

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКАХ L_p , $p > 1$ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА РЯДОВ ФУРЬЕ-УОЛША

Л. Н. ГАЛОЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
E-mail: *lev.nik.galoyan@gmail.com*

Аннотация. В данной работе исследуется сходимость в метриках L_p , $p > 1$ средних Чезаро отрицательного порядка рядов Фурье по системе Уолша с монотонными коэффициентами. Описываются классы рядов, средние которых неограниченно расходятся по любым подпоследовательностям на множествах положительной меры.

MSC2010 number: 40G05, 40A05

Ключевые слова: Средние Чезаро отрицательного порядка; неограниченная расходимость; слабо меняющаяся функция; регулярный метод суммирования.

1. ВВЕДЕНИЕ

Сходимость средних Чезаро (в смысле поточечной и в метриках L_p , $p > 1$) рядов Фурье по тригонометрической системе и системе Уолша изучались в ряде работ (см. [4] - [13]). В частности, в работе [5] доказано, что средние Чезаро положительного порядка ряда Фурье-Уолша каждой интегрируемой функции сходятся почти всюду (аналог теоремы Фейера-Лебега для тригонометрической системы). В работе [6] установлены максимальные оценки средних Чезаро рядов Фурье-Уолша функций из L_p , $p > 1$, в частности, доказан сильный (p, p) тип максимальных операторов положительных средних Чезаро. Более сильные результаты в этом направлении приведены в работах [7] - [10].

В данной работе мы займемся исследованием сходимости в метриках L_p , $p > 1$ отрицательных средних Чезаро рядов Фурье-Уолша, в частности, нас будет интересовать следующий естественный вопрос: будут ли сходятся в метриках L_p ,

$p > 1$ отрицательные средние Чезаро ряда Фурье функции из L_p , $p > 1$, если потребовать неотрицательность и монотонность коэффициентов Фурье-Уолша этой функции? В связи с этим вопросом нами получен следующий результат (см. §2, теоремы 2.1, 2.2).

Если коэффициенты Фурье-Уолша функции L_p , $p > 1$ неотрицательны и монотонно убывают, то средние Чезаро порядка $-\alpha$ ряда Фурье-Уолша этой функции сходятся в метриках L_p , $p > 1$ при любом $\alpha < 1 - 1/p$, при этом, показатель $1 - 1/p$ является граничным в смысле сходимости в этих метриках.

Как известно, для частичных сумм $S_n(x, f)$ рядов Фурье-Уолша (а также для тригонометрических рядов Фурье) суммируемых функций $f(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |S_n(x, f) - f(x)|^p dx = 0, \quad \text{при всех } p \in (0, 1).$$

Отсюда в частности следует, что у всякого ряда Фурье по тригонометрической системе или системе Уолша существует подпоследовательность частичных сумм, сходящаяся почти всюду. В связи с этим Д. Е. Меньшов в работе [4] для тригонометрической системы поставил следующий вопрос: будет ли верным последнее утверждение если заменить обычную сходимость на методы суммирования Чезаро отрицательного порядка? Иначе говоря, обязана ли для любой суммируемой функции существовать сходящаяся почти всюду подпоследовательность отрицательных средних Чезаро ее ряда Фурье? В той же работе им была доказана следующая теорема.

Теорема А (Д. Е. Меньшов). *Если*

$$0 \leq \rho < 1, \quad \varepsilon > 0, \quad -1 < \alpha < \rho,$$

то всякая подпоследовательность, содержащаяся в последовательности чезаровских средних порядка α ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\rho} \ln^{\varepsilon} n}$$

расходится на множестве положительной меры.

Д. Е. Меньшов подчеркнул (см. [4]), что пример суммируемой функции, дающий отрицательный ответ на его вышеуказанный вопрос, получится, если положить в этой теореме $\rho = 0$, $\varepsilon = 1$, а если положить в ней $\rho = 1/2$, $\varepsilon = 1$, то получится пример функции суммируемой с квадратом, для которой средние Чезаро порядка α неограниченно расходятся по любым подпоследовательностям для всех $\alpha < -1/2$.

Замечание 1.1. При доказательстве Теоремы А, следить за множествами расходимости для любых подпоследовательностей средних Чезаро не возможно. Рассуждения Меньшова лишь позволяют обеспечить положительность мер этих множеств. В данной статье, в частности, доказывается (см. §3) аналог Теоремы А для системы Уолша, при этом получается результат немного более сильный, чем Теорема А: с одной стороны мы расширим класс рядов “с плохими” средними Чезаро, с другой нам удастся дать некоторую геометрическую характеристику множеств расходимости для каждой подпоследовательности средних Чезаро этих рядов.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Напомним определение методов суммирования Чезаро и чезаровских средних для произвольных числовых рядов.

Пусть числа $\{A_n^\delta\}_{n=0}^\infty$ определяются как тейлоровские коэффициенты разложения в степенной ряд следующей функции

$$(2.1) \quad \frac{1}{(1-z)^{1+\delta}} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\delta z^n, \quad |z| < 1, \quad \delta \neq -1, -2, \dots$$

Хорошо известно, что

$$(2.2) \quad A_0^\delta = 1, \quad A_n^\delta = \frac{(\delta+1)(\delta+2)\dots(\delta+n)}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Последовательность $\{A_n^\delta\}_{n=0}^\infty$ называют числами Чезаро. Приведем некоторые свойства этих чисел вытекающие из формулы (2.2) (см. [2], стр. 130 – 133 и [3],

стр. 125 – 127).

$$(2.3) \quad A_n^\delta \sim \frac{n^\delta}{\Gamma(\delta+1)}, \quad \delta \neq -1, -2, \dots,$$

Если $\delta \in (-l-1, -l)$, где $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, то

$$(2.4) \quad (-1)^l A_n^\delta > 0, \quad n \geq l.$$

Кроме того,

$$(2.5) \quad A_n^{\delta+1} - A_{n-1}^{\delta+1} = A_n^\delta, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.6) \quad (\delta+1)A_n^{\delta+1} = (n+\delta+1)A_n^\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^{(-)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$(2.7) \quad nA_n^\delta = (n+\delta)A_{n-1}^\delta, \quad \delta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}^{(-)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(2.8) \quad \{|A_n^\delta|\}_{n=1}^\infty \searrow 0 \quad \text{при} \quad \delta < 0 \quad \text{и} \quad \{A_n^\delta\}_{n=1}^\infty \nearrow \infty \quad \text{при} \quad \delta > 0,$$

Пусть дан ряд $\sum a_n$ и пусть $S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, $n = 0, 1, \dots$ частичные суммы этого ряда. Линейные средние

$$(2.9) \quad \sigma_n^\delta = \frac{1}{A_n^\delta} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\delta-1} S_k = \frac{1}{A_n^\delta} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\delta a_k$$

