Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 71-80.

ОБ ОДНОМ ПАРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ПОЛУКОНСЕРВАТИВНОМ СЛУЧАЕ

В. В. ТЕР-АВЕТИСЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *van88teravetisyan@gmail.com*

Аннотация. Рассматривается парное интегральное уравнение на всей прямой относительно некоторой искомой функции f. Предполагается, что ядерные функции уравнения четные и представляются в виде суперпозиции экспонент. Уравнение приводится к системе интегральных уравнений на положительной полуоси относительно двух функций: $f_1(x) = f(x)$ и $f_2(x) = f(-x)$. Применяя факторизационный метод и используя решение уравнения Амбарцумяна, получается система относительно преобразований Лапласа α_1, α_2 функций f_1, f_2. В полуконсервативном случае, при некоторых условиях на свободный член доказывается теорема существования и единственности решения этой системы. Представлен процесс построения функций α_1, α_2 путем последовательных приближений. Описан метод построения решения (f_1, f_2) посредством функций α_1, α_2.

MSC2010 number: 45E10.

Ключевые слова: Парное уравнение; факторизация, уравнение Амбарцумяна; метод дискретных ординат.

1. Введение

Среди интегральных уравнений свертки важное место занимают следующие два класса уравнений на всей прямой:

а) парное уравнение

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)f(t)dt, \ x > 0, \\ f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)f(t)dt, \ x < 0, \end{array} \right. \tag{1.1}$$

где $K_j \in L_1(-\infty, \infty), \ j = 1, 2,$

б) уравнение с двумя ядрами

$$f(x) = g(x) + \int_0^{\infty} K_1(x-t)f(t)dt + \int_{-\infty}^{0} K_2(x-t)f(t)dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) является сопряженным к уравнению (1.1).

Методами гармонического анализа разработана стройная теория разрешимости уравнений (1.1) и (1.2). Необходимым условием однозначной разрешимости уравнений (1.1) и (1.2) является выполнение условий не вырождения символов:

$$1 - \overline{K}_j(s) \neq 0, \quad -\infty < s < +\infty, \; j = 1, 2, \tag{1.3}$$

где $\overline{K}_j(s)$ являются преобразованиями Фурье функций $K_j(x)$. Теория, изложенная в [1]-[3] охватывает не особые уравнения и некоторые частные случаи особых уравнений с не вырождающимися символами. В работе Л. Г. Арабаджяна [4] получены результаты по разрешимости уравнения с двумя ядрами (1.2) в некоторых так называемых консервативных или полуконсервативных случаях. В этих случаях хотя бы одно из условий (1.3) нарушается. Основным результатом работы [4] по разрешимости неоднородного уравнения (1.2) есть следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть в уравнении* (1.2) *выполняются условия*

$$g \in L_1(R), \quad 0 \leq K_j \in L_1(R), \; \int_{-\infty}^{\infty} K_j(t)dt = 1, \; j = 1, 2.$$

Пусть, кроме того, существуют $\omega_j^{\pm} = \int_0^{\infty} tK_j(\pm t)dt < +\infty, \; j = 1, 2,$ *и имеет место одно из следующих условий:*

1) $\omega_1 > 0, \; \omega_2 < 0$*;*

2) $\omega_1 > 0, \; \omega_2 \geq 0$*;*

3) $\omega_1 \leq 0, \; \omega_2 < 0,$

где $\omega_j = \omega_j^+ - \omega_j^-, \; j = 1, 2.$ *Тогда это уравнение обладает локально интегрируемым на* R *решением* f*.*

Аналогичные результаты по уравнению (1.1) не известны. Предполагается, что ядерные функции $K_j \geq 0, \; j = 1, 2$ четные и представлены в виде суперпозиции экспонент:

$$K_j(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma_j(s), \; j = 1, 2, \tag{1.4}$$

где $0 \leq a < b \leq \infty$, а σ_1 и σ_2 - неубывающие функции на (a, b). Нами будут рассмотрены вопросы разрешимости и построения решения системы уравнений (1.1) в полуконсервативном случае, т.е. когда $\lambda_1 = 1, \lambda_2 < 1$, где

$$\lambda_j = \int_{-\infty}^{\infty} K_j(x)dx = 2 \int_a^b \frac{1}{s} d\sigma_j(s), \; j = 1, 2.$$

