Известия НАН Армении. Математика, том 47, н. 2, 2012, стр. 19-30.

МЕРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЛОСКОСТЕЙ И ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА

Р. Г. АРАМЯН

Российско-Армянский (Славянский) университет
Институт Математики Национальной Академии Наук Армении [1]
E-mail: *rafikaramyan@yahoo.com*

Аннотация. В данной работе найдены два представления (т.н. флаг-представления) для меры плоскостей пересекающих выпуклое тело, которые получаются путем стохастической аппроксимации выпуклого тела. Результаты получаются в терминах нормальных кривизн поверхности тела. Случайные многогранники аппроксимирующие выпуклое тело зависят от некоторого распределения P на поверхности тела. Здесь, также, доказывается что получаемые флаг-представления не зависят от плотности распределения P.

MSC2010 number: 53C65, 62L20.

Ключевые слова: Интегральная геометрия; выпуклые тела; стохастическая аппроксимация; флаговая плотность.

1. Введение

Через $\mathbf{E}$ обозначим пространство плоскостей в $\mathbb{R}^3$. Мы рассматриваем локально-конечные, знакопеременные меры μ в пространстве $\mathbf{E}$, обладающие плотностями относительно инвариантной относительно евклидовых движений меры, т.е.

$$\mu(de) = h(e)\, de. \tag{1.1}$$

Здесь de - элемент инвариантной меры, который можно представить в виде

$$de = dp \cdot d\xi,$$

где (p, ξ) обычная параметризация плоскости e: p - расстояние e от начала координат O; $\xi \in \mathrm{S}^2$ - направление нормали к e, $d\xi$ - элемент меры Лебега на единичной сфере S^2. Также мы будем использовать запись $h(e) = h(p, \xi)$.

Ниже будем рассматривать понятие флага в $\mathbb{R}^3$ естественным образом возникшее в комбинаторной интегральной геометрии (см. [2]). Приведем определение флага:

[1]Работа выполнена при частичной поддержке государственного комитета по науке Республики Армения, Грант 11-1a359

Определение 1.1. *Флагом в $\mathbb{R}^3$ называется тройка $f = (P, g, e)$, где P – точка в $\mathbb{R}^3$, g – прямая, проходящая через эту точку, а e – плоскость, содержащая прямую g.*

Имеются два эквивалентных представления флага (см. [2]):

$$f = (P, \Omega, \Phi) \text{ и } f = (P, \omega, \varphi),$$

где Ω - пространственное направление прямой g в $\mathbb{R}^3$, Φ - угол поворота плоскости e вокруг прямой g, ω - направление нормали к e, φ - направление прямой g, лежащей в плоскости e. Области изменения Ω и ω двумерное эллиптическое пространство $\mathcal{E}_2$, которое получается из единичной сферы путем идентификации противоположных точек, а Φ и φ являются элементами $\mathcal{E}_1$.
Используя меру μ, определим в пространстве флагов следующую (флаговую) функцию (см.[10], [5])

$$\rho(f) = \rho(P, \omega, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{S}^2} \cos^2(\varphi - \psi)\, h_{[P]}(\xi)\, d\xi. \tag{1.2}$$

Здесь $[P]$ - пучок плоскостей, содержащих точку $P \in \mathbb{R}^3$, $h_{[P]}(\xi)$ сужение h на $[P]$, ψ - направление проекции ξ на плоскость флага f. Обозначение $h_{[P]}(\xi)$ корректно, поскольку нормальное направление ξ однозначно определяет плоскость из $[P]$. Заметим, что интеграл (1.2) не зависит от выбора точки отсчета на плоскости флага f.

Определение 1.2. *Функцию ρ, заданную в пространстве флагов $\mathcal{F}$ с помощью* (1.2)*, будем называть флаговой плотностью меры μ.*

Понятие флаговой плотности было определено и систематически развито Р. В. Амбарцумяном в работах [2], [1].
Заметим, что в [5] (см. также [6], [4], [12]) (1.2) было рассмотрено как интегральное уравнение и с помощью методов интегральной геометрии восстановлена h по заданной ρ.
Пусть $\mathbf{B}$ выпуклое тело с границей $\partial\mathbf{B}$, обладающее непрерывной и положительной гауссовой кривизной в каждой точке $\partial\mathbf{B}$. Через $[\mathbf{B}]$ обозначим множество плоскостей из $\mathbf{E}$, пересекающихся с $\mathbf{B}$. Пусть $s(\omega)$ точка на $\partial\mathbf{B}$ с внешней нормалью ω. Через $k_1(\omega), k_2(\omega)$ обозначим главные нормальные кривизны $\partial\mathbf{B}$ в точке

$s(\omega) \in \partial\mathbf{B}$, а через $k(\omega, \varphi)$ - нормальную кривизну $\partial\mathbf{B}$ в точке $s(\omega)$ в направлении φ, здесь φ измеряем от первого главного направления.

