

НЕЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПО ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

А. АЛЕКСАНЫАН

Ереванский Государственный Университет

E-mail: hayk.aleksanyan@gmail.com

Аннотация. В работе изучается сходимость гриди (жадного) алгоритма по перенормированной тригонометрической системе. Получено необходимое и достаточное условие на нормировку системы, обеспечивающее сходимость гриди алгоритма почти всюду и по норме пространства $L^p(\mathbb{T})$, при $1 < p < \infty$, где $\mathbb{T}$ – одномерный тор. Также установлено несуществование нормировки, которая обеспечивает сходимость почти всюду для функций из $L^1(\mathbb{T})$ или равномерную сходимость для непрерывных функций.

MSC2010 number: 42A10, 41A65.

Ключевые слова: Нелинейная аппроксимация; гриди (жадный) алгоритм; тригонометрическая система.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ – базис в банаховом пространстве X и $\inf_n \|\varphi_n\|_X > 0$. Тогда любой элемент $f \in X$ единственным образом разлагается в ряд по системе Φ , который сходится к f по норме пространства X :

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(f) \varphi_n,$$

где $c_n(f)$ коэффициенты разложения, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0$.

Обозначим через Λ_N множество из N индексов с условием

$$\min_{k \in \Lambda_N} |c_k(f)| \geq \max_{k \notin \Lambda_N} |c_k(f)|.$$

Тогда сумма

$$G_N(f) := G_N(f, \Phi) := \sum_{k \in \Lambda_N} c_k(f) \varphi_k$$

называется N -тым *гриди (жадным)* аппроксимантом элемента f по системе Φ .

Этот метод приближения называется *гриди* алгоритмом.

Базис Φ называется *квази-гриди* базисом, если существует константа C такая, что для любого $f \in X$

$$\|G_N(f, \Phi)\|_X \leq C\|f\|_X, \quad N = 1, 2, \dots$$

В работе [3] Войтащик доказал, что базис Φ является квази-гриди базисом тогда и только тогда, когда для любого $f \in X$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \Phi)\|_X = 0.$$

Сходимость гриди алгоритма для конкретных систем была рассмотрена многими авторами. Т. Корнер, ответив на вопрос поставленный Л. Карлесоном и Р. Койфманом, построил в [4] функцию из $L^2(\mathbb{T})$, а затем в [5] непрерывную функцию, гриди алгоритм которых по тригонометрической системе расходится почти всюду.

В работе [7] В. Темлякова доказано существование функции из L^p , $1 \leq p < 2$, гриди алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится по мере, и непрерывной функции, гриди алгоритм которой по тригонометрической системе не сходится в L^p , $p > 2$. С другой стороны в работе [8] С. В. Конягина и В. Н. Темлякова были получены достаточные условия для сходимости гриди алгоритма. Аналогичные результаты о сходимости и расходимости гриди алгоритма по системе Уолша были получены Г. Амирханяном (см. [15]).

М. Григоряном и А. Саргсяном в работе [17] был построен пример непрерывной функции, гриди алгоритм которой по системе Фабера-Шаудера расходится по мере.

В работе [11] С. Костюковский и А. Олевский построили ортонормированный базис для $L^2(0, 1)$, состоящий из равномерно ограниченных функций, такой что для любой функции из $L^2(0, 1)$ гриди алгоритм по этой системе сходится почти всюду, а в работе [12] М. Нильсена была построена равномерно ограниченная ортонормированная система, которая является квази-гриди базисом в $L^p(0, 1)$ при всех $1 < p < \infty$.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=0}^\infty$ - убывающая последовательность положительных чисел. Для $f \in X$ рассмотрим убывающую по модулю перестановку ненулевых коэффициентов с весом γ_n :

$$(1.1) \quad |\gamma_{\sigma(0)}c_{\sigma(0)}(f)| \geq |\gamma_{\sigma(1)}c_{\sigma(1)}(f)| \geq \dots |\gamma_{\sigma(n)}c_{\sigma(n)}(f)| \geq \dots,$$

и определим гриди аппроксимант с весом Γ :

$$(1.2) \quad G_N(f) := G_N(f, \Phi) := G_N(f, \Phi, \Gamma) := \sum_{n=0}^N c_{\sigma(n)}(f) \varphi_{\sigma(n)}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Множество перестановок σ с условием (1.1) обозначим через $D(f, \Phi, \Gamma)$. Легко видеть, что (1.2) совпадает с гриди аппроксимантом по перенормированной системе Φ :

$$(1.3) \quad G_N(f, \Phi, \Gamma) = G_N\left(f, \left\{\frac{1}{\gamma_n} \varphi_n\right\}\right), \quad N = 1, 2, \dots$$

Гриди алгоритм с весом для общих систем был рассмотрен в работах С. Козягина и В. Темлякова [14] и [19]. В [18] были описаны все веса, обеспечивающие сходимость гриди алгоритма по системе Хаара в пространстве L^1 . В работе [13] была рассмотрена сходимость почти всюду подобного алгоритма для вейвлет систем и системы Хаара. Описание весовых гриди алгоритмов, гарантирующих равномерную сходимость для непрерывных функций и сходимость почти всюду для интегрируемых функций для системы Хаара получено в [6] и [20], а для классической системы Франклина - в [21].

