим свойством: Существуют последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0, \delta_k \downarrow 0, \eta_k \downarrow 0$ и множества $E_k \subset T_m$ такие, что*

$$|E_k| > |T_m| - \eta_k, \quad \sum \eta_k < \infty$$

$$\left| \int_{\bigcup_j \Delta_k^{p(j)}} S_{Q_k}(x+t)dx \right| < \varepsilon_k, \ t \in E_k,$$

если $\Delta_k^{p(j)}$ конечное число попарно непересекающихся кубов ранга k и

$$\sum_j |\Delta_k^{p(j)}| < \delta_k.$$

Это утверждение доказывается дословным повторением рассуждений доказательства теоремы 4.3, с применением леммы 4.1 и равенства

$$\lim_{l\to\infty}\int_{T_m}\left|\int_{\Delta_k^p} S_{Q_l}(x+t)dx-\Delta_k^p F(x+t)\right|^2 dt=0.$$

Abstract. Applying some martingale properties of the sequences of cubic partial sums of series in the Haar multiple system, some integrability criterions for multiple trigonometric series are established. Some of the proved theorems improve and extend to the multiple trigonometric series the classical theorems on integrability of the one-dimensional trigonometric series, the proofs of which are based on Helly's principal of choice.

Список литературы

[1] С. Сакс, Теория интеграла, Изд. иностранной литературы, Москва (1949).

[2] J. L. Doob, Stochastic processes (1953).

[3] А. А. Талалян, "Дифференцирование по случайным двоичным сетям и единственность кратных ортогональных рядов", Мат. Заметки, 88, вып. 1 (2010).

[4] S. Chow, "Convergence theorems of martingales", Z. Wahrsch und ver, Geliete, 1, 340 – 346 (1962).

[5] R. F. Gundy, "Martingal theory and pointwise convergence of orthogonal series", Trans. Amer. Math. Soc., 124, no. 2, 228 – 248 (1966).

[6] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, Изд. Мир, Москва (1965).

[7] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, Изд. Мир, Москва (1965).

[8] В. Г. Челидзе, "Некоторые методы суммирования двойных рядов и двойных интегралов", Изд. Тбилисского университета, Тбилиси (1977).

Поступила 20 января 2012