называют средними Чезаро порядка δ ряда $\sum a_n$. Говорят, что последовательность S_n суммируема методом Чезаро порядка δ или методом (C, δ) к числу S если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n^\delta = S.$$

Отметим, что методы Чезаро положительного порядка регулярны, то есть любая сходящаяся последовательность суммируется этими методами к их обычному пределу. В книге [3], стр. 157 для средних Чезаро доказано следующее полезное равенство (см. (2.9))

$$(2.10) \quad \sigma_j^r - \sigma_j^{r+1} = \frac{1}{(r+1)A_j^{r+1}} \cdot \sum_{\nu=0}^j A_{j-\nu}^r \nu a_\nu, \quad r \in \mathbb{Z}^{(-)}.$$

Теперь приведем определение системы Уолша.

$$(2.11) \quad w_0(x) = 1, \quad w_n(x) = \prod_{s=1}^k r_{m_s}(x), \quad n = \sum_{s=1}^k 2^{m_s}, \quad m_1 > m_2 > \dots > m_s,$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^\infty$ - система Радемахера:

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}); \\ -1, & x \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

$$r_0(x+1) = r_0(x), \quad r_k(x) = r_0(2^k x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Через $\Delta_k^{(m)}$ будем обозначать двоичные интервалы вида $[k \cdot 2^{-m}, (k+1) \cdot 2^{-m})$.

При доказательстве основных результатов настоящей статьи мы будем пользоваться следующими неравенствами, доказательство которых приведено в [1] (стр. 161 – 162).

$$(2.12) \quad \sup_{M \geq \nu} \left| \sum_{j=\nu}^M a_j w_j(x) \right| \leq 9 \cdot \sum_{j=\nu}^{\nu+s-1} a_j, \quad M > \nu, \quad x \in \left(\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s} \right],$$

$$(2.13) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \left(\sum_{k=1}^{\nu} a_{k+m-1} \right)^p \leq C_p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+m-1}^p k^{p-2}, \quad m \in N, \quad p > 1.$$

где (2.12) справедливо для любых невозрастающих $\{a_j \geq 0\}_{j \geq 0}$, а (2.13) - для всех неотрицательных $\{a_j\}_{j \geq 0}$ удовлетворяющих условию $\sum_{s \geq 1} a_s^p s^{p-2} < +\infty$.

Для формулировки некоторых результатов нам понадобится следующее (см. [2], стр. 299) хорошо известное определение.

Определение 2.1. Положительная функция $b(u)$, определенная для $u > u_0$, называется слабо меняющийся, если при любом $\eta > 0$ функция $b(u)u^\eta$ при достаточно больших u возрастает, а $b(u)u^{-\eta}$ убывает.

Слабо меняющийся функция (с.м.ф.) обладает (см. [2], стр. 299) следующими свойствами.

$$(2.14) \quad \forall \epsilon, k > 0: \quad \lim_{u \rightarrow \infty} b(u)u^\epsilon = \infty, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} b(ku)/b(u) = 1.$$

Через B обозначим класс слабо меняющихся функций, определенных на $[1, \infty)$.

Пусть далее $B^* = \{b(u) \in B, \quad b(u) \searrow 0 \text{ при } u \rightarrow +\infty\}$.

Рассмотрим следующие семейства рядов по системе Уолша.

$$(2.15) \quad M_p = \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} a_s w_s(x) : \{a_s \geq 0\}_{s=1}^{\infty} \searrow, \sum_{s=1}^{\infty} a_s^p s^{p-2} < +\infty \right\}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$(2.16) \quad \Omega_\beta = \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} c_s w_s(x) : c_s = \frac{b(s)}{s^\beta}, \text{ где } b(u) \in B \right\}, \quad \beta \in (0, 1),$$

$$(2.17) \quad M\Omega_0 = \left\{ \sum_{s=1}^{\infty} b(s) w_s(x) : \text{ где } b(u) \in B^* \right\}.$$

В дальнейшем условимся под выражением M_p -ряд, Ω_β -ряд или $M\Omega_0$ -ряд понимать ряды из соответствующих семейств.

Хорошо известно (см. [1], теорема 7.3.2), что любой M_p -ряд является рядом Фурье-Уолша некоторой функции $f \in L_p[0, 1]$. Далее нетрудно проверить, что

$$(2.18) \quad M_p \cap \Omega_\beta = \emptyset, \text{ при } \beta < 1 - 1/p.$$

Имеет место следующий результат:

Для любого $p > 1$ и $0 < \alpha < 1 - 1/p$ средние Чезаро порядка $-\alpha$ M_p -ряда сходятся по $L_p[0, 1]$ норме.

В следующей теореме это утверждение сформулировано в эквивалентной формулировке.

Теорема 2.1. *Если коэффициенты Фурье-Уолша функции $f(x) \in L_p[0, 1]$, $p > 1$ монотонно убывают, то средние Чезаро порядка $-\alpha$ ряда Фурье-Уолша этой функции сходятся в метрике L_p при любом $\alpha \in (0, 1 - 1/p)$.*

Следующая теорема показывает, что предыдущий результат окончательный.

Теорема 2.2. *Для любого $p_0 > 1$ и $\alpha_0 > 1 - 1/p_0$ найдется M_{p_0} -ряд, такой, что средние Чезаро порядка $-\alpha_0$ этого ряда расходятся по $L_{p_0}[0, 1]$ норме.*

Замечание 2.1. *Подчеркнем, что теоремы 2.1 и 2.2 справедливы и для тригонометрической системы.*

Следующие результаты проясняют поведение подпоследовательностей отрицательных средних Чезаро рядов Фурье-Уолша с медленно колеблющимися коэффициентами и позволяют построить примеры суммируемых функций с расходящимися подпоследовательностями отрицательных средних Чезаро.

Теорема 2.3. Пусть $0 < \beta < \alpha < 1$ и пусть $\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)$ средние Чезаро порядка $-\alpha$ некоторого Ω_β -ряда, тогда для любой возрастающей последовательности $M = \{m_k\}_{k=1}^\infty \nearrow \infty$ существует множество $G_{\alpha,\beta}(M)$ положительной меры такое, что

- (a) $\text{mes} \left\{ G_{\alpha,\beta}(M) \cap \Delta_1^{(i)} \right\} > 0$ для любого $i \geq 1$,
- (b) $\limsup_{k \rightarrow +\infty} |\sigma_{m_k}^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| = +\infty$ для любого $x \in G_{\alpha,\beta}(M)$.