В работе [14] доказано, что для любого нормированного базиса Φ в банаховом пространстве X , при $\Gamma = \{2^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$ для любого $f \in X$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \Phi, \Gamma)\|_X = 0.$$

Для последовательности $\Gamma = \{\gamma_n\}$ обозначим

$$(1.4) \quad \omega(\Gamma) = \sup_{m > n \geq 0} \left\{ m - n : \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \leq 2 \right\}.$$

Пример 1. Очевидно, что $\omega(\{\alpha^n\}_{n=1}^{\infty}) < \infty$ для любого положительного $\alpha < 1$, тогда как $\omega(\{n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}) = \infty$.

Замечание 1.1. Легко видеть, что условие $\omega(\Gamma) < \infty$ эквивалентно условию

$$\sup_{m > n} \left\{ m - n : \frac{\gamma_n}{\gamma_m} \leq \alpha \right\} < \infty, \quad \text{для любого } \alpha > 1.$$

Замечание 1.2. С учетом замечания 1.1 легко видеть, что при условии $\omega(\Gamma) = \infty$ для любых чисел $\alpha > 1$, L и S существуют натуральные числа $B > A$ с условиями

$$B > A > S, \quad B - A > L \quad \text{и} \quad \frac{\gamma_A}{\gamma_B} \leq \alpha.$$

Обозначим через $\mathcal{T} = \{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}} := \{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрическую систему в нумерации $\psi_0 = 1$, $\psi_{2n-1} = e^{inx}$, $\psi_{2n} = e^{-inx}$, для $n = 1, 2, \dots$, и пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ – одномерный тор. Как известно в указанной нумерации система $\mathcal{T}$ является базисом в $L^p(\mathbb{T})$, при $1 < p < \infty$.

В случае тригонометрической системы перестановка имеет вид $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, т.е. для $f \in L^1(\mathbb{T})$ рассматривается последовательность

$$|c_0(f)\gamma_0|, |c_1(f)\gamma_1|, |c_{-1}(f)\gamma_2|, |c_2(f)\gamma_3|, |c_{-2}(f)\gamma_4|, \dots,$$

где $c_n(f)$ – коэффициенты Фурье функции f , и σ переставляет ее по убыванию.

Целью данной работы является исследование сходимости по норме или почти всюду гриди алгоритма с весом по тригонометрической системе. Но сначала мы докажем следующую теорему:

Теорема 1.1. Пусть Φ – нормированный базис в банаховом пространстве X и пусть последовательность Γ удовлетворяет условию $\omega(\Gamma) < \infty$. Тогда для любых $f \in X$ и $\sigma \in D(f, \Phi, \Gamma)$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \Phi, \Gamma)\|_X = 0.$$

Поскольку $\omega(\{2^{-n}\}_{n=1}^{\infty}) < \infty$, то вышеуказанная теорема С. Конягина и В. Темлякова вытекает из теоремы 1.1, а из доказанной ниже теоремы 1.3 следует, что в классе всех базисов условие $\omega(\Gamma) < \infty$ окончательно.

Для тригонометрической системы мы доказываем следующие теоремы.

Теорема 1.2. Пусть $\omega(\Gamma) < \infty$ и $1 < p < \infty$. Тогда для любых $f \in L^p(\mathbb{T})$, и $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$:

- 1) $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\|_p = 0$,
- 2) $\lim_{N \rightarrow \infty} G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)(x) = f(x)$ н.в. для $x \in \mathbb{T}$.

Теорема 1.3. Пусть $\omega(\Gamma) = \infty$. Тогда:

- 1) существует функция $f \in \bigcap_{1 \leq p < 2} L^p(\mathbb{T})$ для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ расходится по мере при любой $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$,
- 2) существует функция $f \in C(\mathbb{T})$ для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ расходится по норме $\|\cdot\|_p$, для любого $2 < p < \infty$ при любой $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$.

Для непрерывных функций верно следующее утверждение.

Теорема 1.4. Пусть последовательность Γ фиксирована. Тогда

- 1) при $\omega(\Gamma) = \infty$ существует функция $f \in C(\mathbb{T})$, для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ неограниченно расходится п.в. при любой $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$,
- 2) при $\omega(\Gamma) < \infty$ существует функция $f \in C(\mathbb{T})$, для которой последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ расходится в некоторой точке при любой $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$.

В следующей теореме рассматривается сходимость почти всюду гриди алгоритма функций из $L^1(\mathbb{T})$.