Запишем (1.1) в виде следующей системы:

$$\begin{cases} f_1(x) = g_1(x) + \int_0^\infty K_1(x-t) f_1(t) dt + \int_0^\infty K_1(x+t) f_2(t) dt \\ f_2(x) = g_2(x) + \int_0^\infty K_2(x-t) f_2(t) dt + \int_0^\infty K_2(x+t) f_1(t) dt, \end{cases} \tag{1.5}$$

где $f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f(-x),\ x > 0$ новые искомые функции и $g_1(x) = g(x),\ g_2(x) = g(-x),\ x > 0$. Предполагается, что

$$0 \le g_j \in L^+ \equiv L_1(0,\infty), j = 1, 2. \tag{1.6}$$

2. Уравнение Винера-Хопфа

В этом параграфе приведем некоторые сведения об уравнениях Винера-Хопфа, которые будут использованы нами в дальнейшем изложении.

2.1. О диссипативном и консервативном уравнении Винера-Хопфа. Рассмотрим следующее вспомогательное интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt,\ x > 0, \tag{2.1}$$

где $K(x) \ge 0, \quad \lambda = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty K(x) dx \le 1$.

Пусть $\hat{K}$ - интегральный оператор, фигурирующий в (2.1):

$$(\hat{K} f)(x) = \int_0^\infty K(x-t) f(t) dt.$$

Этот оператор ограниченно действует в E^+, где E^+ - одно из пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$ и $C_0[0,\infty)$. В диссипативном случае $\lambda < 1$ уравнение (2.1) является уравнением со сжимающим оператором и обладает единственным решением $f \in E^+$ при $g \in E^+$. В консервативном случае $\lambda = 1$ при произвольном $g \in L^+$ существует основное решение f уравнения (2.1), которое является пределом простых итераций с нулевым начальным приближением. Это решение обладает асимптотикой

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o(x^2), \quad x \to \infty.$$

Если свободный член имеет конечный первый момент, то есть

$$\int_0^\infty |g(t)|\, t dt < +\infty, \tag{2.2}$$

то имеет место асимптотика

$$\int_0^x |f(t)|\, dt = o(x), \quad x \to \infty.$$

2.2. **Уравнение Амбарцумяна.** Рассмотрим случай, когда ядро K представлено в виде

$$K(x) = \int_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s),$$

где σ - неубывающая функция на $(a,b) \subseteq (0,\infty)$ и

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 2\int_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) \leq 1.$$

Пусть I - единичный оператор. Имеет место следующая вольтерровая факторизация оператора $I - \hat{K}$ (см. [6]):

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}^-)(I - \hat{V}^+). \tag{2.3}$$

Здесь $\widehat{V}^\pm$ - следующие интегральные операторы:

$$(\widehat{V}^+ f)(x) = \int_0^x V(x-t)f(t)dt, \ (\widehat{V}^- f)(x) = \int_x^\infty V(t-x)f(t)dt.$$

Ядерная функция $V \in L^+$ этих операторов определяется согласно формуле:

$$V(x) = \int_a^b e^{-xs}\varphi(s)d\sigma(s) \in L^+, \tag{2.4}$$

где функция $\varphi(s)$ является основным решением уравнения Амбарцумяна

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s)\int_a^b \frac{1}{s+p}\varphi(p)d\sigma(p). \tag{2.5}$$

Как в диссипативном случае $\lambda < 1$, так и в консервативном случае $\lambda = 1$ основное решение уравнения (2.5) является пределом простых итераций с нулевым начальным приближением и обладает свойством:

$$\varphi \geq 0, \quad \gamma = \int_0^\infty \frac{1}{s}\varphi(s)d\sigma(s) = 1 - \sqrt{1-\lambda} \ (\leq 1). \tag{2.6}$$

2.3. **Резольвентная функция.** Для обращения операторов, фигурирующих в факторизации (2.3) необходимо построить резольвентную функцию Φ. Как при $\lambda < 1$, так и при $\lambda = 1$ функция определяется из следующего уравнения типа восстановления:

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t)dt.$$

Из вида (2.4) функции V следует, что резольвентная функция может быть представлена в виде (см. [7])

$$\Phi(x) = \int_0^b e^{-xp} d\omega(p) \geq 0,$$

где ω - неубывающая функция. Преобразование Лапласа функции Φ выражается через φ следующим образом:

$$\int_0^\infty \Phi(t)e^{-ts}dt = \varphi(s) - 1. \tag{2.7}$$

В диссипативном случае имеем

$$\Phi \in L_1(0,\infty), \quad \int_0^\infty \Phi(t)dt = \int_0^b \frac{1}{p}d\omega(p) = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} < \infty.$$