Основной результат статьи сформулирован в следующих теоремах.

Теорема 1.1. *Пусть μ – знакопеременная мера в пространстве $\mathbf{E}$ с непрерывной плотностью h относительно инвариантной меры de, а $\mathbf{B}$ - достаточно гладкое выпуклое тело. Имеет место следующее представление:*

$$\mu([\mathbf{B}]) = (2\pi^2)^{-1} \int_{S^2} \int_0^{2\pi} \rho(s(\omega), \omega, \varphi) \frac{\sqrt{k_1(\omega) k_2(\omega)}}{k^2(\omega, \varphi)} d\varphi \, d\omega, \tag{1.3}$$

где ρ – флаговая плотность меры μ, определяемая формулой (1.2).

Заметим что, формула (1.3) с помощью стохастической аппроксимации с равномерным распределением, впервые найдена в [7].

Обозначим через $\mathbf{B}(\omega, \xi)$ проекцию выпуклого тела $\mathbf{B}$ на плоскость, проходящую через начало координат и натянутую на векторы $\omega \in \mathbf{S}^2$ и $\xi \in \mathbf{S}^2$. Пусть $R(\omega, \xi)$ есть радиус кривизны границы $\partial\mathbf{B}(\omega, \xi)$ в точке с нормалью ω.

Следствие 1.1.

$$\mu([\mathbf{B}]) = (4\pi)^{-1} \int_{S^2} \int_{\mathbf{S}^2} R(\omega, \xi) \, h_{[P]}(\xi) \, d\xi \, d\omega, \tag{1.4}$$

где $R(\omega, \xi)$ - радиус проекционной кривизны $\partial\mathbf{B}$, P - точка на $\partial\mathbf{B}$ с внешней нормалью ω.

Теперь пусть $k_1(s), k_2(s)$ - главные нормальные кривизны $\partial\mathbf{B}$ в точке $s \in \partial\mathbf{B}$, а $f_i = (s, g_i, t)$, $i = 1, 2$ - флаг, где t касательная плоскость к $\partial\mathbf{B}$ в точке s, g_i есть i-тое главное направление в $s \in \partial\mathbf{B}$.

Теорема 1.2. *Пусть μ – знакопеременная мера в пространстве $\mathbf{E}$ с плотностью h относительно инвариантной меры de, а $\mathbf{B}$ достаточно гладкое выпуклое тело. Тогда имеет место следующее представление:*

$$\mu([\mathbf{B}]) = (2\pi)^{-1} \int_{\partial\mathbf{B}} [k_1(s)\rho(f_2) + k_2(s)\rho(f_1)] \, ds, \tag{1.5}$$

где ρ флаговая плотность меры μ задаваемая формулой (1.2).

Заметим, что в случае когда μ трансляционно-инвариантная мера в $\mathbf{E}$ ($d\mu = dp \times m(d\xi)$) представление (1.5), где

$$\rho(f) = \rho(\omega, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{S}^2} \cos^2(\varphi - \psi)\, m(d\xi). \tag{1.6}$$

впервые найдено в [9].

2. Предварительные сведения

В [1] было установлено существование т. н. *флаг-представления* для функции ширины выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$ используя некоторое стандартное флаг-представление для функции ширины выпуклых многогранников.

Пусть $\mathbf{B}$ выпуклое тело и $H(\xi)$ его функция ширины в направлении ξ. Тогда существует мера m в $\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2$ такая, что для каждого $\xi \in \mathrm{S}^2$ (см. [1])

$$H(\xi) = \int_{\mathrm{S}^1 \times \mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega, \Phi)\, m(d\Omega, d\Phi), \tag{2.1}$$

где α - угол между направлением $\Omega \in \mathrm{S}^2$ и следом плоскости e_ξ на плоскость флага $f = (\Omega, \Phi)$, которую обозначим через $e(\Omega, \Phi)$. Отметим, что представление (2.1) не единственно (существует много мер m для данного H).