Теорема 1.5. Для любой последовательности Γ существует функция $f \in L^1(\mathbb{T})$, такая, что последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ неограниченно расходится почти всюду при любой $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1.2 – 1.4

Ниже в доказательствах через C мы обозначаем абсолютные константы, которые могут быть разные в разных формулах. Для $f \in L^1(\mathbb{T})$ через spf обозначим спектр ряда Фурье функции f по тригонометрической системе

$$\text{spf} = \{n \in \mathbb{Z} : c_n(f) \neq 0\}.$$

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $f \in X$ и число $\varepsilon > 0$ фиксировано. Обозначим

$$T_\varepsilon(f) := \sum_{n: |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon} c_n(f) \varphi_n$$

и

$$N(\varepsilon) = \min\{N \in \mathbb{Z}_+ : |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon, \forall n \geq N\}.$$

Тогда

$$(2.1) \quad \{n \in \mathbb{Z}_+ : |c_n(f)\gamma_n| > \varepsilon\} \subset \{0, 1, \dots, N(\varepsilon)\},$$

и

$$(2.2) \quad \frac{\varepsilon}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq |c_{N(\varepsilon)}(f)| \rightarrow 0, \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Оценим следующую разность

$$(2.3) \quad \|S_{N(\varepsilon)}(f) - T_\varepsilon(f)\|_X = \left\| \sum_{n \leq N(\varepsilon), |c_n(f)\gamma_n| \leq \varepsilon} c_n(f) \varphi_n \right\|_X \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{\gamma_n}.$$

Обозначим $H := \omega(\Gamma) + 1$, тогда из определения (1.4) и условия $\omega(\Gamma) < \infty$, имеем

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_m} > 2, \text{ где } m - n \geq H.$$

Следовательно,

$$(2.4) \quad \sum_{n=0}^{N(\varepsilon)} \frac{1}{\gamma_n} = \sum_{r=0}^{H-1} \sum_{n \equiv r \pmod{H}} \frac{1}{\gamma_n} \leq \sum_{r=0}^{H-1} \left(\frac{1}{2^{i_r}} + \frac{1}{2^{i_{r-1}}} + \dots + 1 \right) \frac{1}{\gamma_{N(\varepsilon)}} \leq C \frac{1}{\gamma_{N(\varepsilon)}},$$

где $i_r, r = 0, 1, \dots, H-1$ – некоторые индексы. Из (2.3), (2.4) и (2.2) следует, что

$$(2.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|S_{N(\varepsilon)}(f) - T_\varepsilon(f)\|_X = 0.$$

Если множество $D(f, \Phi, \Gamma)$ состоит из одного элемента, то для любого $N \in \mathbb{N}$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(N) > 0$, для которого $G_N(f) \equiv T_\varepsilon(f)$ и следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - G_N(f)\|_X = 0.$$

В случае $\#D(f, \Phi, \Gamma) > 1$ обозначим

$$(2.6) \quad \Omega_0 = \emptyset, \quad \Omega_n = \{k \in \mathbb{Z}_+ \setminus (\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{n-1}) : |\gamma_k c_k(f)| = |\gamma_n c_n(f)|\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

и если $\Omega_n \neq \emptyset$, то положим $\omega_n = \max \Omega_n$. Теперь, если $\#\Omega_n > 1$, то теми же рассуждениями как и при доказательстве оценки (2.4), получим

$$(2.7) \quad \sum_{k \in \Omega_n} \|c_k(f) \varphi_k\|_X = |\gamma_{\omega_n} c_{\omega_n}(f)| \sum_{k \in \Omega_n} \frac{1}{\gamma_k} \leq |\gamma_{\omega_n} c_{\omega_n}(f)| \sum_{k=0}^{\omega_n} \frac{1}{\gamma_k} \leq C |c_{\omega_n}(f)|,$$

что вместе с (2.5) доказывает теорему. $\square$.

Доказательство теоремы 1.2. Как видно из доказательства теоремы 1.1 (см. (2.3) и (2.7)), при условии $\omega(\Gamma) < \infty$ аппроксиманты $G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)$, $N = 1, 2, \dots$ функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ равномерно равносходятся с некоторой подпоследовательностью частных сумм ряда Фурье функции f . Следовательно, первый пункт теоремы вытекает из базисности тригонометрической системы в пространствах $L^p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, а второй - из знаменитой теоремы Карлесона-Ханта (см. [1]). Теорема 1.2 доказана. $\square$

Пусть

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

ядро Дирихле для тригонометрической системы, а

$$V_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{2N} D_n(x), \quad N = 1, 2, \dots$$

ядро Валле-Пуссена. Справедлива следующая лемма

Лемма 2.1. *Для любого $N \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$ имеет место*

$$\|V_N\|_p \leq CN^{1-1/p}.$$

Доказательство. Как известно $\|V_N\|_1 \leq C$ (см. [22], стр. 125), а также легко видеть, что $\|V_N\|_2 \leq CN^{1/2}$ и $\|V_N\|_\infty \leq CN$, для любого $N \geq 1$.

Для $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ из неравенства Гелдера получим

$$(2.8) \quad \|f\|_p \leq \|f\|_q^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda},$$

где

$$1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad \frac{\lambda}{q} + \frac{1-\lambda}{r} = \frac{1}{p} \text{ и } \lambda \in [0, 1].$$

Теперь используя отмеченные оценки для норм ядра Валле-Пуссена и неравенство (2.8) для $(p, q, r) = (p, 1, 2)$ в случае $1 < p < 2$ и $(p, q, r) = (p, 2, \infty)$ в случае $2 < p < \infty$ получим требуемую оценку. Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим мажоранты аппроксимантов (1.2) для системы $\mathcal{T}$:

$$(2.9) \quad G_N^*(f, \sigma, x) := G_N^*(f, x) := \max_{0 \leq n \leq N} \left| \sum_{k=-n}^n c_{\sigma(k)}(f) e^{i\sigma(k)x} \right|, \quad x \in \mathbb{T}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

и если P тригонометрический полином, обозначим

$$(2.10) \quad G^*(P, \sigma, x) := G^*(P, x) := \max_{n \geq 0} \left| \sum_{k=-n}^n c_{\sigma(k)}(P) e^{i\sigma(k)x} \right|, \quad x \in \mathbb{T}.$$

Нам понадобится следующая лемма из замечательной работы Кернера (см. [5], лемма 7), которую мы перефразируем в несколько ином виде.