Тогда

$$(I - \widehat{V}^{\pm})^{-1} = I + \widehat{\Phi}^{\pm}, \tag{2.8}$$

где операторы $\widehat{\Phi}^{\pm}$ определяются посредством

$$(\widehat{\Phi}^{+}f)(x) = \int_0^x \Phi(x-t)f(t)dt, \ (\widehat{\Phi}^{-}f)(x) = \int_x^\infty \Phi(t-x)f(t)dt.$$

В консервативном случае операторы $I - \widehat{V}^{\pm}$ необратимы в пространствах E^{+}. Тогда $\Phi \notin L_{+}$, имеет место асимптотика:

$$\int_0^x \Phi(t)dt = O(x), \quad x \to \infty,$$

а равенство (2.8) понимается как равенство операторов, переводящих пространство L_{+} в пространство ограниченных функций. Основное решение f уравнения (2.1) с $g \in L_{+}$ имеет вид (см. [6])

$$f = (I + \widehat{\Phi}^{+})(I + \widehat{\Phi}^{-})g, \tag{2.9}$$

то есть

$$f(x) = F(x) + \int_0^x \Phi(x-t)F(t)dt,$$

где

$$F(x) = g(x) + \int_x^\infty \Phi(t-x)g(t)dt.$$

3. Решение системы (1.1)

Пусть $M\left(\dfrac{1}{s}\right)$ банахово пространство функций α на (a,b) с конечной нормой, удовлетворяющие условию $\|\alpha\| = sup\ ess\,(s\,|\alpha(s)|) < \infty$. Из равенств (2.6) следует, что

$$\varphi_j \in M\left(\frac{1}{s}\right), \ j = 1, 2. \tag{3.1}$$

Рассмотрим вопрос существования решения системы (1.5). Введем преобразование Лапласа от функций $f_{1,2}$:

$$\alpha_j(s) = \int_0^\infty e^{-ts} f_j(t)dt,\ j = 1, 2.$$

Решение системы (1.5) будет построено в классе функций (f_1, f_2) таких, что соответствующие $\alpha_{1,2}$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha_j(s) \in M\left(\frac{1}{s}\right),\ j = 1, 2.$$

Из (1.5), учитывая представления (1.4) получим

$$\left\{\begin{array}{l} (I - \widehat{K}_1)f_1(x) = g_1(x) + \int_a^b e^{-xs}\alpha_2(s)d\sigma_1(s) \\ (I - \widehat{K}_2)f_2(x) = g_2(x) + \int_a^b e^{-xs}\alpha_1(s)d\sigma_2(s), \end{array}\right. \tag{3.2}$$

где $\widehat{K}_{1,2}$ интегральные операторы Винера-Хопфа, определенные посредством:

$$\left(\widehat{K}_j f\right)(x) = \int_0^\infty K_j(x-t)f(t)dt,\ j = 1, 2.$$

Уравнения (3.2) можно рассматривать как уравнения Винера-Хопфа относительно функций f_1 и f_2. При этом правые части этих уравнении играют роль свободных членов. Используя свойство суперпозиции для основных решений, получим следующие соотношения для функций f_1 и f_2:

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x) = \widetilde{g}_1(x) + \int_a^b P_1(x,s)\alpha_2(s)d\sigma_1(s) \\ f_2(x) = \widetilde{g}_2(x) + \int_a^b P_2(x,s)\alpha_1(s)d\sigma_2(s), \end{array}\right. \tag{3.3}$$

где функции P_j и $\widetilde{g}_j$ являются основными решениями следующих уравнении Винера-Хопфа:

$$P_j(x,s) = e^{-xs} + \int_0^\infty K_j(x-t)P_j(t,s)dt,\quad j = 1, 2, \tag{3.4}$$

$$\widetilde{g}_j(x) = g_j(x) + \int_0^\infty K_j(x-t)\widetilde{g}_j(t)dt,\quad j = 1, 2.$$