Заметим, что в случае когда μ трансляционно-инвариантная мера на $\mathbf{E}$ с элементом $d\mu = dp \times \delta_\xi$, где δ_ξ - дельта мера сконцентрированная на направлении ξ, имеем $H(\xi) = \mu([\mathbf{B}])$.

Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^3$ выпуклый многогранник и $e \in [\mathbf{K}] \subset \mathbf{E}$. Вершинами выпуклого многоугольника $e \cap \mathbf{K}$ служат точки пересечения e с ребрами $\mathbf{K}$. Ребра $\mathbf{K}$ обозначим через L_i. Так как сумма внешних углов выпуклого многоугольника $e \cap \mathbf{K}$ равна 2π, имеем:

$$\sum_i \alpha_i(e)\, I_{[L_i]}(e) = 2\pi I_{[\mathbf{K}]}. \tag{2.2}$$

Здесь $\alpha_i(e)$ - внешний угол соответствующий вершине $e \cap L_i$ многоугольника $e \cap \mathbf{K}$, сумма берется по всем ребрам $\mathbf{K}$.

В [1], интегрированием (2.2) относительно трансляционно - инвариантной меры $d\mu = dp \times m(d\xi)$, найдено некоторое стандартное флаг-представление для функции ширины выпуклого многогранника $\mathbf{K}$. В [7], используя аппроксимацию выпуклого тела многогранниками, было найдено новое представление для функции ширины выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$. В [3], используя стохастическую аппроксимацию гладкого выпуклого тела многогранниками (аппроксимация Вороного), было найдено представление (1.3) для трансляционно-инвариантных мер.

Здесь мы интегрируем выражение (2.2) относительно меры $\mu(de) = h(e)de$, где h - непрерывная функция определенная на $\mathbf{E}$. Имеем

$$
\begin{aligned}
(2.3) \quad 2\pi\mu([\mathbf{K}]) &= \sum_i \int_{[L_i]} \alpha_i(e)\, h(e)\, de = \sum_i \int_{[L_i]} \alpha_i(e)\, h(p,\xi)\, dp\, d\xi \\
&= \sum_i \int_{[L_i]} \alpha_i(e) h(x,\xi) \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid dx d\xi \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \int_{L_i} \int_{\mathrm{S}^2} \alpha_i(e) h(x,\xi) \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid d\xi dx.
\end{aligned}
$$

Здесь $\widehat{\xi,\Omega_i}$ угол между ξ и Ω_i, где Ω_i - направление ребра L_i. Здесь, также мы использовали хорошо известный факт из интегральной геометрии

$$
de = dp\, d\xi = \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid \ dx\, d\xi,
$$

где x - точка пересечения $e \cap L_i$ а dx мера Лебега на L_i.

Из теоремы синусов сферической геометрии (см. [1]) следует что

$$
(2.4) \qquad \alpha_i(e) \ \mid \cos(\widehat{\xi,\Omega_i}) \mid = \int_{A_i} \sin^2 \alpha(\xi,\Omega_i,\Phi)\, d\Phi,
$$

где A_i - внешний двугранный угол ребра L_i. Подставляя (2.4) в (2.3) получим

$$
(2.5) \qquad 4\pi\mu([\mathbf{K}]) = \sum_i \int_{L_i} \int_{A_i} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi,\Omega_i,\Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, d\Phi\, dx.
$$

3. Стохастическая аппроксимация

Пусть $\mathbf{B}$ - достаточно гладкое выпуклое тело (с 3 раза непрерывно дифференцируемой поверхностью) в $\mathbb{R}^3$. Предположим, что во всех точках $\partial\mathbf{B}$ гауссова кривизна положительна. Тогда сферическое (гауссовское) отображение поверхности $\partial\mathbf{B}$ на единичную сферу S^2 является гомеоморфизмом.