Лемма 2.2. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любого $K > 1$ существует тригонометрический полином P и измеримое множество $E \subset \mathbb{T}$ такие, что*

- (i) $\|P\|_\infty \leq \varepsilon$,
- (ii) $G^*(P, \sigma, x) > K$, $x \notin E$, для любой перестановки $\sigma \in D(P, \mathcal{T}, \{1\}_{n \in \mathbb{Z}})$,
- (iii) $\mu(E) \leq \varepsilon$,

- (iv) модули всех ненулевых коэффициентов P различны и если $|c_n(P)| > |c_m(P)| > 0$, то $|c_n(P)| > 2|c_m(P)|$.

Доказательство. Пункты (i) – (iii) соответствуют пунктам (i) – (iii) леммы 7 из [5]. Пункт (iv) в свою очередь вытекает из доказательства леммы 14 указанной работы [5]. $\square$

Доказательство теоремы 1.3. Для доказательства теоремы мы используем метод из [7].

1. Рассмотрим полиномы Рудина-Шапиро (см. [22], стр. 146, Теорема 11)

$$R_N(x) = \sum_{n=0}^N \varepsilon_n e^{inx}, \quad \varepsilon_k = \pm 1, \quad x \in \mathbb{T},$$

которые удовлетворяют условию

$$(2.11) \quad \|R_N\|_\infty \leq CN^{1/2}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Поскольку тригонометрическая система ортонормирована, из (2.11) следует, что

$$(2.12) \quad \|R_N\|_1 \geq CN^{1/2}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Для $s = \pm 1$ обозначим

$$\Lambda_s := \Lambda_s(N) := \{k : c_k(R_N) = s\},$$

и пусть

$$D_\Lambda := \sum_{k \in \Lambda} e^{ikx}.$$

Тогда

$$R_N = D_{\Lambda_1} - D_{\Lambda_{-1}}.$$

Из (2.11) и (2.12) следует, что

$$\mu\{x \in \mathbb{T} : |R_N(x)| > cN^{1/2}\} > c,$$

где $c \in (0, 1)$ – абсолютная константа. Следовательно, для одного из значений $s = \pm 1$ справедливо неравенство

$$(2.13) \quad \mu\{x \in \mathbb{T} : |D_{\Lambda_s(N)}(x)| > \frac{c}{2}N^{1/2}\} > c.$$

Рассмотрим следующий тригонометрический полином:

$$(2.14) \quad g_k(x) := 2^{-k/2} \left(V_{2^k}(x) + s2^{-2k} R_{2^k}(x) - 2^{-2k} \sum_{n=-2^k}^{-1} e^{inx} \right), \quad x \in \mathbb{T},$$

где $s = \pm 1$ выбрано так, чтобы выполнялось (2.13). Заметим, что

$$(2.15) \quad 2^{k/2} g_k = (1 + 2^{-2k}) \sum_{n \in \Lambda_s(2^k)} e^{inx} + \sum_{n \notin \Lambda_s(2^k), |n| \leq 2^{k+1}} \alpha_n e^{inx},$$

где $0 < \alpha_n \leq 1 - 2^{-2k}$, для всех n . Фиксируем k и пусть p_0 произвольное натуральное число. С учетом замечания 1.2 выберем натуральные числа $B > A > p_0 + 2^{k+1}$ с условиями

$$(2.16) \quad B - A > 2^{k+2} \text{ и } \frac{\gamma_A}{\gamma_B} < \frac{1 + 2^{-2k}}{1 - 2^{-2k}}$$

и обозначим $f_k(x) := e^{i(A+2^{k+1})x} g_k(x)$. В итоге имеем, что первый ненулевой коэффициент полинома f_k может иметь сколь угодно большой номер, а так же ясно, что $\text{spf}_k \subset [A, B]$. Далее, если обозначим $\gamma_{-1} := \gamma_0$, то с учетом (2.15), (2.16) и монотонности последовательности Γ получим

$$(2.17) \quad \min_{n \in \Lambda_s(2^k) + A + 2^{k+1}} |c_n(f_k) \gamma_{2n-1}| > \max_{n \notin \Lambda_s(2^k) + A + 2^{k+1}} |c_n(f_k) \gamma_{2n-1}|.$$

Заметим также, что из леммы 2.1 вытекает неравенство

$$(2.18) \quad \|f_k\|_p \leq C 2^{k(1/2-1/p)}.$$

Теперь выберем возрастающую последовательность натуральных чисел k_n так, чтобы каждый коэффициент в полиноме $g_{k_{n+1}}$ был меньше, чем наименьший коэффициент в g_{k_n} . Потом, исходя из g_{k_n} построим f_{k_n} так, чтобы наименьший из индексов ненулевых коэффициентов $f_{k_{n+1}}$ был больше, чем наибольший из индексов ненулевых коэффициентов f_{k_n} . Положим