Теорема 2.4. Пусть $0 < \alpha < 1$ и пусть $\sigma_n^{-\alpha}(x, M\Omega_0)$ средние Чезаро порядка $-\alpha$ некоторого $M\Omega_0$ -ряда, тогда для любой возрастающей последовательности $Q = \{q_j\}_{j=1}^\infty \nearrow \infty$ существует множество $F_\alpha(Q)$ положительной меры такое, что

- (a) $\text{mes} \left\{ F_\alpha(Q) \cap \Delta_1^{(i)} \right\} > 0$ для любого $i \geq 1$,
- (b) $\limsup_{j \rightarrow \infty} |\sigma_{q_j}^{-\alpha}(x, M\Omega_0)| = +\infty$ для любого $x \in F_\alpha(Q)$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3.1. Последовательность

$$\gamma_p = \sum_{j=p-2\lambda+1}^{p-\lambda} A_j^{-\alpha} - \sum_{j=p-\lambda+1}^p A_j^{-\alpha} = 2A_{p-\lambda}^{1-\alpha} - A_{p-2\lambda}^{1-\alpha} - A_p^{1-\alpha}, \quad \lambda \in N, p > 2\lambda, \quad \alpha \in (0, 1)$$

положительна и монотонно убывает.

Доказательство. Положительность следует из равенства

$$\gamma_p = \sum_{j=p-2\lambda+1}^{p-\lambda} (A_j^{-\alpha} - A_{j+\lambda}^{-\alpha})$$

и из свойств (2.4) и (2.8). Далее учитывая свойство (2.5) имеем

$$\gamma_p - \gamma_{p+1} = \sum_{j=p-2\lambda+1}^{p-\lambda} (|A_{j+1}^{1-\alpha}| - |A_{j+\lambda+1}^{1-\alpha}|).$$

Отсюда и из свойств (2.4) и (2.8) следует утверждение леммы. Лемма 3.1 доказана. $\square$

Следствие 3.1. При всех натуральных q справедливо неравенство и $\alpha \in (0, 1)$

$$2A_{3,2^{q-1}}^{1-\alpha} - A_{2^q}^{1-\alpha} - A_{2^{q+1}}^{1-\alpha} > 0.$$

В дальнейшем через $C_{\alpha,\beta}^1, C_{\alpha,\beta}^2, \dots$ и $C_{p,\alpha}^{(1)}, C_{p,\alpha}^{(2)}, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие разве лишь от указанных в индексах параметров.

Лемма 3.2. Пусть даны $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, \alpha)$, натуральное $i \geq 1$ и некоторый Ω_β -ряд вида $\sum_{j \geq 1} c_j w_j(x)$, где $c_j = b(j)/j^\beta$, $j \geq 1, b(u) \in B$. Тогда существуют натуральное число $n_{\alpha,\beta}^i$, положительные числа $\gamma_{\alpha,\beta}^{(i)}, \eta_{\alpha,\beta}^{(i)}$ такие, что при $n \geq n_{\alpha,\beta}^i$ для средних Чезаро порядка $-\alpha$ данного ряда выполняется неравенство

$$\text{mes} \left\{ x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| \geq \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \right\} \geq \eta_{\alpha,\beta}^{(i)}.$$

Доказательство. Ясно, что (см. определение 2.1) коэффициенты любого Ω_β -ряда начиная с некоторого номера $n(\beta)$ монотонно убывают. Пусть $\lambda_s = [s^{\beta'/\alpha}]$, $s = 1, 2, \dots$ ($[a]$ -целая часть a), где $\beta' \in (\beta, \alpha)$. Очевидно, что при $s \rightarrow \infty$

$$(3.1) \quad \lambda_s \rightarrow \infty, \quad (s - \lambda_s)/s \rightarrow 1.$$

Учитывая, что функция $ub(u) : u \geq 1$ для достаточно больших u возрастает, подберем натуральное $s_0(\alpha, \beta) \geq n(\beta)$ настолько большим, чтобы при $s \geq s_0(\alpha, \beta)$ выполнялись неравенства

$$(3.2) \quad s - \lambda_s \geq \max\{3, n(\beta)\}, \quad b(s - \lambda_s) < \frac{s}{s - \lambda_s} b(s).$$

Далее согласно (2.14) можем выбрать $n_i(\alpha, \beta)$ настолько большим, чтобы при $n \geq n_i(\alpha, \beta)$ выполнялось неравенство

$$(3.3) \quad \frac{|c_n - c_{n-2^{i+1}}|}{c_n} \leq \frac{|2A_{3,2^{i-1}}^{1-\alpha} - A_{2^i}^{1-\alpha} - A_{2^{i+1}}^{1-\alpha}|}{2^{i+1}}.$$

(число фигурирующее в правой части неравенства (3.3) отлично от нуля в силу следствия 3.1). Положим $n_{\alpha,\beta}^i = \max\{n_i(\alpha, \beta); s_0(\alpha, \beta); 2^{i+1}\}$. Пусть $n \geq n_{\alpha,\beta}^i$. С учетом (2.5) и (2.9) средние Чезаро данного Ω_β -ряда могут быть записаны следующим образом

(3.4)

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta) &= \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha-1} S_\nu(x) = \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n-1} A_\nu^{-\alpha-1} S_{n-\nu}(x) \\
 &= \frac{S_n(x)}{A_n^{-\alpha}} + \frac{S_n(x)}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu^{-\alpha-1} + \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n-1} A_\nu^{-\alpha-1} (S_{n-\nu}(x) - S_n(x)) \\
 &= \frac{A_{n-1}^{-\alpha}}{A_n^{-\alpha}} S_n(x) + \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\lambda_n} + \sum_{\nu=\lambda_n+1}^{n-1} A_\nu^{-\alpha-1} (S_{n-\nu}(x) - S_n(x)) \right\} = \sum_{l=1}^3 Q_{n,l}(x),
 \end{aligned}$$

где $S_\nu(x) = \sum_{j=1}^\nu c_j w_j(x)$, $\nu = 1, 2, \dots$ частичные суммы исследуемого ряда.