Мы рассмотрим следующую стохастическую аппроксимацию выпуклого тела $\mathbf{B}$. Независимо друг от друга бросим n точек $P_1, \ldots, P_n$ на S^2 с одним и тем же распределением P. Пусть это распределение имеет непрерывную плотность $d\mathrm{P} = f(\omega)d\omega$ с $f(\omega) > 0$, $d\omega$ элемент меры Лебега на S^2. Точкам $P_1, \ldots, P_n$ по отображению обратному к сферическому соответствуют точки $P_1^*, \ldots, P_n^*$ на $\partial\mathbf{B}$.

Через $\mathbf{K_n}(P_1^*,\dots,P_n^*)$ обозначим выпуклую оболочку точек $P_1^*,\dots,P_n^*$. Согласно (2.5), $\mu([\mathbf{K_n}(P_1^*,\dots,P_n^*)])$ представима в виде

$$(3.1)\qquad 4\pi\mu([\mathbf{K_n}]) = \sum_{i<j\ \ i,j=1}^{n} I_D(i,j)\int_{L_{ij}}\int_{A_{ij}}\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\Omega_{ij},\Phi)\,h(x,\xi)d\xi\,d\Phi\,dx.$$

Здесь Ω_{ij} - направление $\overrightarrow{P_i^*P_j^*}$, L_{ij} - ребро $P_i^*P_j^*$, A_{ij} внешний двугранный угол ребра $P_i^*P_j^*$, D - множество всех пар (i,j) которым соответствуют ребра. Усредним (3.1) по последовательности $(P_1,\dots,P_n)$. Так как $f(\omega)>0$, в пределе $(n\to\infty)$ в левой части получим $\mu([\mathbf{B}])$. Из соображений симметрии получим

$$(3.2)\qquad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} n\\ 2\end{pmatrix}\int_{(\mathrm{S}^2)^2}\left[\int_{(\mathrm{S}^2)^{n-2}} I_D(1,2)\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{L_{12}}\int_{A_{12}}\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\Omega_{12},\Phi)\,h(x,\xi)d\xi\,d\Phi\,dx\right]dP_3\cdots dP_n\right]dP_1\,dP_2.$$

Принимая точку P_1 за полюс, точку P_2 можно описать как сферическими координатами (ν,φ) относительно P_1, так и координатами (l,φ), где $l=|P_1P_2|$. Имеем

$$dP_2 = f(\omega)\,d\omega = f(\nu,\varphi)\,\sin\nu\,d\nu\,d\varphi = f(l,\varphi)\,l\,dl\,d\varphi.$$

Пусть $e(\Omega_{l\varphi},\Phi)$ - плоскость, проходящая через P_1^*,P_2^* и повернутая вокруг $\Omega_{l\varphi}=\overrightarrow{P_1^*P_2^*}$ на угол Φ. За $e(\Omega_{l\varphi},0)$ примем плоскость проходящую через P_1^*, которая перпендикулярна плоскости проходящей через ω and $\Omega_{l\varphi}$. Через L^* обозначим сегмент $P_1^*P_2^*$ и пусть $l^*=|P_1^*P_2^*|$.

Сперва мы рассмотрим случай, когда P_i имеют равномерное распределение, т.е. $f(\omega)=(S_oC(\omega))^{-1}$, где S_o - площадь $\partial\mathbf{B}$, $C(\omega)$ - гауссова кривизна в точке на $\partial\mathbf{B}$ с нормалью ω. Плоскость $e(\Omega_{l\varphi},\Phi)$ разбивает $\partial\mathbf{B}$ на две части. Пусть $S(\Phi,l)$ площадь малой (по площади) части $\partial\mathbf{B}_1(\Phi,l)$. Применяя теорему Фубини к внутренним интегралам (3.2), получим

$$(3.3)\qquad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} n\\ 2\end{pmatrix}\int_{(\mathrm{S}^2)^2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(1-\frac{S(\Phi,l)}{S_o}\right)^{n-2}+\left(\frac{S(\Phi,l)}{S_o}\right)^{n-2}\right]\right.$$
$$\left.\times\left[\int_{L^*}\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\Omega_{l\varphi},\Phi)\,h(x,\xi)d\xi\,dx\right]d\Phi\right]\frac{l\,dl\,d\varphi\,d\omega}{S_o^2C(\omega)C(l,\varphi)}.$$