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k_n}.$$

Из (2.18) следует, что $f \in L^p(\mathbb{T})$ для любого $p < 2$. Возьмем произвольную перестановку $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$. Из построения f и (2.17) следует, что если выбрать натуральные числа $m_1^{(n)}$ и $m_2^{(n)}$ подходящим образом, получим, что

$$G_{m_1^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma) - G_{m_2^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma) = 2^{-k_n/2} (1 + 2^{-2k_n}) e^{i(A_n + 2^{k_n})x} D_{\Lambda_s(2^{k_n})}.$$

Отсюда, с учетом (2.13) вытекает, что

$$\mu\{x \in \mathbb{T} : |G_{m_1^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma)(x) - G_{m_2^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma)(x)| > \frac{1}{2}c\} > c,$$

а это означает расходимость по мере последовательности $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}_{N=1}^{\infty}$.

2. Пользуясь обозначениями первого пункта, выберем $s = \pm 1$ так, чтобы выполнялось $|\Lambda_s| \geq |\Lambda_{-s}|$ и положим

$$(2.19) \quad g_k := \frac{2^{-k/2}}{k^2} (R_{2^k} + s 2^{-k} D_{2^k}).$$

Как и в пункте 1, с учетом замечания 1.2, для данного числа p_0 выберем натуральные числа $B > A > p_0 + 2^k$ с условием

$$(2.20) \quad B - A > 2^{k+1} \text{ и } \frac{\gamma_A}{\gamma_B} < \frac{1 + 2^{-k}}{1 - 2^{-k}}$$

и обозначим $f_k(x) := e^{i(A+2^k)x} g_k(x)$. Тогда $\text{spf}_k \subset [A, B]$, и индекс наименьшего ненулевого коэффициента полинома f_k будет больше наперед заданного числа. Из (2.19), (2.20) и монотонности последовательности Γ получаем, что

$$(2.21) \quad h_k := G_{|\Lambda_s(2^k)|}(f_k, \mathcal{T}, \Gamma) = \frac{2^{-k/2}}{k^2} (1 + 2^{-k}) D_{\Lambda_s(2^k)}.$$

Заметим, что $\|h_k\|_\infty \geq |h_k(0)| \geq C k^{-2} 2^{k/2}$, следовательно, из неравенства С. Никольского для тригонометрических полиномов (см. [16], стр. 256) получим, что

$$(2.22) \quad \|h_k\|_p \geq C \frac{2^{-k/p}}{k^2} \|h_k\|_\infty \geq C \frac{1}{k^2} 2^{k(1/2-1/p)}.$$

Отметим еще, что в силу (2.11),

$$(2.23) \quad \|f_k\|_\infty \leq C \frac{1}{k^2}.$$

Теперь построение требуемой функции из полиномов f_k ведется аналогично пункту 1. Выберем возрастающую последовательность натуральных чисел k_n так, чтобы каждый коэффициент в полиноме $g_{k_{n+1}}$ был меньше, чем наименьший коэффициент в g_{k_n} . Потом, исходя из g_{k_n} построим f_{k_n} так, чтобы наименьший из индексов ненулевых коэффициентов $f_{k_{n+1}}$ был больше, чем наибольший из индексов ненулевых коэффициентов f_{k_n} . Положим

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_{k_n}.$$

Из (2.23) имеем, что $f \in C(\mathbb{T})$. Для произвольной перестановки $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$ из построения f и (2.21) следует, что существуют последовательности $m_1^{(n)}$ и $m_2^{(n)}$, для которых

$$G_{m_1^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma) - G_{m_2^{(n)}}(f, \mathcal{T}, \Gamma) = h_{k_n}.$$

Из последнего, в силу (2.22) следует утверждение теоремы. Теорема 1.3 полностью доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.4. Пункт 1. Имеем $\omega(\Gamma) = \infty$. Из леммы 2.2 следует, что существуют тригонометрические полиномы P_n и измеримые множества $E_n \subset \mathbb{T}$, $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям:

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_{\infty} < \infty$,
- b) $\mu(E_n) \rightarrow 0$,
- c) $G^*(P_n, \sigma, x) > n$, $x \notin E_n$, для любой перестановки $\sigma \in D(P_n, \mathcal{T}, \{1\}_{m \in \mathbb{Z}})$,
- d) если $m, k \in \text{sp} P_n$ и $|c_m(P_n)| > |c_k(P_n)|$, то $|c_m(P_n)| > 2|c_k(P_n)|$,
- e) $\min_{m \in \text{sp} P_n} |c_m(P_n)| > \max_{m \in \text{sp} P_{n+1}} |c_m(P_{n+1})|$.