Оценим $Q_{n,l}(x)$, $1 \leq l \leq 3$. В силу замечания, сделанного в начале доказательства, при всех $x \in (0, 1)$ имеем $|Q_{n,1}(x)| \leq \sup_n |S_n(x)| < C_{\alpha,\beta}^1/x$. Далее, учитывая (2.1), (2.4), (2.5), используя лемму Абеля и условия (3.1), (3.2) получим

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad |Q_{n,2}(x)| &= \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \left| \sum_{\nu=1}^{\lambda_n} A_\nu^{-\alpha-1} \sum_{j=n-\nu+1}^n c_j w_j(x) \right| \leq \frac{2}{x} \frac{c_{n-\lambda_n}}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=1}^{\infty} |A_\nu^{-\alpha-1}| \\
 &\leq \frac{2c_n}{A_n^{-\alpha} x} \left(\frac{n}{n-\lambda_n} \right)^{\beta+1} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}^2}{x} \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}}, \quad n \geq n_{\alpha,\beta}^i.
 \end{aligned}$$

Далее (см. (2.1), (2.4))

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad |Q_{n,3}(x)| &\leq \frac{C_{\alpha,\beta}^3}{A_n^{-\alpha} x} \sum_{\nu=\lambda_n+1}^{\infty} |A_\nu^{-\alpha-1}| = \frac{C_{\alpha,\beta}^3}{x} \frac{A_{\lambda_n}^{-\alpha}}{A_n^{-\alpha}} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}^4}{A_n^{-\alpha} x} \frac{1}{\lambda_n^\alpha} \\
 &\leq \frac{C_{\alpha,\beta}^5}{A_n^{-\alpha} n^{\beta'} x} = \frac{C_{\alpha,\beta}^5}{x} \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \frac{1}{b(n)n^{\beta'-\beta}} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}^6}{x} \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}}.
 \end{aligned}$$

Окончательно для всех $x \in (0, 1)$ имеем (см. (3.5) и (3.6))

$$(3.7) \quad |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| \leq \frac{C_{\alpha,\beta}^7}{x} \cdot \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}}; \quad n \geq n_{\alpha,\beta}^i.$$

Ясно, что двоичное разложение любого $x \in (0, 2^{-i})$ имеет вид $x = \sum_{j=i}^\infty x_j 2^{-j-1}$, следовательно справедливо равенство $x \oplus 2^{-i} = x + 2^{-i}$ (где $\oplus$ - сложение по модулю 2). Пользуясь этим для любого натурального k такого, что $2^N \leq k < 2^{N+1}$ получим

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta_1^{(i)}} w_k(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2^i}} w_k \left(x \oplus \frac{1}{2^i} \right) dx = \\
 &= w_k \left(\frac{1}{2^i} \right) \int_0^{\frac{1}{2^i}} w_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } N \geq i \\ 2^{-i} & \text{при } N < i-1 \\ -2^{-i} & \text{при } N = i-1 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Согласно этой формуле, характеристическая функция интервала $\Delta_1^{(i)}$ при любом $i \geq 1$ имеет вид

$$(3.8) \quad \chi_{\Delta_1^{(i)}}(x) = \sum_{j=0}^{2^i-1} b_j^{(i)} w_j(x) \quad \text{где} \quad b_j^{(i)} = \begin{cases} |\Delta_1^{(i)}| & \text{при } 0 \leq j < 2^{i-1}, \\ -|\Delta_1^{(i)}| & \text{при } 2^{i-1} \leq j < 2^i. \end{cases}$$

Не трудно проверить, что для любых натуральных i и $n \geq 2^{i+1}$ мы можем выбрать натуральное $p(n, i)$ удовлетворяющее условиям:

- (i) двоичное разложение числа $p(n, i)$ не содержит ни какую из степеней 2^q ($q = 0, 1, \dots, i-1$),
- (ii) $n - 2^{i+1} < p(n, i) \leq n - 2^i$.

Рассмотрим функцию $P_{n,i}(x) = -w_{p(n,i)}(x) \cdot \chi_{\Delta_1^{(i)}}(x)$. Очевидно, что $\|P_{n,i}(x)\|_\infty = 1$ и $\text{supp} P_{n,i}(x) = \Delta_1^{(i)}$. Далее, в силу условия 1) и представления (3.8) имеем

$$(3.9) \quad P_{n,i}(x) = - \sum_{j=0}^{2^i-1} b_j^{(i)} w_{j \oplus p(n,i)}(x) = - \sum_{j=0}^{2^i-1} b_j^{(i)} w_{j+p(n,i)}(x).$$

В силу (2.9), (3.4) и (3.9) получим оценку

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \int_{\Delta_1^{(i)}} |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| dx &\geq \int_{\Delta_1^{(i)}} \sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta) P_{n,i}(x) dx \\ &= \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} c_\nu \int_0^1 P_{n,i}(x) w_\nu(x) dx = \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} c_\nu \hat{P}_{n,i}^\nu, \end{aligned}$$

где $\hat{P}_{n,i}^\nu$ — есть ν -ый коэффициент Фурье-Уолша полинома $P_{n,i}(x)$. Учитывая разложение (3.9) можем написать (см. (3.10))

$$\begin{aligned}
 (3.11) \quad & \int_{\Delta_1^{(i)}} |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| dx \geq -\frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A_{n-(j+p(n,i))}^{-\alpha} c_{j+p(n,i)} b_j^{(i)} \\
 & = -\frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A_{n-(j+p(n,i))}^{-\alpha} b_j^{(i)} \\
 & \quad + \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A_{n-(j+p(n,i))}^{-\alpha} (c_n - c_{j+p(n,i)}) b_j^{(i)} \\
 & = \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \left\{ \sum_{j=2^{i-1}}^{2^i-1} A_{n-(j+p(n,i))}^{-\alpha} - \sum_{j=0}^{2^{i-1}-1} A_{n-(j+p(n,i))}^{-\alpha} \right\} \\
 & \quad + \frac{1}{A_n^{-\alpha}} \sum_{j=0}^{2^i-1} A_{n-(j+p(n,i))}^{-\alpha} (c_n - c_{j+p(n,i)}) b_j^{(i)} = \sigma_{n,i}^{(1)} + \sigma_{n,i}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 3.1 и условием 2) получим оценку (см. (3.11))

$$\begin{aligned}
 (3.12) \quad & \sigma_{n,i}^{(1)} = \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \left\{ \sum_{j=n-p(n,i)-2^{i-1}}^{n-p(n,i)-2^{i-1}-1} A_j^{-\alpha} - \sum_{j=n-p(n,i)-2^{i-1}+1}^{n-p(n,i)} A_j^{-\alpha} \right\} \\
 & > \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \left\{ \sum_{j=2^{i-1}}^{3 \cdot 2^{i-1}-1} A_j^{-\alpha} - \sum_{j=3 \cdot 2^{i-1}+1}^{2^i+1} A_j^{-\alpha} \right\} \\
 & = \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} (2A_{3 \cdot 2^{i-1}}^{1-\alpha} - A_{2^i}^{1-\alpha} - A_{2^{i+1}}^{1-\alpha}).
 \end{aligned}$$

Пользуясь свойством (2.8) и (3.3), для второй суммы правой части (3.11) получим такую оценку

$$(3.13) \quad |\sigma_{n,i}^{(2)}| \leq \frac{2^i}{A_n^{-\alpha}} \cdot \frac{1}{2^i} \cdot \max_{0 \leq j < 2^{i-1}} |c_n - c_{j+p(n,i)}| < \frac{c_n - c_{n-2^{i+1}}}{A_n^{-\alpha}}.$$