В больших скобках (3.3) записана вероятность того, что $P_1^* P_2^*$ будет ребром и $e(\Omega_{l\varphi}, \Phi)$ принадлежит внешнему двухгранному углу этого ребра
Поскольку $\frac{S(\Phi,l)}{S_o} \leq \frac{1}{2}$, то

$$(3.4) \quad \lim_{n\to\infty} | \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)^2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{S(\Phi,l)}{S_o} \right)^{n-2} \left[\int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi) \right.\right.$$
$$\left.\left. \times h(x,\xi) d\xi\, dx \right] d\Phi \right] \frac{l\, dl\, d\varphi\, d\omega}{S_o^2 C(\omega) C(l,\varphi)} | \leq \lim_{n\to\infty} A \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} = 0,$$

где A - константа. Аналогичным образом можно доказать что область изменения Φ и l можно взять сколь угодно малой. Таким образом

$$(3.5) \quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_0} \int_{-\Phi_0}^{\Phi_0} \left(1 - \frac{S(\Phi,l)}{S_o} \right)^{n-2} \times$$
$$\times \left[\int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, dx \right] l\, d\Phi\, dl \frac{d\varphi\, d\omega}{S_o^2 C(\omega) C(l,\varphi)},$$

где l_0 и Φ_0 сколь угодно малые фиксированные числа. Из условий гладкости поверхности $\partial\mathbf{B}$ имеем разложение Тейлора

$$(3.6) \quad S(\Phi,l) = l\, S_l'(0,0) + \Phi S_\Phi'(0,0) + \frac{l^2}{2} S_{ll}''(0,0) + l\Phi S_{l\Phi}''(0,0) + \frac{\Phi^2}{2} S_{\Phi\Phi}''(0,0) + r,$$

где $r(\Phi,l) = o(l^2+\Phi^2)$. Здесь все функции непрерывно зависят как от l и Φ, так и от ω и φ. Ниже мы увидим, что $S_l'(0,0) = S_\Phi'(0,0) = 0$.
Используя теорему о среднем значении, получаем

$$(3.7) \quad \int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, dx = l^* \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{l\varphi}, \Phi)\, h(x_0,\xi) d\xi,$$

где x_0 - точка из L^* и $l^* = |L^*|$.
Подставляя (3.7) в (3.5) и проводя замену переменных $u = l\sqrt{n}$, $v = \Phi\sqrt{n}$ получим

$$(3.8) \quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{l_0\sqrt{n}} \int_{-\Phi_0\sqrt{n}}^{\Phi_0\sqrt{n}} \left(1 - \frac{S(\frac{v}{\sqrt{n}}, \frac{u}{\sqrt{n}})}{S_o} \right)^{n-2} \right.$$
$$\left. \times \left[\int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{\frac{u}{\sqrt{n}}\varphi}, \frac{v}{\sqrt{n}})\, h(x_0,\xi) d\xi \right] \frac{u(u\cdot b(\omega,\varphi)) du\, dv}{n^2 C(\frac{v}{\sqrt{n}}, \varphi)} \right] \frac{d\varphi\, d\omega}{S_o^2 C(\omega)},$$

где $l^* = l \cdot b(\omega,\varphi) + o(l)$.

Можно поменять предел и интегралы местами. Подставляя (3.6) в (3.8) и учитывая

$$(3.9)\qquad \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi, \Omega_{\frac{u}{\sqrt{n}}\varphi}, \frac{v}{\sqrt{n}})\, h(x_0,\xi)d\xi \to \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2 \alpha(\xi,\omega,\varphi_1)\, h_{[P^*(\omega)]}(\xi)d\xi$$

почти всегда когда $n \to \infty$, где $\alpha(\xi,\omega,\varphi_1)$ - угол между направлением φ_1 на плоскости e_ω и пересечением $e_\xi \cap e_\omega$, $[P^*(\omega)]$ - пучок плоскостей содержащих точку $P^*(\omega) \in \partial\mathbf{B}$ с нормалью ω, получим

$$(3.10)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \int_{(\mathrm{S}^2)} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2} S''_{ll}(0,0) - uvS''_{l\Phi}(0,0) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{v^2}{2} S''_{\Phi\Phi}(0,0)\right) u^2 du\, dv\right] \left[\int_{\mathrm{S}^2} \sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi_1)\, h_{[P^*(\omega)]}(\xi) d\xi\right] \frac{b(\omega,\varphi)}{2C(\omega)} d\varphi\, d\omega,$$

где $b(\omega,\varphi) = \lim_{l\to 0} \frac{l^*}{l}$.