В (3.4) s играет роль параметра. Из (2.9) имеем:

$$\widetilde{g}_j(x) = (I + \widetilde{\Phi}_j^+)(I + \widetilde{\Phi}_j^-)g_j,\quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим следующие функции

$$\widetilde{\alpha}_j(s) = \int_0^\infty e^{-xs}\widetilde{g}_j(x)dx,\quad j = 1, 2. \tag{3.5}$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям системы (3.3) приходим к следующей системе интегральных уравнений относительно α_1, α_2:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1(p) = \widetilde{\alpha}_1(p) + \int_a^b U_1(p,s)\alpha_2(s)d\sigma_1(s) \\ \alpha_2(p) = \widetilde{\alpha}_2(p) + \int_a^b U_2(p,s)\alpha_1(s)d\sigma_2(s), \end{array}\right. \tag{3.6}$$

где

$$U_j(p,s)=\int_0^\infty P_j(x,s)e^{-xp}dx,\quad j=1,2. \tag{3.7}$$

Используя формулы (3.5), для функции $\widetilde{\alpha}_j$ получим следующее представление:

$$\widetilde{\alpha}_j(s)=\left(1+\int_0^\infty \Phi_j(x)e^{-sx}dx\right)\beta_j(s),\quad j=1,2,$$

где

$$\beta_j(s)=\int_0^\infty e^{-xs}\left[g_j(x)+\int_0^\infty \Phi_j(t)g_j(x+t)dt\right]dx,\quad j=1,2. \tag{3.8}$$

Из формулы (2.7) имеем:

$$1+\int_0^\infty \Phi_j(x)e^{-sx}dx=\varphi_j(s),\quad j=1,2.$$

Следовательно имеют место равенства

$$\widetilde{\alpha}_j(s)=\varphi_j(s)\beta_j(s),\quad j=1,2. \tag{3.9}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены* (1.6) *и* (2.2). *Тогда*

$$\widetilde{\alpha}_j(s)\in M\left(\frac{1}{s}\right),\quad j=1,2. \tag{3.10}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi_j(s)\in M\left(\frac{1}{s}\right)$ (см. (3.1)), то согласно представлению (3.9) достаточно показать, что функции $\beta_j(s)$ ограничены. Как в диссипативном, так и в полуконсервативном случае (учитывая условие (2.2)) имеем

$$g_j(x)+\int_0^\infty \Phi_j(t)g_j(x+t)dt\in L^+.$$

Из представления (3.8) получим, что функции $\beta_j(s)$ ограничены. □

4. О разрешимости (3.6)

Запишем систему (3.6) в операторной форме:

$$\begin{cases}\alpha_1=\widetilde{\alpha}_1+\widehat{U}_1\alpha_2\\ \alpha_2=\widetilde{\alpha}_2+\widehat{U}_2\alpha_1,\end{cases} \tag{4.1}$$

где операторы $\widehat{U}_j$ определяются следующим образом:

$$\left(\widehat{U}_1\alpha\right)(p)=\int_a^b U_1(p,s)\alpha(s)d\sigma_1(s),$$

$$\left(\widehat{U}_2\alpha\right)(p)=\int_a^b U_2(p,s)\alpha(s)d\sigma_2(s).$$

Покажем, что операторы $\widehat{U}_j$ переводят пространство $M\left(\frac{1}{s}\right)$ в себя.

Для этого воспользуемся следующими оценками для решений уравнений (3.4) (см. [6]):

$$\int_a^b P_1(x,s)\frac{1}{s}d\sigma_1(s) = \lambda_1, \tag{4.2}$$

$$\int_a^b P_2(x,s)\frac{1}{s}d\sigma_2(s) \le \lambda_2.$$

Отметим что в соотношении (4.2) имеет место равенство в силу $\lambda_1 = 1$.

Умножая обе части равенств (3.7) на $\frac{1}{s}$ и интегрируя по мере $\sigma_j(s)$ на (a,b) получим

$$\int_a^b U_j(p,s)\frac{1}{s}d\sigma_j(s) \le \frac{\lambda_j}{p}, \quad j = 1,2. \tag{4.3}$$