С учетом (3.2), (3.11) – (3.13) при $n \geq n_{\alpha,\beta}^i$ получаем

$$(3.14) \quad \int_{\Delta_1^{(i)}} |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| dx \geq \frac{c_n}{2^{i+1} A_n^{-\alpha}} \cdot (2A_{3 \cdot 2^{i-1}}^{1-\alpha} - A_{2^i}^{1-\alpha} - A_{2^{i+1}}^{1-\alpha}).$$

Положим $\gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} = 1/4 \cdot (2A_{3 \cdot 2^{i-1}}^{1-\alpha} - A_{2^i}^{1-\alpha} - A_{2^{i+1}}^{1-\alpha})$. Это число положительно в силу следствия 3.1. Пусть

$$E_{n,i}^{\alpha,\beta} = \left\{ x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| \geq \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \right\}.$$

Учитывая (3.7) можем написать

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_1^{(i)}} |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| dx &= \int_{E_{n,i}^{\alpha,\beta}} |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| dx + \int_{\Delta_1^{(i)}/E_{n,i}^{\alpha,\beta}} |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| dx \\ &\leq C_{\alpha,\beta}^7 \frac{2^i c_n}{A_n^{-\alpha}} \text{mes } E_{n,i}^{\alpha,\beta} + \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}}, \end{aligned}$$

откуда с учетом (3.14) получаем

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}^7 \frac{2^i c_n}{A_n^{-\alpha}} \text{mes } E_{n,i}^{\alpha,\beta} &\geq \frac{c_n}{2^{i+1} A_n^{-\alpha}} (2A_{3 \cdot 2^{i-1}}^{1-\alpha} - A_{2^i}^{1-\alpha} - A_{2^{i+1}}^{1-\alpha}) - \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}} \\ &= \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \frac{c_n}{2^i A_n^{-\alpha}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{mes } E_{n,i}^{\alpha,\beta} \geq \frac{\gamma_{\alpha,\beta}^{(i)}}{4^i C_{\alpha,\beta}^7}.$$

Для завершения доказательства остается положить $\eta_{\alpha,\beta}^{(i)} = \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} / 4^i C_{\alpha,\beta}^7$. Лемма 3.2 доказана. $\square$

Точно так же доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.3. Пусть даны $\alpha \in (0, 1)$ и некоторый $M\Omega_0$ - ряд вида $\sum_{j \geq 1} b(j)w_j(x)$, $b(u) \in B^*$. Тогда существуют натуральное число N_α^i , положительные числа $\gamma_\alpha^{(i)}, \eta_\alpha^{(i)}$ такие, что при $n \geq N_\alpha^i$ для средних Чезаро порядка $-\alpha$ данного ряда выполняется неравенство

$$\text{mes} \left\{ x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x, M\Omega_0)| \geq \gamma_\alpha^{(i)} b(n)n^\alpha \right\} \geq \eta_\alpha^{(i)}.$$

Лемма 3.4. Пусть n и j_1, j_2 натуральные числа, такие, что $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$. Тогда при любом $\alpha \in (0, 1)$ существует положительная постоянная B_α , такая, что при всех $x \in (0, 1]$ справедлива равномерная по j_1, j_2 оценка:

$$(3.15) \quad \left| \sum_{\nu=j_1}^{j_2} A_{n-\nu}^{-\alpha} w_\nu(x) \right| \leq \frac{B_\alpha}{x^{1-\alpha}}.$$

Доказательство. Ясно, что лемма будет доказана если мы покажем, что оценка

(3.15) справедлива для сумм вида (равномерно по j)

$$(3.16) \quad \sigma_{n,j}(x) =: \left| \sum_{\nu=j}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} w_\nu(x) \right|, \quad \text{где } 0 \leq j \leq n.$$

Пусть сначала $x \in (0, 1/n]$. С учетом свойства (2.5) получим

$$|\sigma_{n,j}(x)| \leq \sum_{\nu=j}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} \leq \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} = A_n^{1-\alpha} \leq C_{\alpha,\beta}^8 n^{1-\alpha} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}^8}{x^{1-\alpha}},$$

т.е. утверждение леммы в этом случае верна. Допустим, что $x \in (1/n, 1]$. Если $n - [1/x] \leq j \leq n$, то выражение (3.16) оценим следующим образом.

$$|\sigma_{n,j}(x)| \leq \sum_{\nu=n-[1/x]}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} = \sum_{\nu=0}^{[1/x]} A_{\nu}^{-\alpha} = A_{[1/x]}^{1-\alpha} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}^9}{x^{1-\alpha}}.$$

Для завершения доказательства остается оценить (3.16) в случае $j \leq n - [1/x]$, где $x \in (1/n, 1]$. Пусть натуральное m такое, что $2^{m-1} \leq n \leq 2^m - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} (3.17) \quad |\sigma_{n,j}(x)| &= |\sigma_{n,j}(x)w_{2^m-1}(x)| = \left| \sum_{\nu=j}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} w_{2^m-1 \oplus \nu}(x) \right| \\ &= \left| \sum_{\nu=j}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} w_{2^m-1-\nu}(x) \right| = \left| \sum_{\nu=2^m-1-n}^{2^m-1-j} A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha} w_{\nu}(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{\nu=2^m-n+[1/x]}^{\infty} A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha} w_{\nu}(x) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\nu=2^m-1-n}^{2^m-1-n+[1/x]} A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha} w_{\nu}(x) \right| + \left| \sum_{\nu=2^m-j}^{\infty} A_{n-2^m+1+\nu}^{-\alpha} w_{\nu}(x) \right|, \end{aligned}$$

где ряды в последнем равенстве сходятся при всех $x \in (0, 1]$, поскольку $\{A_s^{-\alpha}\}_{s \geq 0} \searrow 0$. Далее, пользуясь леммой Абеля, выражение (3.17) оценим следующим образом (см. свойства (2.3) – (2.5), (2.8))

$$|\sigma_{n,j}(x)| \leq \sum_{\nu=0}^{[1/x]} A_{\nu}^{-\alpha} + \frac{2A_{[1/x]+1}^{-\alpha}}{x} + \frac{2A_{n-j}^{-\alpha}}{x} \leq \frac{C_{\alpha,\beta}^{10}}{x^{1-\alpha}}.$$

Лемма 3.4 доказана. $\square$

Лемма 3.5. Пусть $\{b_j\}_{j=1}^{\infty} \searrow$ убывающая последовательность положительных чисел такая, что $b_j = o(j^{1/p-1})$ для некоторого $p > 1$. Тогда для любого $\alpha \in (0, 1 - 1/p)$ справедливо соотношение

$$(3.18) \quad \left\| \sum_{\nu=[n/2]}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} b_{\nu} w_{\nu}(x) \right\|_{L_p(0,1)} = o(n^{-\alpha}), \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пользуясь условиями леммы, преобразованием Абеля, неравенством Минковского а также леммой 3.4, получим