Заметим что, случай равномерного распределения, т.е. $f(\omega) = (S_o C(\omega))^{-1}$, был рассмотрен в [7]

4. Стохастическая аппроксимация с распределением P

Теорема 4.1. *Пусть μ – знакопеременная мера в пространстве* $\mathbf{E}$. *Предельная мера $\mu([B])$, получаемая с помощью стохастической аппроксимации гладкого выпуклого тела B, не зависит от плотности распределения $dP = f(s)ds$, т.е. от f.*

Доказательство. Во внутреннем интеграле (3.2), применяя теорему Фубини, получим

$$(4.1)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{2} \int_{(\mathrm{S}^2)^2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(1-\mathrm{P}(\Phi,l))^{n-2} + (\mathrm{P}(\Phi,l))^{n-2}\right]\right.$$
$$\left. \times \left[\int_{L^*} \int_{\mathrm{S}^2} \sin^2\alpha(\xi,\Omega_{l\varphi},\Phi)\, h(x,\xi) d\xi\, dx\right] d\Phi\right] dP_1\, dP_2.$$

Здесь $\mathrm{P}(\Phi,l)$ есть вероятность того, что P^* попадет в $\partial\mathbf{B}_1(\Phi,l)$ (здесь $\partial\mathbf{B}_1$ это часть куда точка попадает с вероятностью меньшей чем 1/2). Как и в случае равномерного распределения, можно доказать, что

$$(4.2)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{2}\int_{(\mathrm{S}^2)}\int_0^{2\pi}\int_0^{l_0}\int_{-\Phi_0}^{\Phi_0}(1-\mathrm{P}(\Phi,l))^{n-2} \times\left[\int_{L^*}\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\Omega_{l\varphi},\Phi)\,h(x,\xi)d\xi\,dx\right]dP_1\,dP_2,$$

где l_0 и Φ_0 сколь угодно малые положительные числа.

Используя теорему о среднем значении получаем

$$(4.3)\qquad \mathrm{P}(\Phi,l) = S(\Phi,l)f_1(\omega_{\Phi,l}),$$

где $f_1(\omega) = f(\omega)C(\omega)$ ($C(\omega)$ - гауссова кривизна) а $\omega_{\Phi,l}$ - точка на сферическом образе $\partial\mathbf{B}_1(\Phi,l)$. Так как $f(\omega) = \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}$, имеем $dP_1 = f(\omega)d\omega = \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}d\omega$ и $dP_2 = f(\omega)d\omega = \frac{f_1(\omega)}{C(\omega)}d\omega = \frac{f_1(l,\varphi)}{C(l,\varphi)}l\,dl\,d\varphi$.

Подставляя (4.3) в (4.2), учитывая (3.7) и проводя замену переменных $u = l\sqrt{n}$, $v = \Phi\sqrt{n}$, получаем

$$(4.4)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \lim_{n\to\infty}\binom{n}{2}\int_{(\mathrm{S}^2)}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{l_0\sqrt{n}}\int_{-\Phi_0\sqrt{n}}^{\Phi_0\sqrt{n}}\right. \left(1-f_1(\omega_{\frac{v}{\sqrt{n}}\frac{u}{\sqrt{n}}})S(\frac{v}{\sqrt{n}},\frac{u}{\sqrt{n}})\right)^{n-2}\left[\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\Omega_{\frac{u}{\sqrt{n}}\varphi},\frac{v}{\sqrt{n}})\,h(x_0,\xi)d\xi\right] \left.\times\frac{u(u\cdot b(\omega,\varphi))f_1(\frac{u}{\sqrt{n}},\varphi)\,du\,dv}{n^2C(\frac{u}{\sqrt{n}},\varphi)}\right]\frac{f_1(\omega)d\varphi\,d\omega}{C(\omega)},$$

где $l^* = l\cdot b(\omega,\varphi) + o(l)$.