С учетом замечания 1.2 выберем натуральные числа B_n и A_n , $n = 1, 2, \dots$ такие, что

$$(2.24) \quad A_n < B_n < A_{n+1}, \quad B_n - A_n > 4|\text{sp} P_n| \text{ и } \frac{\gamma_{A_n}}{\gamma_{B_n}} \leq 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Положим теперь $Q_n(x) = \exp[i(A_n + |\text{sp} P_n|)x]P_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$ и заметим, что спектры полиномов Q_n не пересекаются. Докажем, что функция $f := \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ удовлетворяет условиям первого пункта теоремы. Непрерывность функции f следует из a). Далее, для произвольной перестановки $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$ из условия d), (2.24) и монотонности Γ следует, что

$$(2.25) \quad \sigma|_{\text{sp} Q_n} \in D(Q_n, \mathcal{T}, \{1\}_{m \in \mathbb{Z}}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из e), (2.24) и монотонности Γ следует, что

$$(2.26) \quad \min_{k \in \text{sp} Q_n} |c_k(Q_n)\gamma_{2k-1}| > \max_{k \in \text{sp} Q_{n+1}} |c_k(Q_{n+1})\gamma_{2k-1}|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Из (2.26), (2.25) и условия c) получим, что существует последовательность индексов a_n с условием:

$$G_{a_n}^*(f, \sigma, x) \geq \frac{1}{2}G^*(Q_n, x) \geq \frac{1}{2}n, \quad x \notin E_n,$$

откуда, с учетом b), вытекает, что последовательность $\{G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)\}$ расходится почти всюду, что и доказывает первый пункт теоремы.

Пункт 2. Д. Е. Меньшов показал, что существует непрерывная функция, у которой в ряде Фурье любая подпоследовательность частных сумм расходится хотя бы в одной точке (см. [23], стр. 327). Как было отмечено в доказательстве теоремы 1.2, при условии $\omega(\Gamma) < \infty$ аппроксиманты $G_N(f, \mathcal{T}, \Gamma)$, $N = 1, 2, \dots$

функций $f \in L^1(\mathbb{T})$ равномерно равносходятся с некоторой подпоследовательностью частных сумм ряда Фурье функции f . Из последнего следует, что функция из указанной работы Меньшова, удовлетворяет условиям пункта 2 теоремы. Теорема 1.4 полностью доказана. $\square$

3. ПРОСТРАНСТВО $L^1(\mathbb{T})$. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5

Для функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ через

$$S_N(f, x) := \sum_{|k| \leq N} c_k(f) e^{ikx}, \quad N = 1, 2, \dots$$

обозначим N -тую частную сумму ряда Фурье. Доказательство теоремы 1.5 приводится методом Ш.В. Хеладзе (см. [9], [10]). Следующая лемма доказана в [9].

Лемма 3.1. *Пусть*

$$Q_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n-j} \cos(n+j)x - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \cos(2n+j)x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

- 1) $S_{2n-1}(Q_n, x) \geq \frac{1}{2} \ln n$ для любого $x \in [0, \pi/(6n)]$,
- 2) $|Q_n(x)| \leq 2(\pi + 1)$ для любого $x \in \mathbb{T}$.

Основной леммой настоящего параграфа является следующее утверждение.

Лемма 3.2. *При условии $\omega(\Gamma) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ и $K > 1$ существуют вещественный тригонометрический полином P и множество $E \subset \mathbb{T}$ такие, что*

- 1) $P(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{T}$,
- 2) $\int_{\mathbb{T}} P(x) dx = 2\pi$,
- 3) $c_u(P) = 0$, $0 < |u| < N$,
- 4) $G^*(P, \sigma, x) \geq K$, $x \in E$, для любой перестановки $\sigma \in D(P, \mathcal{T}, \Gamma)$,
- 5) $\mu(E) \geq 2\pi - \varepsilon$.

Доказательство. Поскольку $\omega(\Gamma) < \infty$, то для $H := \omega(\Gamma) + 1$ имеем $\gamma_n > 2\gamma_m$, при любом $m, n \in \mathbb{N}$, если $m - n \geq H$. Следовательно, для любых натуральных чисел $a < b$,

$$(3.1) \quad \gamma_a > 2^l \gamma_b, \quad \text{где } l = \left\lceil \frac{b-a}{H} \right\rceil.$$

Пусть Q_n - полином, определенный в лемме 3.1. Для $k = 0, 1, 2, \dots$ положим

$$Q_{n,k} := \frac{1}{2(\pi+1)} Q_n \left(Hx - \frac{\pi k}{6n} \right),$$

и

$$\Delta_{n,k} := \left[\frac{\pi k}{6nH}; \frac{\pi(k+1)}{6nH} \right].$$

Из полиномов $Q_{n,k}$ построим требуемый полином следующим образом:

$$(3.2) \quad P(x) := f_n(x) := \prod_{k=0}^{12nH-1} [1 + \cos(\lambda_k x) Q_{n,k}(x)],$$

где натуральные числа n и λ_k будут выбраны позже. Сразу заметим, что в силу второго пункта леммы 3.1, всякий полином вида (3.2) удовлетворяет условию 1) данной леммы. С другой стороны легко видеть, что если подобрать последовательность λ_k удовлетворяющую условиям

$$(3.3) \quad \lambda_0 > N + 220n^2 H^2, \quad \lambda_k > 3(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots,$$

то частоты гармоник, получающиеся при раскрытии скобок в произведении (3.2), будут отличны от нуля, и условия 2) и 3) данной леммы будут справедливы для всякого полинома вида (3.2). В дальнейшем будем предполагать, что для λ_k выполняется (3.3).