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{1/n}^1 \left| \sum_{\nu=[n/2]}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} b_{\nu} w_{\nu}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
& \leq \left(\int_{1/n}^1 \left| \sum_{\nu=[n/2]}^{n-1} \Delta^{(1)} b_{\nu} \sum_{s=[n/2]}^{\nu} A_{n-s}^{-\alpha} w_s(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
& \quad + b_n \left(\int_{1/n}^1 \left| \sum_{s=[n/2]}^n A_{n-s}^{-\alpha} w_s(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
& \leq C_{\alpha,\beta}^{11} b_{[n/2]} \left(\int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^{p(1-\alpha)}} \right)^{1/p} + C_{\alpha,\beta}^{12} b_n \left(\int_{1/n}^1 \frac{dx}{x^{p(1-\alpha)}} \right)^{1/p} = o(n^{-\alpha}).
\end{aligned}$$

Далее (см. (2.5))

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^{1/n} \left| \sum_{\nu=[n/2]}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} b_{\nu} w_{\nu}(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \\
& \leq \frac{b_{[n/2]}}{n^{1/p}} \sum_{\nu=[n/2]}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} = O \left(b_{[n/2]} n^{1-\alpha-1/p} \right) = o(n^{-\alpha}).
\end{aligned}$$

Справедливость леммы 3.5 сразу же следует из полученных оценок. Лемма 3.5 доказана. $\square$

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Доказательство Теоремы 2.1. Для фиксированного $p > 1$ рассмотрим произвольный M_p -ряд вида

$$(4.1) \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} w_{\nu}(x),$$

где согласно определению M_p -ряда,

$$(4.2) \quad a_s \searrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-2} < +\infty.$$

Известно, что (см. [1], 7.3.3) условия (4.2) гарантируют сходимость ряда (4.1) в пространстве $L_p[0, 1]$, ($p > 1$) к некоторой функции $f(x) \in L_p[0, 1]$, при этом (4.1) является рядом Фурье-Уолша этой функции. Далее известно (см. [5] – [8]), что

для любого $\gamma > 0$ средние $\sigma_n^\gamma(x, f)$ сходятся к $f(x)$ по L_P норме. Пусть $\alpha \in (0, 1)$.

Пользуясь неравенством Минковского получим

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \|\sigma_n^{-\alpha}(x, f) - f(x)\|_p &\leq \|\sigma_n^{-\alpha}(x, f) - \sigma_n^{1-\alpha}(x, f)\|_p + \\ &+ \|\sigma_n^{1-\alpha}(x, f) - f(x)\|_p = I_p + o(1) \end{aligned}$$

где

$$(4.4) \quad I_p = \|\sigma_n^{-\alpha}(x, f) - \sigma_n^{1-\alpha}(x, f)\|_{L_p}.$$

Пользуясь свойством (2.10) можем написать

$$\sigma_n^{-\alpha}(x, f) - \sigma_n^{1-\alpha}(x, f) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{A_n^{1-\alpha}} \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x).$$

Откуда

$$(4.5) \quad I_p \leq C_{p,\alpha}^{(1)} n^{\alpha-1} \cdot \|\sigma_{n,\alpha}(x)\|_p, \quad \text{где} \quad \sigma_{n,\alpha}(x) =: \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x).$$

Пусть ε произвольное положительное число и $N < n/2$ натуральное число которое мы подберем позже. Представим выражение для $\sigma_{n,\alpha}(x)$ в следующем виде (см. (4.5))

$$(4.6) \quad \sigma_{n,\alpha}(x) = \sum_{\nu=0}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x) = \sum_{\nu=0}^{N-1} + \sum_{\nu=N}^n = \sigma_{n,1}(x) + \sigma_{n,2}(x).$$

Обозначим через $S_m(x)$, $m = 0, 1, \dots$ частичные суммы ряда (4.1). Применяя преобразование Абеля и пользуясь свойствами (2.5) – (2.7) получим

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{n,2}(x) &= \sum_{\nu=N}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x) \\ &= \sum_{\nu=N}^{n-1} \Delta^{(1)}(A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu) S_\nu(x) + n S_n(x) - N A_{n-N}^{-\alpha} S_{N-1}(x) \\ &= \sum_{\nu=N}^{n-1} \Delta^{(1)}(A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu) [S_\nu(x) - S_n(x)] + N A_{n-N}^{-\alpha} [S_n(x) - S_{N-1}(x)] \\ &= \sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu}^{-1-\alpha} \nu [S_\nu(x) - S_n(x)] - \sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{-\alpha} [S_\nu(x) - S_n(x)] \\ &\quad + N A_{n-N}^{-\alpha} [S_n(x) - S_{N-1}(x)] = n \sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu}^{-1-\alpha} [S_\nu(x) - S_n(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \alpha) \sum_{\nu=N}^{n-1} A_{n-\nu-1}^{-\alpha} [S_{\nu}(x) - S_n(x)] + N A_{n-N}^{-\alpha} [S_n(x) - S_{N-1}(x)] \\
& = \sum_{l=1}^3 \sigma_{n,2}^l(x).
\end{aligned}$$

Учитывая ограниченность L_p -норм частичных сумм ряда (4.1) и свойство (2.4), получим оценку

$$(4.8) \quad \|\sigma_{n,2}^3(x)\|_p \leq C_{p,\alpha}^{(2)} \frac{N}{(n-N)^\alpha}.$$

Для оценки суммы $\sigma_{n,2}^2(x)$ положим

$$B_k^\alpha = \sum_{\nu=N+1}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} a_{k+\nu-1}.$$

В силу условий теоремы имеем $\{B_k^\alpha\}_{k \geq 1} \searrow 0$. Согласно (2.12) при любом $x \in \left(\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s}\right]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad |\sigma_{n,2}^2(x)| &= \left| \sum_{\nu=N+1}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} \sum_{j=\nu}^n a_j w_j(x) \right| \leq \\
&\leq 9 \cdot \sum_{\nu=N+1}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} \sum_{j=1}^s a_{j+\nu-1} = 9 \cdot \sum_{j=1}^s B_j^\alpha.
\end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами (2.13), (4.9) и неравенством Гельдера приходим к неравенствам

$$\begin{aligned}
(4.10) \quad \|\sigma_{n,2}^2(x)\|_p^p &\leq 9^p \sum_{s=1}^{\infty} \int_{1/(s+1)}^{1/s} \left(\sum_{j=1}^s B_j^\alpha \right)^p dx \\
&\leq 9^p \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} \left(\sum_{j=1}^s B_j^\alpha \right)^p \leq C_{p,\alpha}^{(3)} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k^\alpha)^p k^{p-2} \\
&= C_{p,\alpha}^{(3)} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{\nu=N+1}^n (A_{n-\nu}^{-\alpha})^{\frac{p}{p-1}} \right]^{p-1} \left[\sum_{\nu=N+1}^n a_{k+\nu-1}^p \right] k^{p-2} \\
&= 9^p C_p \left[\sum_{\nu=N+1}^n (A_{n-\nu}^{-\alpha})^{\frac{p}{p-1}} \right]^{p-1} \sum_{\nu=N+1}^n \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k^p (k - \nu + 1)^{p-2}.
\end{aligned}$$