Поменяв предел и интегралы местами в (4.4) и учитывая, что при $n\to\infty$

$$f_1(\omega_{\frac{v}{\sqrt{n}}\frac{u}{\sqrt{n}}}) \to f_1(\omega)$$

получаем

$$(4.5)\quad 4\pi\mu([\mathbf{B}]) = \int_{(\mathrm{S}^2)}\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{f_1(\omega)u^2}{2}S''_{ll}(0,0) - f_1(\omega)uvS''_{l\Phi}(0,0) - \frac{f_1(\omega)v^2}{2}S''_{\Phi\Phi}(0,0)\right)\right. \left.\times\, u^2du\,dv\right]\left[\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi_1)\,h_{[P^*(\omega)]}(\xi)d\xi\right]\frac{f_1^2(\omega)b(\omega,\varphi)}{2C(\omega)}d\varphi\,d\omega,$$

где $b(\omega,\varphi) = \lim_{l\to 0}\frac{l^*}{l}$. Проводя замену переменных $\sqrt{f_1(\omega)}u = u_1$ и $\sqrt{f_1(\omega)}v = v_1$ в (4.5) получим (3.10). $\square$

5. Флаговые представления для выпуклых тел

Из (3.10) видно, что предельное представление для $\mu([\mathbf{B}])$ зависит от значений $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ которые являются функциями от ω и φ. Следовательно, нужно выразить $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ в терминах нормальных кривизн $\partial\mathbf{B}$ в точке $P^*(\omega)$ (точка с нормалью ω на $\partial\mathbf{B}$).

В [3] доказано, что: $S'_l(0,0)$, $S'_\Phi(0,0)$, $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ *зависят только от значений производных не выше второго порядка поверхности* $\partial\mathbf{B}$ *в точке* P^* *с внешней нормалью* ω.

Так как $S''_{ll}(0,0)$, $S''_{l\Phi}(0,0)$, $S''_{\Phi\Phi}(0,0)$ зависят только от значений производных не выше второго порядка то достаточно их вычислить для соприкасающегося параболоида U поверхности $\partial\mathbf{B}$ в точке P^* с внешней нормалью ω.

В [3] найдены следующие выражения для этих производных в терминах нормальных кривизн $\partial\mathbf{B}$ в точке $P^*(\omega)$:

$$S'_l(0,0)=0,\ S'_\Phi(0,0)=0,\ S''_{ll}(0,0)=\frac{\pi\sqrt{k_1k_2}\,r^2(\varphi)(k_2^3\cos^2\varphi+k_1^3\sin^2\varphi)}{2A^4},$$
$$S''_{l\Phi}(0,0)=\frac{\pi\sqrt{k_1k_2}\sin 2\varphi(k_2-k_1)}{2A^3},\quad S''_{\Phi\Phi}(0,0)=\frac{2\pi\sqrt{k_1k_2}\,r(\varphi)}{A^2}, \tag{5.1}$$

где k_i, $i=1,2$ – главные нормальные кривизны,
$r(\varphi)=k_1^{-1}\cos^2\varphi+k_2^{-1}\sin^2\varphi$ радиус проекционной кривизны $\partial\mathbf{B}$ в направлении φ в точке $P^*(\omega)$ на $\partial\mathbf{B}$. и $A=\sqrt{k_2^2\cos^2\varphi+k_1^2\sin^2\varphi}$. Также в [3] получено

$$b(\omega,\varphi)=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{k_1^2}+\frac{\sin^2\varphi}{k_2^2}}\quad\text{and}\quad\tan\varphi_1=\tan\varphi\,\frac{k_1}{k_2}. \tag{5.2}$$

Подставляя (5.1) и (5.2) в (3.10) и вычисляя интеграл получаем

$$4\pi^2\mu([\mathbf{B}])=\int_{(\mathrm{S}^2)}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\mathrm{S}^2}\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)\,h_{[P^*(\omega)]}(\xi)d\xi\right]\frac{\sqrt{k_1k_2}}{k^2(\omega,\varphi)}d\varphi\,d\omega, \tag{5.3}$$

где $k(\omega,\varphi)$ - нормальная кривизна в направлении φ в точке $P^*(\omega)$ на $\partial\mathbf{B}$. Учитывая, что

$$\sin^2\alpha(\xi,\omega,\varphi)=\cos^2(\varphi-\psi),$$

где ψ – направление проекции ξ на плоскость с нормалью ω, we come to (1.6). Теорема 1.1 доказана.