Сначала рассмотрим одночлены в произведении (3.2), а именно полиномы $P_{n,k} := \cos(\lambda_k x) Q_{n,k}(x)$. Из определения $Q_{n,k}$ видно, что спектр полинома $P_{n,k}$ есть множество

$$\{\pm \lambda_k \pm (n+j)H, \quad j = 0, 1, \dots, n-1\} \cup \{\pm \lambda_k \pm (2n+j)H, \quad j = 1, 2, \dots, n\},$$

а для соответствующих коэффициентов имеем

$$(3.4) \quad |c_{\pm \lambda_k \pm (n+j)H}(P_{n,k})| = \frac{1}{8(\pi+1)} \cdot \frac{1}{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

и

$$(3.5) \quad |c_{\pm \lambda_k \pm (2n+j)H}(P_{n,k})| = \frac{1}{8(\pi+1)} \cdot \frac{1}{j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть теперь $\sigma \in D(P_{n,k}, \mathcal{T}, \Gamma)$. Из (3.4), (3.5), (3.1) и монотонности последовательности Γ следует, что если $u, v \in \text{sp} P_{n,k}$ и $|u| > |v|$, то $\sigma(u) > \sigma(v)$. Из последнего, в силу условия 2) леммы 3.1, имеем, что

$$(3.6) \quad G^*(P_{n,k}, \sigma, x) \geq c(\ln n)^{1/2}, \quad x \in E_{n,k} \cap \Delta_{n,k},$$

где

$$E_{n,k} := \{x \in \mathbb{T} : |\cos(\lambda_k x)| \geq (\ln n)^{-1/2}\}.$$

Теперь если взять λ_k делящимся на $12nH$, то простыми вычислениями можно показать, что множества $E_{n,k}$ при любом $k = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяют условию

$$(3.7) \quad \mu(E_{n,k} \cap \Delta_{n,k}) > \mu(\Delta_{n,k}) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\ln n}}\right).$$

Остается доказать, что подходящим подбором λ_k можно сделать мажоранту f_n близким по значению к мажорантам одночленов на множествах $E_{n,k} \cap \Delta_{n,k}$.

Заметим, что для любого $u \in \text{sp} P_{n,k}$ имеем $||u| - \lambda_k| \leq 3nH$. После раскрытия скобок в (3.2) рассмотрим получившиеся отличные от одночленов полиномы общий вид которых таков:

$$(3.8) \quad P_{k_0, k_1, \dots, k_m} := \cos(\lambda_{k_0} x) \cos(\lambda_{k_1} x) \dots \cos(\lambda_{k_m} x) Q_{n, k_0}(x) Q_{n, k_1}(x) \dots Q_{n, k_m}(x),$$

где $0 \leq k_0 < k_1 < \dots < k_m \leq 12nH - 1$. Ясно, что если $u \in \text{sp} P_{k_0, k_1, \dots, k_m}$, то $u = \pm \lambda_{k_0} \pm \lambda_{k_1} \pm \dots \pm \lambda_{k_m} + O(1)$, где $O(1)$ величина, по модулю не превышающая $36H^2 n^2$, так как количество множителей $Q_{n, k}$ в произведении (3.8) не превышает $12nH$, а наибольший по модулю элемент спектра каждого полинома $Q_{n, k}$ есть $3nH$. Из условия (3.3) получим, что

$$(3.9) \quad \frac{1}{2} \lambda_{k_{m-1}} \leq ||u| - \lambda_{k_m}| \leq 2\lambda_{k_{m-1}},$$

т.е. каждый элемент спектра полинома $P_{k_0, k_1, \dots, k_m}$ находится на расстоянии порядка $\lambda_{k_{m-1}}$ от λ_{k_m} , а наименьшее из таких расстояний не меньше $0.5\lambda_0$.

С другой стороны ясно, что наименьший модуль коэффициентов полиномов вида (3.8) не меньше $a_0 := [8n(\pi + 1)]^{-(12nH-1)}$. С помощью (3.1) фиксируем λ_0 настолько большим, что $a_0 \gamma_j > \gamma_{j+0.5\lambda_0-3nH}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что из выбора последовательности λ_k и условия (3.9) следует, что $\sigma|_{\text{sp} P_{n,k}} \in D(P_{n,k}, \mathcal{T}, \Gamma)$ и

$$(3.10) \quad G^*(f_n, \sigma, x) \geq \frac{1}{2} G^*(P_{n,k}, \sigma, x), \quad k = 0, 1, \dots, 12nH - 1.$$

Обозначим $E_n = \bigcup_{k=0}^{12nH-1} (E_{n,k} \cap \Delta_{n,k})$. Из (3.7) имеем, что

$$(3.11) \quad \mu(E_n) \geq 2\pi \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\ln n}}\right),$$

а из (3.10) и (3.6) получим:

$$(3.12) \quad G^*(f_n, \sigma, x) \geq c(\ln n)^{1/2}, \quad x \in E_n.$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что если выбрать n достаточно большим, то сконструированный полином вида (3.2) будет удовлетворять условиям леммы. Лемма 3.2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.5. Из леммы 3.2 следует, что существует последовательность вещественных тригонометрических полиномов P_n и измеримых множеств $E_n \subset \mathbb{T}$, $n = 1, 2, \dots$ для которых

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \|P_n\|_1 < \infty$,
- 2) $G^*(P_n, \sigma, x) > n$, $x \in E_n$ для любой перестановки $\sigma \in D(P_n, \mathcal{T}, \Gamma)$,
- 3) $\mu(E_n) \rightarrow 2\pi$,
- 4) $(\text{sp} P_n \cap \text{sp} P_m) \setminus \{0\} = \emptyset$, $m \neq n$
- 5) $\min_{k \in \text{sp} P_n} |c_k(P_n) \gamma_{2|k|+1}| > \max_{k \in \text{sp} P_{n+1}} |c_k(P_{n+1}) \gamma_{2|k|}|$.