В силу условия $\alpha < 1 - 1/p$ и свойства (2.4) имеем

$$(4.11) \quad \left[\sum_{\nu=N+1}^n (A_{n-\nu}^{-\alpha})^{\frac{p}{p-1}} \right]^{p-1} = O \left(\sum_{\nu=1}^{n-N-1} \frac{1}{\nu^{\frac{\alpha p}{p-1}}} \right)^{p-1} = O((n-N-1)^{p-1-\alpha p}),$$

Следовательно при $p \geq 2$ выражение (4.10) меньше чем $C_{p,\alpha}^{(4)} \cdot (n - N)^{p(1-\alpha)} R_N$, где R_N N -ий остаток ряда (4.2).

Пусть теперь $p \in (1, 2)$, тогда

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad \|\sigma_{n,2}^2(x)\|_p^p &\leq C_{p,\alpha}^{(5)} (n - N)^{p(1-\alpha)-1} \sum_{\nu=N+1}^n \left[\sum_{k=\nu}^{2\nu-1} + \sum_{k=2\nu}^{\infty} \right] \\
 &\leq C_{p,\alpha}^{(6)} (n - N)^{p(1-\alpha)-1} \sum_{\nu=N+1}^n (a_\nu^p \nu^{p-1} + R_{2\nu}) \\
 &\leq C_{p,\alpha}^{(7)} (n - N)^{p(1-\alpha)-1} (n - N) R_{N+1} \leq C_{p,\alpha}^{(7)} n^{p(1-\alpha)} R_N.
 \end{aligned}$$

Окончательно получаем оценку $\|\sigma_{n,2}^2(x)\|_p \leq C_{p,\alpha}^{(8)} n^{1-\alpha} R_N^{1/p}$. Далее снова применяя преобразования Абеля представим $\sigma_{n,2}^1(x)$ в следующем виде (см. (4.7)).

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad \sigma_{n,2}^1(x) &= n \sum_{\nu=N}^{[n/2]-1} A_{n-\nu}^{-1-\alpha} [S_\nu(x) - S_n(x)] \\
 &\quad + n \sum_{\nu=[n/2]+1}^n A_{n-\nu}^{-\alpha} a_\nu w_\nu(x) - n A_{n-[n/2]}^{-\alpha} \sum_{\nu=[n/2]+1}^n a_\nu w_\nu(x) = \sum_{l=1}^3 \sigma_{n,2}^{1,l}(x).
 \end{aligned}$$

Поскольку ряд $\sum a_n^p n^{p-2}$, ($p > 1$) сходится, то $a_j = o(j^{1/p-1})$. Пользуясь леммой 3.4 с $a_j = b_j$, $j \geq 1$ получим

$$(4.14) \quad \|\sigma_{n,2}^{1,2}(x)\|_p = o(n^{1-\alpha}), \text{ при } \alpha \in (0, 1 - 1/p).$$

В силу условий теоремы ряд $\sum a_\nu w_\nu(x)$ сходится по L_p -норме, следовательно

$$(4.15) \quad \|\sigma_{n,2}^{1,3}(x)\|_p = o(n^{1-\alpha}), \text{ при любом } \alpha.$$

Для $\sigma_{n,2}^{1,1}(x)$ при любом $x \in \left(\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s}\right]$ имеем оценку (см. (2.12))

$$|\sigma_{n,2}^{1,1}(x)| = n \cdot \left| \sum_{\nu=N+1}^{[n/2]-1} A_{n-\nu}^{-1-\alpha} \sum_{j=\nu+1}^n a_j w_j(x) \right| \leq 9n \cdot \sum_{\nu=N+2}^{[n/2]-1} |A_{n-\nu}^{-1-\alpha}| \sum_{j=1}^s a_{j+\nu-1}.$$

Рассуждая также как и в (4.9) – (4.12) получим

$$\begin{aligned}
 \left\| \sigma_{n,2}^{1,1}(x) \right\|_p^p &\leq C_{p,\alpha}^{(9)} n^p \left[\sum_{\nu=N+2}^{[n/2]} |A_{n-\nu}^{-1-\alpha}|^{\frac{p}{p-1}} \right]^{p-1} \sum_{\nu=N+2}^{[n/2]} \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k^p (k - \nu + 1)^{p-2} \\
 &\leq C_{p,\alpha}^{(10)} n^p \left[\sum_{\nu=N+2}^{[n/2]} n^{-\frac{p(1+\alpha)}{p-1}} \right]^{p-1} o(n) = o\left(n^{p(1-\alpha)}\right),
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\left\| \sigma_{n,2}^{1,1}(x) \right\|_p = o(n^{1-\alpha}).$$

Учитывая (4.13) – (4.15), с помощью неравенства Минковского получаем

$$(4.16) \quad \left\| \sigma_{n,2}^1(x) \right\|_p = o(n^{1-\alpha}).$$

Окончательно имеем (см. (4.7), (4.8), (4.16))

$$(4.17) \quad \left\| \sigma_{n,2}(x) \right\|_p = \sum_{l=1}^3 \left\| \sigma_{n,2}^l(x) \right\|_p \leq C_{p,\alpha}^{(6)} n^{1-\alpha} R_N^{1/p} + C_{p,\alpha}^{(7)} \frac{N}{(n-N)^\alpha} + o(n^{1-\alpha}).$$

Выберем натуральное $N(\varepsilon)$ так, чтобы при всех $m \geq N(\varepsilon)$ выполнялось неравенство $C_{p,\alpha}^{(8)} R_m^{1/p} \leq \varepsilon$, это возможно в силу сходимости ряда (4.2). После этого зафиксируем некоторое $N \geq N(\varepsilon)$ и возьмем натуральное $n > 2N$ настолько большим, чтобы последние две слагаемые в выражении (4.17) оставались меньше чем $\varepsilon n^{1-\alpha}$. После чего получаем $\left\| \sigma_{n,2}(x) \right\|_p < 2\varepsilon n^{1-\alpha}$. Далее оценим $\sigma_{n,1}(x)$ (см. (2.5))

$$|\sigma_{n,1}(x)| = \left| \sum_{\nu=0}^{N-1} A_{n-\nu}^{-\alpha} \nu a_\nu w_\nu(x) \right| \leq C_{p,\alpha}^{(11)} \frac{N^2}{(n-N)^\alpha} = o(1), \quad n \rightarrow \infty$$