Поменяв порядок интегрирования в (5.3), и интегрируя по $d\varphi$ получаем (см также [3])

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha(\xi,\omega,\varphi) \, \frac{\sqrt{k_1(\omega)k_2(\omega)}}{k^2(\omega,\varphi)} \, d\varphi = \pi \left(\frac{\cos^2 \psi}{k_1(\omega)} + \frac{\sin^2 \psi}{k_2(\omega)} \right), \tag{5.4}$$

где φ измеряем от первого главного направления в точке $P^*(\omega)$ на $\partial\mathbf{B}$, ψ - это направление проекции ξ на плоскость с нормалью ω (плоскость флага). Заметим, что в больших скобках в (5.4) написан $R(\omega,\xi) = R(\omega,\psi)$ радиус кривизны проекции $\partial\mathbf{B}$ ([8])

$$R(\omega,\xi) = R(\omega,\psi) = \frac{\cos^2 \psi}{k_1(\omega)} + \frac{\sin^2 \psi}{k_2(\omega)}. \tag{5.5}$$

Из (5.3),(5.4) и (5.5) получим следствие 1.1.

Теперь пусть $k_1(s), k_2(s)$ – главные нормальные кривизны $\partial\mathbf{B}$ в точке $s \in \partial\mathbf{B}$, а $f_i = (s, g_i, t)$, $i = 1, 2$ - флаг, где t касательная плоскость к $\partial\mathbf{B}$ в точке s, g_i есть i-тое главное направление в $s \in \partial\mathbf{B}$.

Подставляя (5.4) в (5.3) и учитывая, что $ds = (k_1(\omega)k_2(\omega))^{-1}\, d\omega$ мы получаем (1.5). Теорема 1.2 доказана.

Следствие 5.1. *В случае $h(e) \equiv 1$ (случай инвариантной меры μ_{inv}) из* (1.5) *получаем формулу Минковского (см.* [11]*)*

$$\mu_{inv}([\mathbf{B}]) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}^2} \left(\frac{1}{k_1(\omega)} + \frac{1}{k_2(\omega)} \right) d\omega.$$

Abstract. The present paper gives two representations (so-called flag representations) for the measure of planes intersecting a convex body. These representations are obtained by means of a stochastic approximation of a convex body depending on a distribution P that are defined on the surface of the body. Also it is proved that the flag representations do not depend on the density of P.

Список литературы

[1] R. V. Ambartzumian, "Combinatorial integral geometry, metrics and zonoids", Acta Appl. Math., **9**, 3 – 27 (1987).

[2] R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press (1990).

[3] Р. Г. Арамян, "О стохастической аппроксимации выпуклых тел", Изв. АН Арм.ССР, Математика, **22**, no. 5, 385 – 438 (1987).

[4] Р. Г. Арамян, “Восстановление розы направлений по флаговым плотностям в $\mathbb{R}^3$”, Изв. АН Армении, Математика, **27**, no. 5, 22 – 35 (1992).
[5] Р. Г. Арамян, “Порождение меры в пространстве плоскостей и сферический функционал Эйлера”, Изв. АН Армении, Математика, **29**, no. 4, 64 – 90 (1994).
[6] Р. Г. Арамян, “Решение одного интегрального уравнения на сфере методами интегральной геометрии”, Доклады Российской Академии Наук, **426**, no. 2, 1 – 5 (2009).
[7] R. Aramyan, “Measure of planes intersecting a convex body”, Sutra: Inter. J. of Math. Science, **3**, no. 1, 1 – 7 (2010).
[8] В. Бляшке, Круг и Шар, Москва, Наука (1967).
[9] Г. Ю. Панина, “Выпуклые тела и трансляционно инвариантные меры”, Записки научных сем. ЛОМИ, **157**, 143 – 152 (1986).
[10] Р. В. Амбарцумян, В. К. Оганян, “Конечно-аддитивные функционалы в пространстве плоскостей, Г”, Изв. НАН Армении. Математика, **29**, no. 4, 3 – 51 (1994).
[11] Л. А. Сантало, Интегральная Геометрия и Геометрические Вероятности, Москва, Наука (1983).
[12] R. H. Aramyan, “Reconstruction of measures in the space of planes”, Lobachevskii Journal of Mathematics, **32** (4), 241 – 246 (2011).

Поступила 30 марта 2011