Положим $f = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$. Из 1) имеем, что $f \in L^1(\mathbb{T})$. Из 4) и 5) следует, что $\sigma|_{\text{sp} P_n} \in D(P_n, \mathcal{T}, \Gamma)$ для любой перестановки $\sigma \in D(f, \mathcal{T}, \Gamma)$, и существует последовательность a_n , для которой $G_{a_n}^*(f, \sigma, x) > \frac{1}{2} G^*(P_n, \sigma, x)$. Это, в силу 2) и 3), влечет расходимость почти всюду последовательности гриди аппроксимантов с весом Γ функции f . Теорема 1.5 доказана. $\square$

Автор выражает благодарность профессору А. Саакяну, под руководством которого была выполнена данная работа, а так же С. Гогяну, указавшему более простой путь доказательства леммы 3.2.

Abstract. We study the convergence of greedy algorithm with regard to renormalized trigonometric system. Necessary and sufficient conditions are found for system's normalization to guarantee almost everywhere convergence, and convergence in $L^p(\mathbb{T})$ for $1 < p < \infty$ of the greedy algorithm, where $\mathbb{T}$ is the unit torus. Also the nonexistence is proved for normalization which guarantees convergence almost everywhere for functions from $L^1(\mathbb{T})$, or uniform convergence for continuous functions.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Hunt, "On the convergence of Fourier series", Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (Proc. Conf., Edwardsville, Ill., 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill., pp. 235 – 255 (1968).
- [2] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx. **5**, 1 – 15 (1999).
- [3] P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general systems", J. Approx. Theory **107**, 293 – 314 (2000).
- [4] T. W. Körner, "Divergence of decreasing rearranged Fourier series", Annals of Mathematics **144**, 167 – 180 (1996).
- [5] T. W. Körner, "Decreasing rearranged Fourier series", The J. Fourier Analysis and Applications **5**, 1 – 19 (1999).
- [6] T. W. Körner, "Hard summation, Olevskii, Tao and Walsh", Bull. London Math. Soc. **38**, 705 – 729 (2006).

- [7] V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Foundations of Computational Mathematics **3** (1), 33 – 107 (2003).
- [8] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Convergence of greedy approximation I. The Trigonometric System", Studia Math. **159** (2), 161 – 184 (2003).
- [9] Ш. В. Хеладзе, "О расходимости всюду рядов Фурье функций из класса $L_\varphi(L)$ ", Тр. Тбил. мат. ин-та. **89**, 51 – 59 (1988).
- [10] С. В. Конягин, "О расходимости всюду подпоследовательностей частных сумм тригонометрических рядов Фурье", Теория Функций, Сборник Научных трудов, Тр. ИММ **11** (2), 112 – 119 (2005).
- [11] S. Kostyukovsky, A. Olevskii, "Note on decreasing rearrangement of Fourier series", J. of Applied Analysis **3** (1), 137 – 142 (1997).
- [12] M. Nielsen, "An example of an almost greedy uniformly bounded orthonormal basis for $L_p(0, 1)$ ", J. Approx. Theory, **149** (2), 188 – 192 (2007).
- [13] T. Tao, "On the almost everywhere convergence of wavelet summation methods", Applied and Computational Harmonic Analysis, 384 – 387 (1996).
- [14] S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "Convergence of greedy approximation I. General Systems", Studia Math. **159** (1), 143 – 160 (2003).
- [15] Г. Амирханян, "О сходимости гриди алгоритма по системе Уолша в пространствах L_p ", Изв. НАН Армении, Математика **43** (3), 3 – 12 (2008).
- [16] С. М. Никольский, "Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных", Тр. МИАН СССР, **38**, 244 – 278 (1951).
- [17] М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, "Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера-Шаудера", Математический сборник, 199:5, 3 – 26 (2008).
- [18] С. Гогян, "О жадном алгоритме в $L^1(0, 1)$ по подсистемам ситемы Хаара и о ω -квази-гриди базисах", Мат. заметки, **88**, (1), 18-29, (2010).
- [19] G. Kerkacharian, D. Picard, V. N. Temlyakov, "Some inequalities for the tensor product of greedy bases and weight-greedy bases", East J. on Approx., **12** (1), 103-118 (2006).
- [20] А. Алексанян, "О жадном алгоритме по системе Хаара", Изв. НАН Армении, Математика **45** (3), 11-24 (2010).
- [21] H. Aleksanyan, "On Greedy Algorithm By Renormed Franklin System", East J. on Approx. **16** (3), 193-216 (2010).
- [22] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, "Ортогональные ряды", Москва, Наука (1999).
- [23] Н.К. Бари, "Тригонометрические ряды Москва (1961).

Поступила 26 января 2012