Следовательно при достаточно больших n имеем оценку $\left\| \sigma_{n,\alpha}(x) \right\|_p < 3\varepsilon$, откуда с учетом (2.4) получим $I_p < C_{p,\alpha}^{(12)} \varepsilon$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Доказательство Теоремы 2.3. Пусть $0 < \beta < \alpha < 1$ и пусть $\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)$ средние Чезаро порядка $-\alpha$ некоторого Ω_β -ряда. Зафиксируем любую возрастающую последовательность натуральных чисел $M = \{m_k\}_{k=1}^\infty$. Пусть далее

$$(4.18) \quad G_{n,i}^{\alpha,\beta} = \left\{ x \in \Delta_1^{(i)} : |\sigma_n^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| \geq \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot \frac{c_n}{A_n^{-\alpha}} \right\}$$

Согласно лемме 2.2 имеем $\text{mes} G_{n,i}^{\alpha,\beta} \geq \eta_{\alpha,\beta}^{(i)} > 0$. Положим

$$G_{\alpha,\beta}^i(M) = \bigcap_{q=1}^\infty \bigcup_{n=q}^\infty G_{m_n,i}^{\alpha,\beta}, \quad G_{\alpha,\beta}(M) = \bigcup_{i=1}^\infty G_{\alpha,\beta}^i(M)$$

Ясно, что $\text{mes}\{G_{\alpha,\beta}(M) \cap \Delta_1^{(i)}\} > 0$ и (см. (4.18))

$$\text{mes} G_{\alpha,\beta}(M) = \sum_{i=1}^\infty \lim_{q \rightarrow \infty} \text{mes} \left(\bigcup_{n=q}^\infty G_{m_n,i}^{\alpha,\beta} \right) \geq \sum_{i=1}^\infty \lim_{q \rightarrow \infty} \text{mes} G_{m_q,i}^{\alpha,\beta} > 0,$$

Покажем, что для любого $x \in G_{\alpha,\beta}(M)$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |\sigma_{m_k}^{-\alpha}(x, S_\beta)| = +\infty$$

Если $x \in G_{\alpha,\beta}(M)$, то очевидно существуют натуральные числа $k_0(x), i(x) \geq 1$ и последовательность $n_k =: n_k(x)$, такие, что $x \in G_{m_{n_k}, i(x)}^{\alpha,\beta}$, $k \geq k_0(x)$, но тогда (см. (4.18))

$$|\sigma_{m_{n_k}}^{-\alpha}(x, S_\beta)| \geq \gamma_{\alpha,\beta}^{(i)} \cdot \frac{c_{m_{n_k}}}{A_{m_{n_k}}^{-\alpha}}, \quad k \geq k_0(x)$$

Откуда $\lim |\sigma_{m_{n_k}}^{-\alpha}(x, \Omega_\beta)| = +\infty$. Теорема 4.3 доказана. $\square$

Доказательство Теоремы 2.4 проводится аналогичным образом, только вместо леммы 2.2 нужно использовать лемму 2.3.

Доказательство Теоремы 2.2. Возьмем произвольное $p_0 > 1$ и $\alpha_0 > 1 - 1/p_0$. Выберем число $\beta' \in (1 - 1/p_0, \alpha_0)$ и положим $c_j = b(j)/j^{\beta'}$, $j = 1, 2, \dots$, где $b(u) \in B$ выберем так, чтобы оказалось $\{c_j\}_{j=1}^\infty \searrow$. Покажем, что ряд $\sum_{j=1}^\infty c_j w_j(x)$ является M_{p_0} -рядом. Действительно коэффициенты этого ряда монотонно убывают и в силу определения с.к.ф. имеем

$$\sum_{j=1}^\infty c_j^{p_0} j^{p_0-2} = \sum_{j=1}^\infty \frac{b(j)^{p_0}}{j^{2-p_0+p_0\beta'}} < +\infty$$

С другой стороны средние Чезаро порядка $-\alpha_0$ ряда $\sum_{j=1}^\infty c_j w_j(x)$ не могут сходиться по L_{p_0} -норме, поскольку этот ряд будучи являясь $\Omega_{\beta'}$ -рядом согласно теореме 4.3 при $\alpha_0 > \beta'$ не содержит сходящихся подпоследовательностей средних Чезаро порядка $-\alpha_0$. Теорема 2.2 доказана. $\square$

Автор выражает благодарность М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Abstract. The paper investigates the convergence of the negative order Cesaro means of the Fourier series in Walsh system with monotone coefficients. It is given a description of the classes of the mentioned type series, the Cesaro means of which over all subsequences unbounded diverge on the sets of positive measure.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. И. Голубов, А. Ф. Ефимов, В. А. Скворцов, Ряды и Преобразования Уолша, Москва, Наука (1987).
- [2] А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, **1**, Мир, Москва, (1965).
- [3] Г. Харди, Расходящиеся ряды, Москва, (1951).
- [4] Д. Е. Меньшов, “Применение методов суммирования Чезаро отрицательного порядка к тригонометрическим рядам Фурье от суммируемых функций и от функций с суммируемым квадратом”, Мат. сборник, **93(135)**, no. 4, 494 – 511 (1974).
- [5] J. Fine, “Cesaro summability of Walsh-Fourier series”, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41**, 588 – 591 (1955).
- [6] S. Yano, “Cesaro summability of Walsh-Fourier series”, Proc. Amer. Math. Soc., **2**, 267 – 272 (1957).
- [7] U. Goginava, “The maximal operator of the $(C; \alpha)$ means of the Walsh-Fourier series”, Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput., **26**, 127 -135 (2006).
- [8] N. J. Fujii, “Cesaro summability of Walsh-Fourier series”, Proc. Amer. Math. Soc., **77**, 111 – 116 (1979).
- [9] F. Weisz, “Cesaro summability of one and two-dimensional Walsh-Fourier series”, Anal. Math., **22**, 229 – 242 (1996).
- [10] F. Weisz, “ $(C; \alpha)$ summability of Walsh-Fourier series”, Anal. Math., **27**, 141 – 156 (2001).
- [11] Л. В. Жижиашвили, “О сходимости и суммируемости тригонометрических рядов Фурье”, Мат. заметки, **19**, no. 6, 887 -Ч 898 (1976).
- [12] А. И. Григорьев, “О сходимости Чезаровских средних тригонометрических рядов Фурье”, Мат. Заметки, **34**, no. 4 (1983).
- [13] Л. Н. Галоян, “Суммирование тригонометрических рядов Фурье и сопряженных рядов по методу (C, α, β) ”, Известия НАН Армении, Математика, **46**, no. 5, 25 – 40 (2012).

Поступила 28 ноября 2011