Пусть $\alpha(s) \in M\left(\frac{1}{s}\right)$. Тогда существует число A такое, что $\alpha(s) \le \frac{A}{s}$. Имеем

$$\left(\widehat{U}_j\alpha\right)(p) = \int_a^b U_j(p,s)\alpha(s)d\sigma_j(s) \le \tag{4.4}$$

$$\le \int_a^b U_j(p,s)\frac{A}{s}d\sigma_j(s) \le \frac{A\lambda_j}{p},$$

что означает, что $\left(\widehat{U}_j\alpha\right)(p) \in M\left(\frac{1}{p}\right)$. Из оценок (4.3) и (4.4) следует также, что $\left\|\widehat{U}_j\right\| \le \lambda_j$. Операторы $\widehat{U}_1\widehat{U}_2$ и $\widehat{U}_2\widehat{U}_1$ действуют в пространстве $M\left(\frac{1}{s}\right)$ и для норм этих операторов имеют место оценки:

$$\left\|\widehat{U}_1\widehat{U}_2\right\| \le q, \quad \left\|\widehat{U}_2\widehat{U}_1\right\| \le q,$$

где

$$q = \lambda_1\lambda_2 < 1.$$

Из этих оценок легко следует разрешимость системы (3.6). Можно, например, исключить α_2 из (4.1) и получить следующее уравнение со сжимающим оператором относительно α_1:

$$\alpha_1 = (\widetilde{\alpha}_1 + \widehat{U}_1\widetilde{\alpha}_2) + (\widehat{U}_1\widehat{U}_2)\alpha_1.$$

Рассмотрим теперь следующие последовательные приближения для системы (4.1), определенных посредством

$$\alpha_1^{(n)} = \widetilde{\alpha}_1 + \widehat{U}_1\alpha_2^{(n)}$$

$$\alpha_2^{(n+1)} = \widetilde{\alpha}_2 + \widehat{U}_2\alpha_1^{(n)}, \quad n = 0,1,2,...$$

$$\alpha_2^{(0)} = 0.$$

Эти приближения сходятся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Нами доказан следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены* (1.6) *и* (2.2). *Тогда система* (4.1) *имеет единственное решение в пространстве* $M\left(\frac{1}{s}\right) \times M\left(\frac{1}{s}\right)$.

Покажем, что если пара (α_1, α_2) является решением системы (3.6), то функции $f_{1,2}$ определенные посредством (3.3) являются решением системы (1.1). Действительно, подставляя представления (3.5) и (3.7) функций α_j и U_j в (3.6), получим систему (3.3). Отсюда непосредственно следует, что функции $f_{1,2}$ являются решением системы (1.1).

Преимущество системы (4.1) относительно (1.1) является то, что ее легко можно алгебраизировать. Для этого нужно заменить функции $\sigma_{1,2}$ на кусочно постоянные функции с конечным числом скачков, после чего система (4.1) приводится к конечной алгебраической системе. Также можно дискретизировать уравнение Амбарцумяна (2.5) и упростить построение резольвентных функций $\Phi_{1,2}$(см. [8]).

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за постановку задачи и внимание к работе.

Abstract. A dual integral equations on the whole real axis with an unknown function f is considered. It is supposed that the kernel functions of the equations are even and representable as superposition of exponents. The equation is transferred to a system of integral equations on the positive semi-axis with two unknown functions: $f_1(x) = f(x)$ and $f_2(x) = f(-x)$. Applying a factorization method and using the solution of Ambartsumian equation, a system of Laplace transforms α_1, α_2 of functions f_1, f_2 is obtained. Under some conditions on the free term, the existence and uniqueness of the solution of that system is proved in the semiconservative case. A construction of the functions α_1, α_2 is given by means of successive approximations, and a construction method of the solution (f_1, f_2) by α_1, α_2 is described.

Список литературы

[1] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский. Уравнения типа свертки. Москва, Наука (1978).

[2] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман. Уравнения свертки и проекционные методы их решения. Москва, Наука, 1971.

[3] З. Пресдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва, Мир (1979) (РЖМат, 1980, 4Б533).

[4] Л. Г. Арабаджян, “О консервативном интегральном уравнении с двумя ядрами”, Матем. Заметки, **62** (3), 323-331, (1997).

[5] M. Mashreghi. On solution of dual equations. Третье Российско-Армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. Ереван, 118-120, (2010).
[6] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники, Математический анализ. Москва, ВИНИТИ АН СССР **22**, 175-244, (1984).
[7] Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян. “Об одном классе интегральных уравнений восстановления”, Матем. заметки, **47** (6), 23-30 (1990).
[8] Н. Б. Енгибарян, Э. А. Мелконян. “О методе дискретных ординат”, ДАН СССР, **292** (2), 322-326 (1985).

Поступила 25 августа 2011